АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

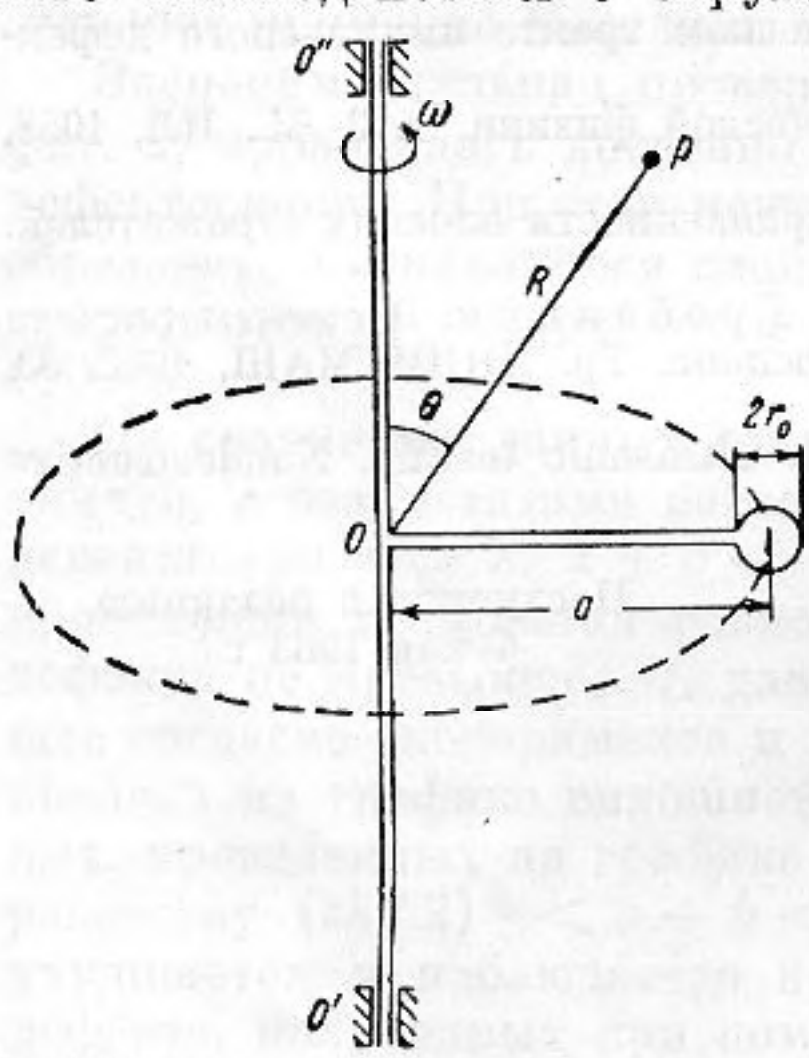
Том XI 1965 Вып. 3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ТЕЛОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ И ВРАЩАЮЩИМСЯ ФЛЮГЕРОМ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

В. П. Докучаев

Рассмотрено излучение звуковых волн телом, движущимся по окружности, и вращающимся флюгером. Получены выражения для акустических полей в волновой зоне. Даны формулы, определяющие распределение интенсивности излучения по углам, полную энергию излучения и энергетический спектр.

Вопрос об излучении звуковых волн при движении тел по окружности имеет непосредственное отношение к теории излучения звуковых волн воздушными и гребными винтами. Расчет характеристик излучения этих винтов очень сложен вследствие их специальной формы и довольно сложного взаимодействия с окружающей средой. Имеется целый ряд работ как теоретических, так и экспериментальных, посвященных проблеме излучения звука винтами (см., например, [1—6]). В особенности следует отметить работу Л. Я. Гутина, который получил выражение, определяющее поле давления в волновой зоне. Однако такие вопросы, как распределение интенсивности излучения по углам, полная энергия излучения и энергетический спектр, остались не выясненными. В работе Сретенского [7] исследован вопрос о звуке вращения, создаваемом равномерно вращающимися и осциллирующими диполями. Некоторые сведения о работах по излучению звука вращения можно найти в обзоре [8].



В предлагаемой работе рассматривается сравнительно простая задача об излучении звуковых волн телом, равномерно движущимся по окружности, радиус которой много больше размеров тела (см. фигуру). Затем результаты решения этой задачи обобщаются на систему тел, вращающихся по окружности и образующих флюгер простейшей формы. В качестве примера такого флюгера может служить система, состоящая из нескольких шаров или дисков, жестко соединенных тонкими горизонтальными стержнями одинаковой длины с равномерно вращающейся вертикальной осью. Метод решения этой задачи основан на введении в уравнение Эйлера функции силового источника и использовался ранее при анализе излучения волн Маха телами, движущимися со сверхзвуковой скоростью [9].

Будем описывать возмущения, создаваемые в сплошной среде (в газе или в жидкости) движущимися телами, известной системой линейных

уравнений акустики [2]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$p = c_s^2 \rho, \tag{3}$$

где ρ_0 — средняя невозмущенная плотность среды, c_s — скорость звука, p, ρ и $\mathbf{v}$ — малые возмущения давления, плотности и скорости в среде, создаваемые движущимся телом, $\mathbf{f}$ — плотность внешней силы, действующей со стороны тела на газ (функция силового источника возмущений). Вязкость и теплопроводность здесь не учитываются. Из системы (1)—(3) легко получить уравнение для возмущений плотности:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho - \operatorname{div} \mathbf{f}. \tag{4}$$

Для того чтобы определить вид функции источника — плотность силы $\mathbf{f}$, необходимо рассмотреть конкретную модель тела, взаимодействующего со средой. На фигуре схематически изображена предлагаемая модель. Шар или диск радиуса r_0 жестко соединен горизонтальным стержнем длиной a с вертикальной осью $O'O''$, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω. Следовательно, тело будет двигаться по окружности с линейной скоростью $V_0 = a\omega$. Вследствие сопротивления среды как стержень, так и тело, прикрепленное на его конце, будут испытывать силу лобового сопротивления

$$F = C\rho_0 V_0^2 S, \tag{5}$$

где S — площадь лобового сечения, C — коэффициент аэродинамического сопротивления. В большом интервале дозвуковых скоростей коэффициент C можно считать постоянным и зависящим только от характерных размеров тела [10, 11]. Сила F есть результирующая всех поверхностных напряжений, действующих со стороны среды на движущееся тело. Она направлена в сторону, противоположную скорости $\mathbf{V}_0$, т. е. в рассматриваемом здесь случае по касательной к окружности.

С другой стороны, тело должно действовать на газ с силой, равной по величине и противоположной по направлению силе лобового сопротивления. Выберем цилиндрическую систему координат (r, z, φ), направив ось z по оси вращения $O'O''$ (см. фигуру). В этой системе силу $\mathbf{F}$, действующую со стороны тела на газ, можно записать в простом виде:

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}_\varphi, \tag{6}$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор, направленный по касательной к окружности.

Будем считать, что сила сопротивления тела много больше силы сопротивления горизонтального стержня, соединяющего его с осью вращения. Далее положим, что

$$r_0 \ll a, \tag{7}$$

т. е. радиус тела много меньше длины стержня. При выполнении этих условий плотность силы $\mathbf{f}$ в уравнении (1) можно представить в виде δ-функции

$$\mathbf{f} = F \frac{\delta(r-a)}{r} \delta(z) \delta(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_\varphi. \tag{8}$$

Такая запись означает, что плотность силы $\mathbf{f}$ отлична от нуля только в области близ точки с координатами $r = a$, $\varphi = \omega t$, $z = 0$, где находится движущееся тело, и равна нулю в остальном пространстве. При этом интеграл по объему

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r\mathbf{f}\, dr\, dz\, d\varphi = F\mathbf{e}_\varphi. \tag{9}$$

Как будет показано ниже, источник вида (8) порождает в среде дискретный спектр звуковых волн. Длины этих волн $\lambda_n = 2\pi a / nM$, где a — радиус окружности, $M = V_0 / c_s$ — число Маха, n — номер гармоники. При малых M и в силу условия (7) для первых гармоник $r_0 \ll \lambda_n$, т. е. акустические возмущения имеют длины волн много больше размеров тела, что является дополнительным подтверждением возможности задания источника возмущений в виде δ-функции. Заметим, что, например, для винта подобное представление функции источника не справедливо, т. к. перечисленные выше условия не выполняются.

Подставим выражение (8) в уравнение (4) и запишем его в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \frac{F\delta(z)}{r^2 c_s^2}\delta(r-a)\,\delta_\varphi'(\varphi-\omega t). \tag{10}$$

Решение этого уравнения позволит определить поле возмущений плотности среды телом, равномерно движущимся по окружности. Зная решение уравнения (10), из формул (1) — (3) легко определить $\mathbf{v}$ и p. Для расчета интенсивности излучения звуковых волн будем пользоваться известным соотношением [2]:

$$I = -\oint_S (\mathbf{N}d\mathbf{s}), \quad \mathbf{N} = p\mathbf{v}, \tag{11}$$

где $d\mathbf{s}$ — элемент поверхности S, по которой ведется интегрирование, I — интенсивность излучения, $\mathbf{N}$ — вектор потока энергии.

Заметим, что остается неясным вопрос о целесообразности введения дополнительного источника звука, обусловленного вытеснением среды телом [1, 3]. Учет этого механизма излучения можно провести, дополнив уравнение непрерывности (2) соответствующей плотностью источников. Однако движущееся тело не является ни источником, ни стоком для плотности среды. Основные изменения плотности обусловлены механическим выталкиванием среды силой $\mathbf{F}$, что учитывается в уравнениях (1) и (4). Сила создает поле скоростей $\mathbf{v}$, которое в свою очередь изменяет плотность среды ρ в соответствии с уравнением (2).

Решение основного уравнения (10) можно получить следующим образом. Представим функцию $\delta(\varphi - \omega t)$, вследствие периодичности ее аргумента по φ, в виде

$$\delta(\varphi-\omega t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\omega t)} \tag{12}$$

и будем искать решение уравнения (10) в форме разложения по гармоникам

$$\rho = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n e^{in(\varphi-\omega t)}, \tag{13}$$

где ρ_n — амплитуда гармоники номера n. Подставляя выражение (13) в уравнение (10) с учетом формулы (12), получим следующее уравнение для ρ_n:

$$\frac{\partial^2\rho_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho_n}{\partial r} + \frac{\partial^2\rho_n}{\partial z^2} + \left(\frac{n^2\omega^2}{c_s^2} - \frac{n^2}{r^2}\right)\rho_n = \frac{inF}{2\pi a r c_s^2}\delta(z)\,\delta(r-a). \tag{14}$$

Для отыскания решения уравнения (14) воспользуемся преобразованиями Фурье — Ханкеля [12]:

$$\bar{\rho}_n(k, \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} r\rho_n(r, z)\, e^{-i\varkappa z} J_n(kr)\, dr\, dz, \tag{15}$$

с формулой обращения

$$\rho_n = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k\rho_n(k,\varkappa)\, e^{i\varkappa z} J_n(kr)\, dk\, d\varkappa, \tag{16}$$

где $J_n(kr)$ — функция Бесселя n-го порядка. Применяя преобразование (15) к уравнению (14), будем иметь следующее выражение для трансформанты Фурье — Ханкеля:

$$\bar{\rho}_n = \frac{inF}{4\pi^2 a c_s^2}\,\frac{J_n(ka)}{k^2+\varkappa^2-\dfrac{n^2\omega^2}{c_s^2}}. \tag{17}$$

Пользуясь формулой обращения (16), получим

$$\rho_n = -\frac{inF}{4\pi^2 a c_s^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{k e^{i\varkappa z} J_n(ka) J_n(kr)\, d\varkappa\, dk}{k^2+\varkappa^2-\dfrac{n^2\omega^2}{c_s^2}}. \tag{18}$$

Интеграл по k вычислен и приводится в монографии [13]:

$$\rho_n = \begin{cases} \dfrac{nF}{8\pi a c_s^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varkappa z} J_n\left(r\sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right) H_n^{(1)}\left(a\sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right) d\varkappa & \text{при } r \leqslant a \\[2ex] \dfrac{nF}{8\pi a c_s^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varkappa z} J_n\left(a\sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right) H_n^{(1)}\left(r\sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right) d\varkappa & \text{при } r \geqslant a \end{cases}, \tag{19}$$

где $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля. Соотношения (19) в интегральной форме определяют амплитуду гармоники номера n возмущений плотности в среде, создаваемых движущимся по окружности телом. Ввиду того что нас будут интересовать акустические поля при $r \geqslant a$, можно записать выражение для возмущений плотности в виде

$$\rho = \frac{F}{8\pi a c_s^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{in(\varphi-\omega t)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varkappa z} J_n\left(a\sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right)\times$$

$$\times H_n^{(1)}\left(r\sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right) d\varkappa. \tag{20}$$

Для того чтобы определить поле в волновой зоне, т. е. при больших r и z, поступим следующим образом. Введем сферические координаты R и θ так, что $r = R\sin\theta$ и $z = R\cos\theta$. Воспользуемся асимптотическим представлением для функции Ханкеля при больших значениях аргумента. В этом случае можно написать выражение:

$$\rho_n = \frac{nFe^{-i(n\pi/2+\pi/4)}}{8\pi a c_s^2}\left(\frac{2}{\pi R\sin\theta}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_n\left(a\sqrt{\dfrac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2}\right) e^{iR(\varkappa\cos\theta+\sin\theta\sqrt{n^2\omega^2/c_s^2-\varkappa^2})}\, d\varkappa}{\left(\dfrac{n^2\omega^2}{c_s^2}-\varkappa^2\right)^{1/4}} \tag{21}$$

Вычисление интеграла по $\varkappa$ в формуле (21) можно провести методом перевала в комплексной плоскости $\varkappa$. Заметим, что точки $\varkappa = \pm n\omega / c_s$ являются точками ветвления подынтегральной функции, но не полюсами. Действительно, при $n \neq 0$ и $n\omega \to \varkappa c_s$ функция Бесселя J_n имеет асимптотическое представление $J_n \sim (n^2\omega^2 / c_s^2 - \varkappa)^{n/2}$ и, следовательно, подынтегральное выражение не имеет полюсов при $n\omega = \varkappa c_s$. Точка $n\omega = \varkappa c_s \cos\theta$ является точкой перевала. В результате интегрирования получаем

$$\rho_n = \frac{nF}{4\pi a c_s^2 R} J_n(nM \sin\theta)\, e^{i(n\omega R/c_s - n\pi/2 - \pi/2)}, \tag{22}$$

где введено число Маха $M = \omega a / c_s = V_0 / c_s$. Пользуясь соотношением (13), окончательно для возмущений плотности в волновой зоне получим выражение:

$$\rho = \frac{F}{2\pi a c_s^2} \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(nM \sin\theta) \frac{\sin n\gamma}{R}, \tag{23}$$

где $\gamma = \varphi - \omega t + \omega R / c_s - \pi / 2$. Из уравнений (1) — (3) легко получить значения различных компонент скорости $\mathbf{v}$. Для вычисления энергии излучения нам в дальнейшем понадобится радиальная компонента скорости v_R в волновой зоне, которая имеет вид

$$v_R = \frac{F}{2\pi a \rho_0 c_s} \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(nM \sin\theta) \frac{\sin n\gamma}{R}. \tag{24}$$

Из выражений (23) — (24) следует, что на больших расстояниях от вращающегося тела поля плотности и скорости имеют вид расходящихся сферических волн с набором частот, кратных основной частоте вращения $\omega_n = n\omega$. Соответствующие им длины волн $\lambda_n = 2\pi a / nM$. Однако для практических целей большой интерес представляют не акустические поля возмущения ρ, p и $\mathbf{v}$, а полная энергия излучения в единицу времени, распределение излучаемой энергии по углу θ и энергетический спектр излучения (зависимость интенсивности излучения от номера гармоники).

Для расчета звуковой энергии, излучаемой телом, движущимся по окружности в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, воспользуемся формулой

$$dI = N_R R^2 d\Omega, \tag{25}$$

где $N_R = c_s^2 \rho v_R^*$, $(*)$ обозначает комплексно-сопряженную величину. Используя формулы для ρ и v_R^* (23) — (24), определим проекцию вектора потока энергии в радиальном направлении

$$N_R = \frac{F^2}{4\pi^2 a^2 \rho_0 c_s R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} nn' \sin n\gamma \sin n'\gamma J_n(nM \sin\theta) J_{n'}(n'M \sin\theta) \tag{26}$$

и усредним полученное выражение (26) по периоду вращения тела $T = 2\pi / \omega$, используя соотношение

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin n' \omega t\, dt = \frac{1}{2} \delta_{nn'}, \tag{27}$$

где $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера. После усреднения по времени в формуле (26) легко провести суммирование по индексу n' с помощью соотношения (27).

Подставляя полученное выражение для N_R в формулу (25), получим

$$dI = \sum_{n=1}^{\infty} dI_n = \frac{F^2}{8\pi^2 a^2 \rho_0 c_s} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2 (nM \sin\theta)\, d\Omega, \tag{28}$$

где I_n — интенсивность излучения гармоники номера n.

Из формул (22), (28) для плотности ρ_n и для интенсивности I_n непосредственно следует, что в излучении отсутствует монопольная компонента и разложение на мультиполи начинается с дипольной компоненты ($n = 1$), которая, как будет показано, играет основную роль в излучении звука.

Соотношение (28) дает возможность определить распределение интенсивности излучения по углу θ. Действительно, пользуясь значением суммы ряда [13, 14],

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2 (nx) = \frac{x^2(4 + x^2)}{16(1 - x^2)^{7/2}} \tag{29}$$

для интенсивности излучения всех гармоник в телесный угол $d\Omega$ из (28) получим выражение:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{F^2 M^2}{128\pi^2 a^2 \rho c_s} \frac{\sin^2\theta (4 + M^2 \sin^2\theta)}{(1 - M^2 \sin^2\theta)^{7/2}}. \tag{30}$$

Из формул (28) и (30) следует, что при дозвуковых скоростях движения тела по окружности, максимум интенсивности излучения лежит в плоскости этой окружности и излучение имеет дипольный характер. С ростом числа M в области околозвуковых скоростей диаграмма излучения становится более сложной. Здесь мы будем интересоваться случаем $M < 1$. Выполняя интегрирование в формуле (30) по телесному углу $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, получим выражение для полной интенсивности излучения

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \frac{F^2 M^2}{12\pi a^2 \rho_0 c_s (1 - M^2)^3}. \tag{31}$$

Обратим внимание на интересное следствие, вытекающее из формулы (31). При дозвуковых скоростях движения тела по окружности $M^2 \ll 1$, с учетом формулы (5) для зависимости силы лобового сопротивления F от скорости V_0 следует, что интенсивность $I \sim V_0^6 \sim \omega^6$. Однако при движении с околозвуковыми скоростями $M \lesssim 1$ интенсивность излучения резко возрастает, стремясь к бесконечности при $M \to 1$. В реальных средах с вязкостью и другими диссипативными процессами (теплопроводность, турбулентная вязкость) расходимость выражения для интенсивности излучения исчезает, но остается «резонансный» характер зависимости интенсивности излучения от скорости. Аналогичный эффект нарастания интенсивности излучения имеет место при прямолинейном движении акустического монополя со скоростями, близкими к скорости звука в среде.

Рассмотрим теперь энергетический спектр излучения. Пользуясь формулой (28), напишем интенсивность излучения на гармонике номера n в единичный телесный угол

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{n^2 F^2}{8\pi^2 a^2 \rho_0 c_s} J_n^2 (nM \sin\theta). \tag{32}$$

Интегрируя по телесному углу $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, получим

$$I_n = \frac{n^2 F^2}{4\pi a^2 \rho_0 c_s} \int_0^{\pi} \sin\theta J_n^2 (nM \sin\theta)\, d\theta. \tag{33}$$

Интеграл в правой части формулы (33) исследован в монографии [14]. Мы воспользуемся его асимптотическим значением при $M < 1$:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta J_n^2(nM\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{nM}\int_0^{2nM} J_{2n}(x)\,dx = \frac{2(nM)^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{34}$$

Таким образом, мы получаем окончательно выражение для интенсивности излучения гармоники номера n

$$I_n = \frac{F^2M^{2n}}{2\pi a^2\rho_0 c_s}\,\frac{n^{2(n+1)}}{(2n+1)!}. \tag{35}$$

Как легко убедиться, интенсивность быстро падает с ростом номера гармоники. На основной частоте ω (при $n = 1$) имеем

$$I_1 = \frac{F^2M^2}{12\pi a^2\rho_0 c_s}. \tag{36}$$

Сравнивая выражение (36) с формулой для полной энергии излучения (31), мы видим, что при $M \ll 1$ в основном все излучение приходится на первую гармонику. Отношение интенсивности излучения на гармонике номера n к интенсивности на первом тоне имеет вид

$$\frac{I_n}{I_1} = 6M^{2(n-1)}\frac{n^{2(n+1)}}{(2n+1)!}. \tag{37}$$

Здесь уместно сделать два замечания о границах применимости полученных формул. Во-первых, теория становится неточной при расчете излучения на гармонике $n_{\text{кр}} = \pi c_s / r_0\omega$, где r_0 — размер вращающегося тела. При $n = n_{\text{кр}}$ длина волны этого тона становится сравнимой с размерами тела. В этом случае нельзя пользоваться выражением для плотности силы в форме δ-функции (8) для расчета интенсивности $I_{n\,\text{кр}}$; движущееся тело может обладать резонансными свойствами на длине волны, соответствующей $n_{\text{кр}}$. Во-вторых, следует иметь в виду, что рассматривается задача об излучении в свободном, однородном пространстве. Наличие волноводных поверхностей и резонирующих элементов, например в установке вращающей ось $O'O''$, может существенно изменить все характеристики излучения.

Полученные результаты сравнительно легко обобщаются на случай возбуждения звуковых волн вращающимся флюгером. Мы будем рассматривать флюгер простой формы, образованный N шарами или дисками, жестко соединенными горизонтальными стержнями одинаковой длины в точке O с вертикальной осью вращения. Будем называть стержень вместе с шаром или диском лопастью флюгера. При вращении флюгера с N лопастями функция источника будет иметь вид

$$\mathbf{f} = F\frac{\delta(r-a)}{a}\delta(z)\sum_{m=1}^{N}\delta(\varphi-\varphi_m-\omega t)\mathbf{e}_\varphi, \tag{38}$$

где суммирование ведется по всем лопастям N с начальными фазами φ_m. Подставляя выражение (38) в уравнение для плотности ρ (10), можно, пользуясь принципом суперпозиции для линейных уравнений акустики, получить решение в волновой зоне

$$\rho = \frac{F}{4\pi a c_s^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n e^{i(n\gamma-\varphi_m-\pi/2)}}{R}J_n(nM\sin\theta). \tag{39}$$

Аналогично вместо формулы (24) получим

$$v_R = \frac{F}{4\pi a \rho_0 c_s} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nJ_n(nM\sin\theta) \frac{e^{i(n\gamma-\varphi_m-\pi/2)}}{R}. \tag{40}$$

При выводе формул (39) — (40) предполагалось, что лопасти флюгера имеют одинаковую длину a и форму, следовательно, испытывают одинаковую силу сопротивления F.

Определим поле звукового давления в волновой зоне и покажем, что в решении, полученном Гутиным [1], также содержится член, соответствующий флюгерному излучению. Давление p в волновой зоне определяется с помощью соотношений (3) и (39)

$$p = \frac{L}{4\pi a^2 N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{N} nJ_n(nM\sin\theta) \frac{e^{i(n\gamma-\varphi_m-\pi/2)}}{R}, \tag{41}$$

где введен вращательный момент лопастей $L = FNa$. Будем полагать, что лопасти флюгера расположены равномерно в плоскости окружности. Тогда начальная фаза $\varphi_m = 2\pi m / N$. Подставляя это значение в формулу (41) и суммируя по m, получим

$$p = \frac{L}{2\pi a^2 N} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \sin \pi n}{\operatorname{tg} \frac{\pi n}{N}} \right] nJ_n(nM\sin\theta) \frac{e^{i(n\gamma-\pi/2)}}{R}. \tag{42}$$

Фактор в квадратных скобках, обусловленный интерференцией излучения от отдельных лопастей в волновой зоне, равен

$$\frac{(-1)^n \sin n\pi}{\operatorname{tg} \frac{n\pi}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{когда } \frac{n}{N} \text{ не целое число} \\ N, & \text{когда } \frac{n}{N} \text{ целое число} \end{cases}. \tag{43}$$

Таким образом, с учетом условий (43) можно переписать соотношение (42) в виде

$$p = \frac{LN}{2\pi a^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu J_{\nu N}(\nu NM\sin\theta) \frac{e^{i(\nu N\gamma-\pi/2)}}{R}. \tag{44}$$

Это выражение совпадает с формулой для давления p, полученной в работе Гутина [1], если положить силу тяги винта равной нулю (флюгерный режим). Однако в работах [1, 3] вопрос об энергетических характеристиках излучения фактически не рассматривался.

Определим энергетический спектр звукового излучения флюгера. Для этого подставим выражения (39) и (40) в соотношение (25), усредним его по периоду вращения $T = 2\pi / \omega$ с помощью формулы (27) и просуммируем по n'. В результате мы получим следующее выражение для интенсивности излучения:

$$dI = \sum_{n=1}^{\infty} dI_n = \frac{F^2}{8\pi^2 a^2 \rho_0 c_s} \sum_{n=1}^{\infty} S_N n^2 J_n^2(nM\sin\theta)\, d\Omega, \tag{45}$$

где введен фактор когерентности излучения

$$S_N = \sum_{m=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} e^{in(\varphi_m-\varphi_{m'})}, \tag{46}$$

который показывает, как вследствие интерференции изменяется энергия, излучаемая N лопастями, по сравнению с энергией излучения одной лопасти. Предполагая вновь равномерное распределение лопастей по окружности, когда $\varphi_m - \varphi_{m'} = 2\pi(m - m') / N$, можно провести в формуле (46) суммирование по m и m'. В результате мы получим

$$S_N = \frac{\sin^2 n\pi}{\sin^2 \frac{n\pi}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{когда } \frac{n}{N} \text{ не целое число} \\ N^2, & \text{когда } \frac{n}{N} \text{ целое число} \end{cases} \quad (47)$$

Таким образом, на гармониках не кратных числу лопастей излучение отсутствует, а на кратных гармониках оно возрастает в N^2 раз по сравнению с излучением одной лопасти. На этом основании, пользуясь формулой (47), мы получим для спектральной интенсивности излучения флюгера с N лопастями выражение

$$dI_\nu = \frac{F^2N^2}{8\pi^2a^2\rho_0c_s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2N^2J_{\nu N}^2(\nu NM \sin\theta)\, d\Omega. \quad (48)$$

После интегрирования по телесному углу с помощью соотношения (34) мы придем к следующему выражению для энергетического спектра

$$I_\nu = \frac{F^2N^2M^{2\nu N}}{2\pi a^2\rho_0c_s} \frac{(\nu N)^{2(\nu N+1)}}{(2\nu N+1)!}. \quad (49)$$

Здесь I_ν обозначает интенсивность излучения на частоте $\omega_\nu = \nu\omega N_1$. Интенсивность основного тона $\omega_1 = N\omega$ будет

$$I_1 = \frac{F^2N^2M^{2N}}{2\pi a^2\rho_0c_s} \frac{N^{2(N+1)}}{(2N+1)!}. \quad (50)$$

При $N = 1$ формулы (49)—(50) переходят в (35) и (36). Как следует из соотношения (49), интенсивность излучения на первой гармонике $\nu = 1$ быстро падает с ростом числа лопастей. Это обусловлено следующим обстоятельством. Как легко видеть из формул (44) и (48), с ростом числа лопастей флюгер излучает на первом тоне, как мультиполь $2N$ порядка. Если одиночная лопасть излучает в основном как диполь, то уже двухлопастный винт излучает как квадруполь. Если перейти к случаю сплошного кольца $N \to \infty$, точнее тора с внешним радиусом a и внутренним r_0, вращающегося относительно своей оси, то излучения не будет. Из формул (44) и (45) также следует, что в излучении флюгера отсутствует член, соответствующий монопольному источнику. Максимум излучения лежит в плоскости окружности при $\theta = 90°$.

Вновь отметим, что все рассмотрение, проведенное в этом разделе, справедливо при дозвуковых скоростях движения лопастей по окружности. При сверхзвуковом движении требуется специальное рассмотрение задачи об излучении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Я. Гутин. О звуковом поле вращающегося воздушного винта. Ж. техн. физ., 1936, 6, 899—909; О «звуке вращения» воздушного винта. Ж. техн. физ., 1942, 12, 76—85.
2. Д. И. Блохинцев. Акустика неоднородной движущейся среды. М.— Л., Гостехиздат, 1946.
3. Е. А. Непомнящий. Исследование и расчет звука воздушного винта. Тр. ЦИАМ, М., Оборонгиз, 1941.

4. J. F. Embleton. Relation of mechanical power of a propeller to radiated power of the resulting acoustical sources. J. Acoust. Soc. America, 1962, **34**, 862—863.
5. И. А. Александров. О физической природе «звука вращения» гребного винта в режиме кавитации. Акуст. ж., 1962, 8, 34—41.
6. S. Tsakonas, C. G. Chen, W. R. Jacobs. Acoustic radiation of cylindrical bar excited by the field of a ship propeller. J. Acoust. Soc. America, 1964, **36**, 1569—1588.
7. Л. Н. Сретенский. Излучение звука вращающимся диполем, Акуст. ж., 1956, 2, 93—98.
8. Л. А. Чернов. Акустика движущейся среды. Акуст. ж., 1958, 4, 299—305.
9. В. П. Докучаев. К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах. Ж. эксп. и теор. физ., 1962, **43**, 595—604.
10. И. Ф. Краснов. Аэродинамика тел вращения. М., Оборонгиз, 1958.
11. J. M. Robertson, M. E. Clark. The drag of elongated bodies over a wide reynolds number range. J. Aerospace Sci., 1962, **29**, 842—846.
12. И. Снеддон. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
13. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1949.
14. Д. Иваненко, А. Соколов. Классическая теория поля. М.— Л., ГТТИ, 1951.

Н.-и. радиофизический институт
при Горьковском государственном
университете

Поступила в редакцию
24 марта 1964 г.