АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 2

УДК 534.283

О ПРИМЕНЕНИИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

А. С. Князев, Б. Д. Тартаковский

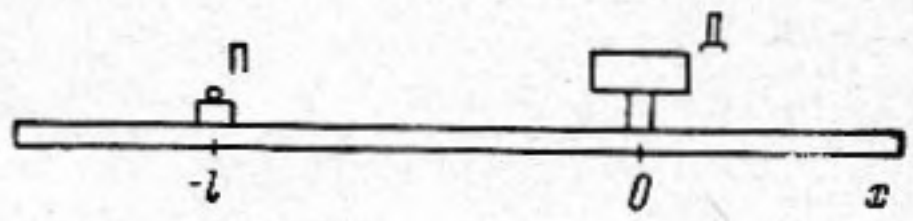
Исследуется возможность уменьшения вибраций бесконечного и ограниченного стержней, совершающих изгибные колебания с помощью электромеханической компенсирующей системы. Выяснена возможность подавления изгибных колебаний, распространяющихся по бесконечному стержню. Рассмотрена задача демпфирования изгибных колебаний ограниченных стержней. Полученное общее расчетное выражение анализируется для случая компенсации колебаний на резонансных частотах стержней с малыми потерями. Показана возможность компенсации колебаний бесконечных и ограниченных стержней системой электромеханической обратной связи с разнесенными приемным виброметром и вибратором, что расширяет возможности использования системы.

В настоящее время широко применяется принцип отрицательной обратной связи для изменения частотных характеристик электронных устройств. Были предложены и осуществлены также методы применения обратной связи в электромеханических устройствах. Так, в 1937 г. впервые В. С. Григорьевым было предложено использование принципа отрицательной обратной связи для обеспечения независимости от частоты звукового давления в горле рупорного громкоговорителя с камерой [1]. Виз и Вибуш описали электродинамический рекордер для глубинной записи звука на диске с применением отрицательной обратной связи [2]. В дальнейшем В. С. Григорьев и В. В. Фурдуев дали общую теорию электромеханических преобразователей с отрицательной обратной связью, охватывающую случай преобразования электрических колебаний в механические, так и случай механико-электрических преобразователей [13]. А. В. Быховский впервые предложил способ электроакустического подавления шума в слуховом органе путем подведения к головным телефонам усиленных и сдвинутых по фазе на 180° колебаний, полученных на выходе микрофона, установленного возле источника шума [4]. Г. Олсон впервые предложил применять электромеханическую обратную связь для ослабления шума на рабочем месте оператора в шумных цехах [5]. В непосредственной близости от микрофона был расположен громкоговоритель, излучающий шум в противофазе с воспринимаемым микрофоном. Было достигнуто ослабление шума в полосе частот $60 \div 100$ *гц* до 25 *дб* на расстоянии до 25 *см* от установки.

Нами рассмотрена возможность использования электромеханической обратной связи для демпфирования изгибных колебаний как неограниченных, так и ограниченных колебательных систем.

В связи с этим оказалось необходимым использовать системы более сложные по сравнению с описанной Олсоном. Это вызывается также и тем, что, как правило, оказывается затруднительным располагать датчик колебаний (вибратор) в непосредственной близости от приемника (виброметра). Ниже излагается теория такого рода систем.

Рассмотрим колебания бесконечного стержня, на котором в точках $x = -l$ и $x = 0$ установлены, соответственно, виброметр П и вибратор Д (фиг. 1). Пусть бегущая по стержню изгибная волна распространяется в направлении $x > 0$. Если виброметр является приемником ускорения (т. е. электрическое напряжение на выходе виброметра пропорционально механическому ускорению), а вибратор является источником силы (т. е. сила $F(0)$, развиваемая вибратором пропорциональна электрическому напряжению на нем), то можно выразить комплексный коэффициент усиления промежуточного усилителя $K(\omega) = K_0(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = U_Д / U_П$ через параметры виброметра и вибратора



Фиг. 1

$$K(\omega) = \frac{-F(0)}{y(-l)} \cdot \frac{1}{ab\omega^2}, \tag{1}$$

где a (*в сек*^{2} / *см*) — коэффициент передачи вибратора, b (*дин* / *в*) — коэффициент передачи вибратора.

Амплитуда колебаний бесконечного стержня, возбуждаемого силой $F(0)e^{i\omega t}$, сосредоточенной в точке $x = 0$, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - k^4y = 0. \tag{2}$$

где $k = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\rho / EI}$, $y(x)$ — амплитуда колебаний стержня в точке x, ρ — линейная плотность, E — модуль упругости и I — момент инерции поперечного сечения стержня. Решение уравнения (2) при учете условий погашаемости на бесконечности имеет вид:

$$\begin{aligned} y_2 &= Ae^{ikx} + Be^{-kx}, \quad x \leqslant 0, \\ y_3 &= Ce^{-ikx} + De^{kx}, \quad x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Выполнение условий в точке $x = 0$: неразрывность смещений и углов поворота поперечного сечения ($y_2 = y_3$, $dy_2 / dx = dy_3 / dx$) равенство нулю полного момента в сечении $M = -EI(d^2y_2 / dx^2 - d^2y_3 / dx^2) = 0$ и равенство суммы перерезывающих сил в сечении $x = 0$ силе F, $EI(d^3y_2 / dx^3 - d^3y_3 / dx^3) = F$ позволяет получить систему четырех уравнений для определения коэффициентов A, B, C, D.

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ iA + B = -iC + D \\ \\ A - B = C - D \\ iA - B = F / 2k^3EI \end{cases} \tag{4}$$

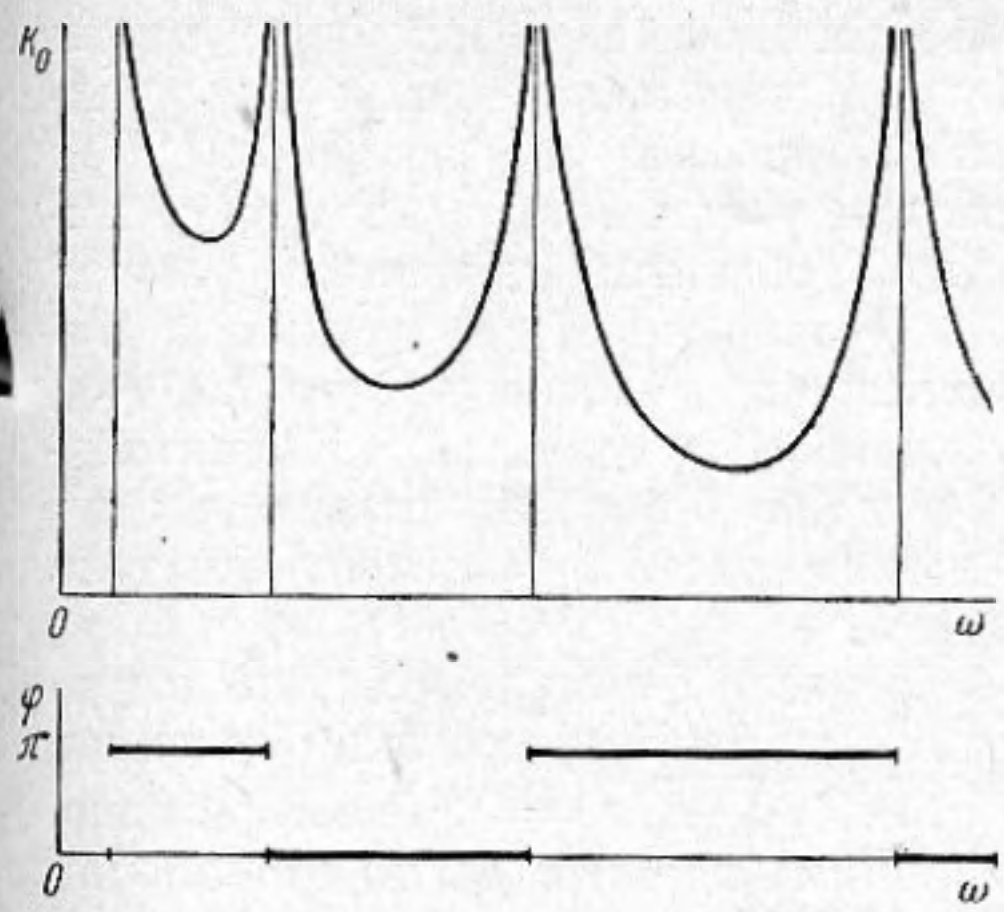
и определить поле изгибных колебаний с учетом падающей на систему виброметр — вибратор бегущей волны $y_1 = e^{-ikx}$

$$y(x \leqslant 0) = y_1 + y_2 = e^{-ikx} + Ae^{ikx} - iAe^{kx}, \tag{5}$$

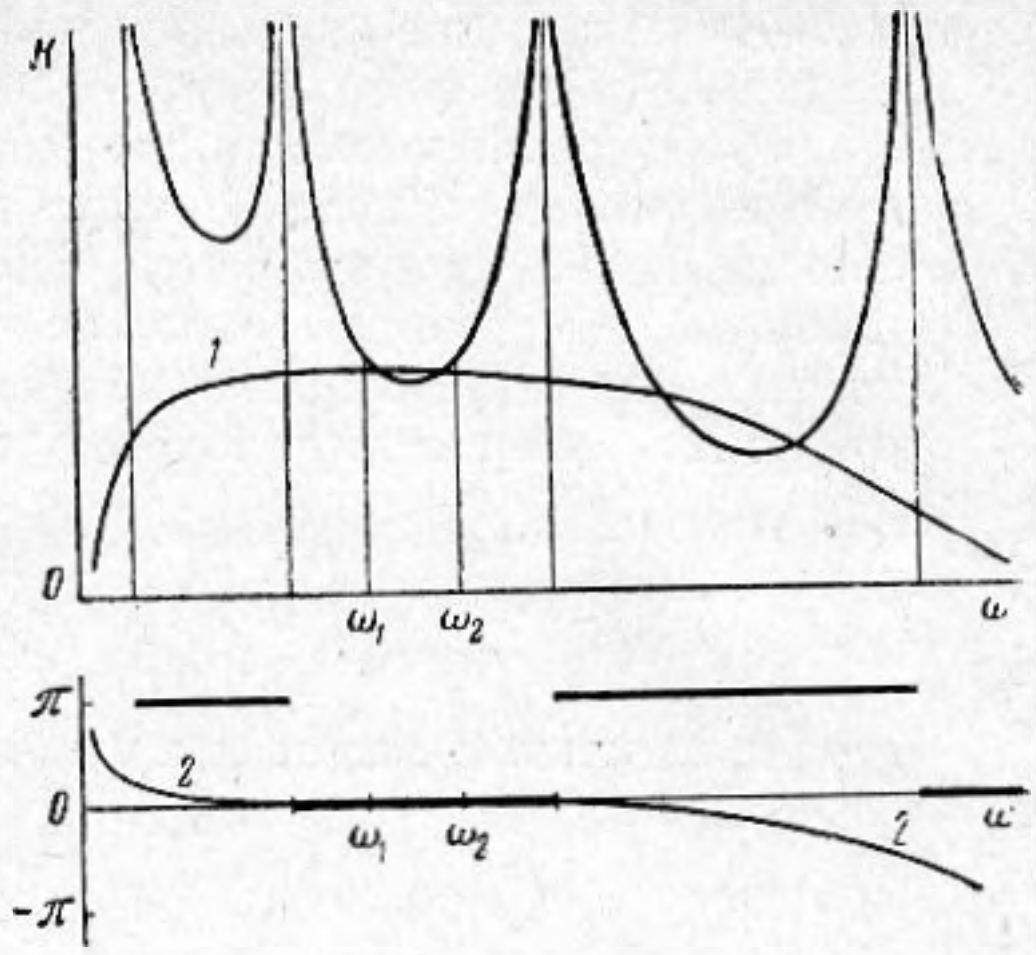
$$y(x \geqslant 0) = y_1 + y_3 = (1 + A)e^{-ikx} - iAe^{-kx}, \tag{6}$$

где $A = F / 4ik^3EI$.

Согласно формуле (6), величина $1 + A$ может рассматриваться как коэффициент прохождения падающей на систему виброметр — вибратор изгибной гармонической волны $y_1 = e^{-ikx}$. Эффект электромеханической компенсации обеспечивается условиями отсутствия в области $x > 0$ распространяющейся волны ($I + A = 0$). Подставив выражение (6)



Фиг. 2



Фиг. 3

в формулу (1), получим необходимый комплексный коэффициент передачи:

$$K(\omega)=\frac{4k^3EI}{ab\omega^2(2\sin kl+e^{-kl})}, \tag{7}$$

который может быть также представлен в виде коэффициента усиления и фазовой характеристики усилителя:

$$K_0(\omega)=\frac{4\sqrt[4]{EI\rho^3}}{ab\sqrt{\omega}\cdot\left|2\sin\sqrt{\omega}\cdot\sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}}\,l+e^{-\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\rho l/EI}}\right|}, \tag{8}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0, & 2\sin\sqrt{\omega}\cdot\sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}}\,l+e^{-\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\rho l/EI}}>0\\ \pi, & 2\sin\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}}\,l+e^{-\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\rho l/EI}}<0.\end{cases} \tag{8'}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть виброметр и вибратор совмещены в одной точке; тогда

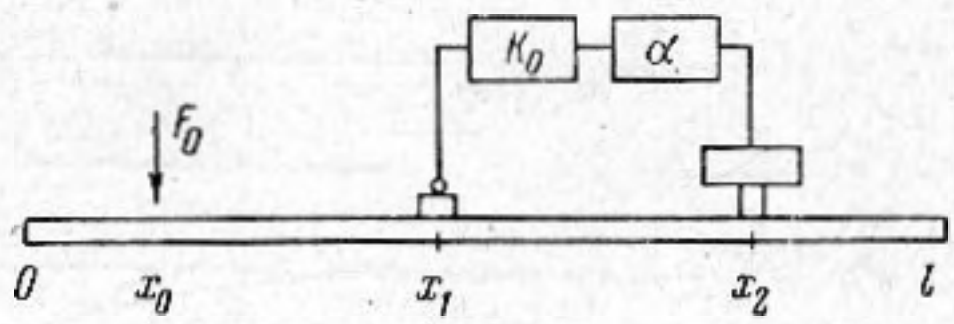
$$K_0(\omega)=\frac{4\sqrt[4]{EI\rho^3}}{ab\sqrt{\omega}},\qquad \varphi(\omega)=0, \tag{9}$$

Пусть, напротив, расстояние между виброметром и вибратором значительно превышает длину изгибной волны $\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\rho l/EI}\gg 1$. Пренебрегая экспоненциальными членами в формулах (8) и (8′), получим

$$K_0(\omega)=\frac{2\sqrt[4]{EI\rho^3}}{ab\left|\sin\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}}\,l\right|\sqrt{\omega}}, \tag{10}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0, & \frac{4\pi^2n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}<\omega<\frac{(2n+1)^2\cdot\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\\ \pi, & \frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}<\omega<\frac{4(n+1)^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}},\end{cases}$$

где n — любое целое положительное число. Частотные характеристики величин $K_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ (фиг. 2) имеют слишком сложный вид, чтобы можно было реализовать такую систему в общем виде. Однако для сравнительно узкого диапазона частот компенсация все же возможна. Как видно из фиг. 3, для этой цели в некотором узком диапазоне частот, например, $\omega_1 \div \omega_2$, может быть использован обычный усилитель низкой частоты с частотной характеристикой *1* и фазовой характеристикой *2*. Частотную характеристику такого усилителя на участке частот $\omega_1 \div \omega_2$ можно всегда сделать приблизительно линейной и обеспечить в том же участке частот малые фазовые сдвиги.



Фиг. 4

Согласно формуле (10), на частотах, удовлетворяющих условию $\sin \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\rho / EI}\, l = 0$, коэффициент усиления должен быть бесконечно большим. Физический смысл этого соотношения заключается в следующем: в области $x < 0$, где установлен виброметр, существует стоячая волна (это следует из формулы (10), если в ней положить $A = -1$). Когда виброметр оказывается в узле стоячей волны, т. е. напряжение на его выходе бесконечно мало, то требуется бесконечно большое усиление, чтобы сила, развиваемая вибратором, оказалась достаточной для компенсации вибраций.

Из сказанного выше следует, что для компенсации изгибных колебаний бесконечного стержня целесообразно располагать виброметр возможно ближе к вибратору. С увеличением расстояния между ними необходимая частотная характеристика усилителя становится все более сложной.

Приведенные заключения могут быть распространены и на конечные стержни с потерями. Необходимым условием при этом является столь большая величина затухания изгибных колебаний на пути от фазокомпенсирующей системы до края стержня, чтобы отраженная от края изгибная волна, вернувшаяся к системе, была бы не менее чем на порядок слабее прямой волны. Если это условие не выполняется, то, приходится рассматривать задачу о компенсации для стержня конечной длины.

Рассмотрим резонансные колебания стержня длиной l, возбуждаемого силой $F_0 e^{i\omega t}$, сосредоточенной в точке x_0 (фиг. 4). В точках x_1 и x_2 установлены соответственно виброметр Вм и вибратор В компенсирующей системы. Электрическое напряжение, снимаемое с виброметра, подается через усилитель и фазовращатель на вибратор. Коэффициент передачи усилителя и фазовращателя может быть, как и раньше, написан в виде $K_0 e^{i\alpha}$ (K_0 — коэффициент усиления усилителя, α — фазовый сдвиг фазовращателя). Амплитуда колебаний стержня, возбуждаемого точечной силой $F_0 e^{i\omega t}$, удовлетворяет уравнению:

$$EI\left(1 + i\frac{d}{\pi}\right)\frac{d^4u}{dx^4} - \rho\omega^2 u = F_0\delta(x - x_0), \tag{11}$$

где E — модуль упругости материала стержня, I — момент инерции поперечного сечения, ρ — масса на единицу длины стержня, d — логарифмический декремент затухания. Решение уравнения (11) имеет вид

$$u^{(0)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0 u_n(x_0)\, u_n(x)}{\rho \int\limits_0^l u_n^2 dx \left[\left(1 + i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2 - \omega^2\right]}, \tag{12}$$

где $u_n(x)$ — собственная функция, удовлетворяющая однородному уравнению, соответствующему уравнению (11), и граничным условиям.

Аналогично, решением уравнения колебаний стержня, возбуждаемого силой $Fe^{i\omega t}$, развиваемой вибратором B, установленным в точке x_2, является функция

$$u^{(1)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{FU_n(x_2)\cdot u_n(x)}{\rho\int\limits_0^l u_n^2dx\left[\left(1+i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2+\omega^2\right]}. \tag{13}$$

Результирующая форма колебания стержня, возбуждаемого силами $F_0e^{i\omega t}$ и $Fe^{i\omega t}$, равна сумме форм колебаний, возбуждаемых каждой силой в отдельности: $u(x)=u^{(0)}x+u^{(1)}(x)$. Воспользовавшись соотношениями (12) и (13), получим

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_0u_n(x_0)+Fu_n(x_2)}{\rho\int\limits_0^l u_n^2dx\left[\left(1+i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2-\omega^2\right]}\cdot u_n(x). \tag{14}$$

Если виброметр является приемником ускорения, а вибратор — источником силы, коэффициент передачи усилителя и фазовращателя $K_0e^{i\alpha}=u_д/u_п$ ($u_п$ — электрическое напряжение, снимаемое с виброметра, $u_д$ — электрическое напряжение на вибраторе) можно выразить через параметры электромеханических преобразователей

$$K_0e^{i\alpha}=-\frac{F}{u(x_1)}\cdot\frac{1}{ab\omega^2}. \tag{15}$$

Использовав формулы (13) и (14) для выражения F через $u_n(x_1)$ и произведя опять подстановку в формулу (13), получим окончательно

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_0\frac{u_n(x_0)+ab\omega^2K_0e^{i\alpha}u_n(x)\times}{\rho\int\limits_0 u_n^2\,dx\times}$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x_1)u_n(x_2)}{\rho\int\limits_0 u_n^2\,dx\left[\left(1+i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2-\omega^2\right]}-ab\omega^2K_0e^{i\alpha}u_n(x_2)\times$$

$$\frac{\times\left[\left(1+i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2-\omega^2\right]\times}{\times\left\{1+ab\omega^2K_0e^{i\alpha}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x_1)u_n(x_2)}{\rho\int\limits_0^l u_n^2\,dx\left[\left(1+i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2-\omega^2\right]}\right\}}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x_0)u_n(x_1)}{\rho\int\limits_0^l u_n^2\,dx\left[\left(1+i\frac{d}{\pi}\right)\omega_n^2-\omega^2\right]}. \tag{16}$$

Можно показать, что правая часть выражения (16) в общем случае в нуль не обращается. Физически это означает, что при использовании фазокомпенсирующей системы, состоящей из одной пары вибратор — виброметр, невозможно достигнуть полной компенсации по всей длине стержня.

Пусть стержень возбуждается на одной из резонансных частот $\omega = \omega_n$. Тогда в формуле (16) слагаемые n-го номера преобладают над всеми остальными. Поэтому выражение (16) можно значительно упростить

$$u(x) = \frac{F_0 u_n(x_0) u_n(x)}{\rho \int\limits_0^l u_n^2\, dx \cdot i \frac{d}{\pi} \omega_n^2 + ab\omega_n^2 K_0 e^{i\alpha} u_n(x_1) u_n(x_2)}. \qquad (17)$$

Из формулы (17) видно, что $u(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении K_0, т. е. нельзя добиться полной компенсации колебаний стержня даже на одной резонансной моде. Однако соответствующим образом выбирая $K_0 e^{i\alpha}$, можно уменьшить резонансные колебания равномерно по всей длине стержня до заранее заданной величины.

Пусть амплитуда колебаний стержня после включения компенсирующей системы в A раз меньше чем до включения, т. е.

$$\frac{F_0 u_n(x_0) u_n(x)}{\rho \int\limits_0^l u_n^2\, dx \cdot i \frac{d}{\pi} \omega_n^2} = A \frac{F_0 u_n(x_0) u_n(x)}{\rho \int\limits_0^l u_n^2\, dx \cdot i \frac{d}{\pi} \omega_n^2 + ab\omega_n^2 K_0 e^{i\alpha} u_n(x_1) u_n(x_2)}. \qquad (18)$$

Из соотношения (18) определим $K_0 e^{i\alpha}$.

$$K_0 e^{i\alpha} = \frac{(A-1)\rho \int\limits_0^l u_n^2\, dx \cdot \frac{d}{\pi}}{ab u_n(x_1) u_n(x_2)}, \qquad (19)$$

или

$$K_0 = \frac{(A-1) \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \rho \int\limits_0^l u_n^2\, dx}{ab\,|u_n(x_1) u_n(x_2)|}, \qquad (20)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \sigma_n, \quad \text{где} \quad \sigma_n = \begin{cases} 0; & u_n(x_1) u_n(x_2) > 0, \\ \pi, & u_n(x_1) u_n(x_2) < 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Из формулы (20) следует, что для улучшения эффекта компенсации необходимо увеличивать коэффициент усиления. Поместив виброметр и вибратор в пучности собственного колебания $u_n(x_1)\ u_n(x_2) = \max$, можно уменьшить требуемый коэффициент усиления. Формула (21) определяет величину фазового сдвига α фазовращателя, необходимого для компенсации фазовых сдвигов вибратора и виброметра.

Проведенные нами экспериментальные исследования подтвердили принципиальную возможность снижения вибраций стержней с помощью электромеханической компенсирующей системы. Было получено хорошее согласие рассчитанного и экспериментального значения коэффициента передачи фазокомпенсирующей системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Григорьев. Устройство для уменьшения частотных и амплитудных искажений при звуковоспроизведении. Авторское свидетельство № 55923 с приоритетом 31/X 1937 г.
2. L. Vieth, C. F. Wiebusch. J. Soc. Mot. Picture Eng., 1938, 30, 96.
3. В. С. Григорьев, В. В. Фурдуев. Электромеханические преобразователи с обратной связью, Электросвязь, 1940, 4, 40—50.
4. А. В. Быховский. Способ подавления шума в слуховом органе. Автор. свид. № 403353/26 с приоритетом 24/VIII 1949 г.
5. Harry Olson, Everett G. May. Electronic sound absorber. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 6, 1130—1136.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
26 апреля 1964 г.