АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 3

УДК 534.222.2

ВОЛНА СЖАТИЯ, ИЗЛУЧАЕМАЯ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СФЕРОЙ

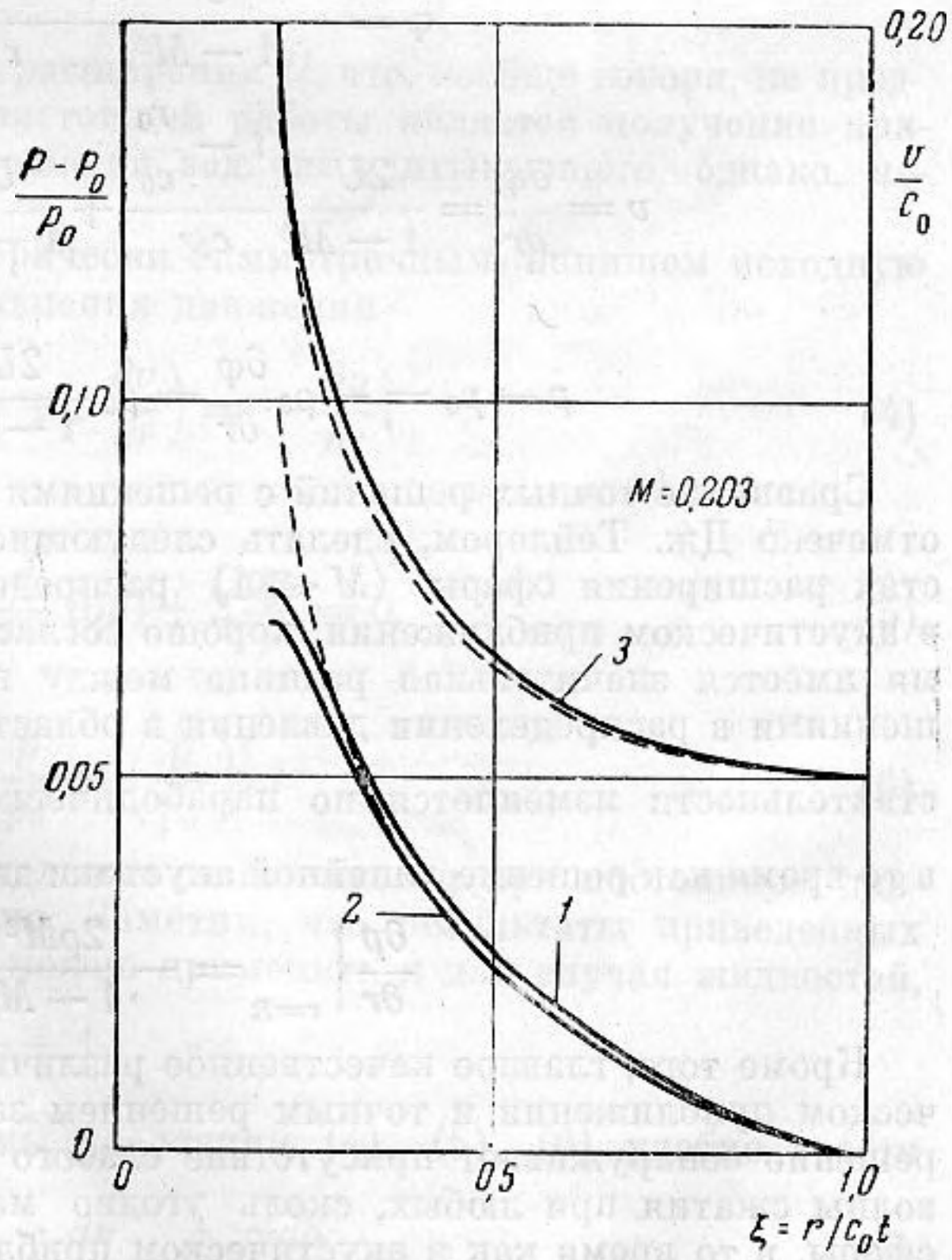
К. А. Наугольных

Рассмотрено излучение волны сжатия сферой, расширяющейся с постоянной скоростью в идеальной среде. С помощью введения сопровождающей системы координат получено приближенное решение задачи, показывающее, что на переднем фронте волны сжатия имеется слабый разрыв при любых, сколь угодно малых скоростях расширения сферы.

Полученное решение сравнивается с результатами Дж. Тейлора, получившего точное решение рассматриваемой задачи методом численного интегрирования автомодельных уравнений.

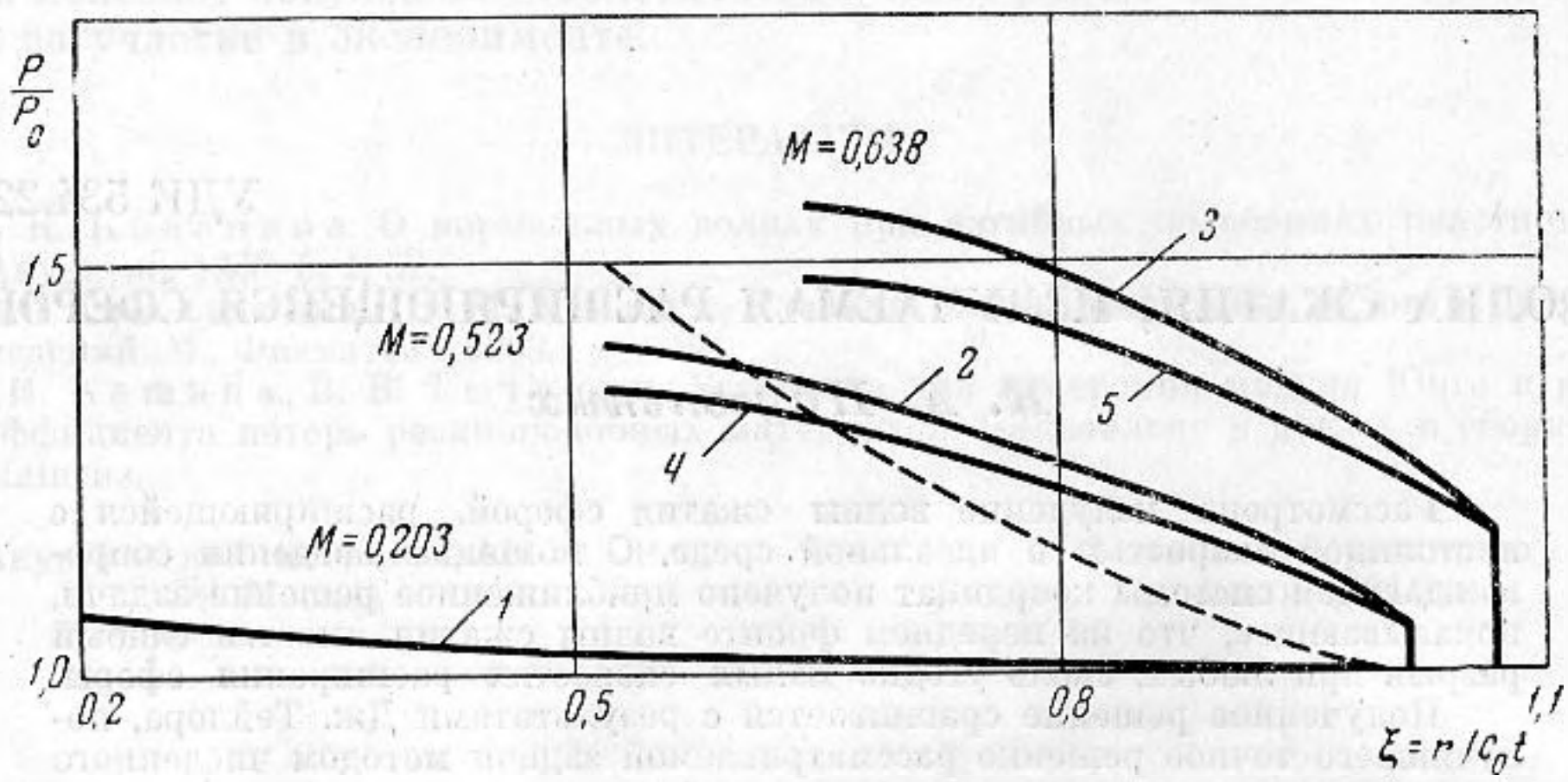
В 1946 г. Дж. Тейлор рассмотрел излучение волны сжатия сферой, расширяющейся с постоянной скоростью в безграничной идеальной среде. Начальный радиус сферы предполагался равным нулю и ее радиус как функция времени описывался формулой $R = Ut$, где $U = \text{const}$. С помощью метода подобия уравнения гидродинамики вместе с адиабатическим уравнением состояния были преобразованы в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая и была проинтегрирована численно для ряда значений U.

Некоторые результаты этих расчетов воспроизведены на фиг. 1, 2, 3. На фиг. 1 показана зависимость избыточного давления $(p - p_0) / p_0$, где p_0 — равновесное давление, и относительной скорости v / c_0, где v — гидродинамическая скорость среды, c_0 — равновесная скорость звука, от безразмерной координаты $\xi = r / c_0 t$, где r — радиальная пространственная координата, t — время для случая, когда $M = U / c_0 = 0{,}203$.



Фиг. 1

Заметим, что координата $\xi = M$ определяет положение сферы. На фиг. 2 и 3 представлены зависимости относительного давления p / p_0 и скорости v / c_0 от ξ для значений $M = 0{,}203$, $0{,}525$, $0{,}638$ (кривые *1*, *2*, *3*). Пунктирными кривыми на этих же фигурах представлены соответственные решения рассматриваемой задачи, полученные в приближении линейной акустики. (Для $M = 0{,}203$ на фиг. 2 и 3 пунктирные кривые совпадают с кривыми *1*.)



Фиг. 2

Аналитически эти решения можно написать в виде [1]

$$\varphi = -\frac{U^3}{1-M^2}\frac{\left(t-\dfrac{r}{c_0}\right)^2}{r}, \tag{1}$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2U^3}{1-M^2}\frac{t-\dfrac{r_0}{c_0}}{c_0 r} + \frac{U^3}{1-M^2}\frac{\left(t-\dfrac{r_0}{c_0}\right)^2}{r^2}, \tag{2}$$

$$p - p_0 = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \rho_0\frac{2U^3}{1-M^2}\frac{t-\dfrac{r_0}{c_0}}{r}. \tag{3}$$

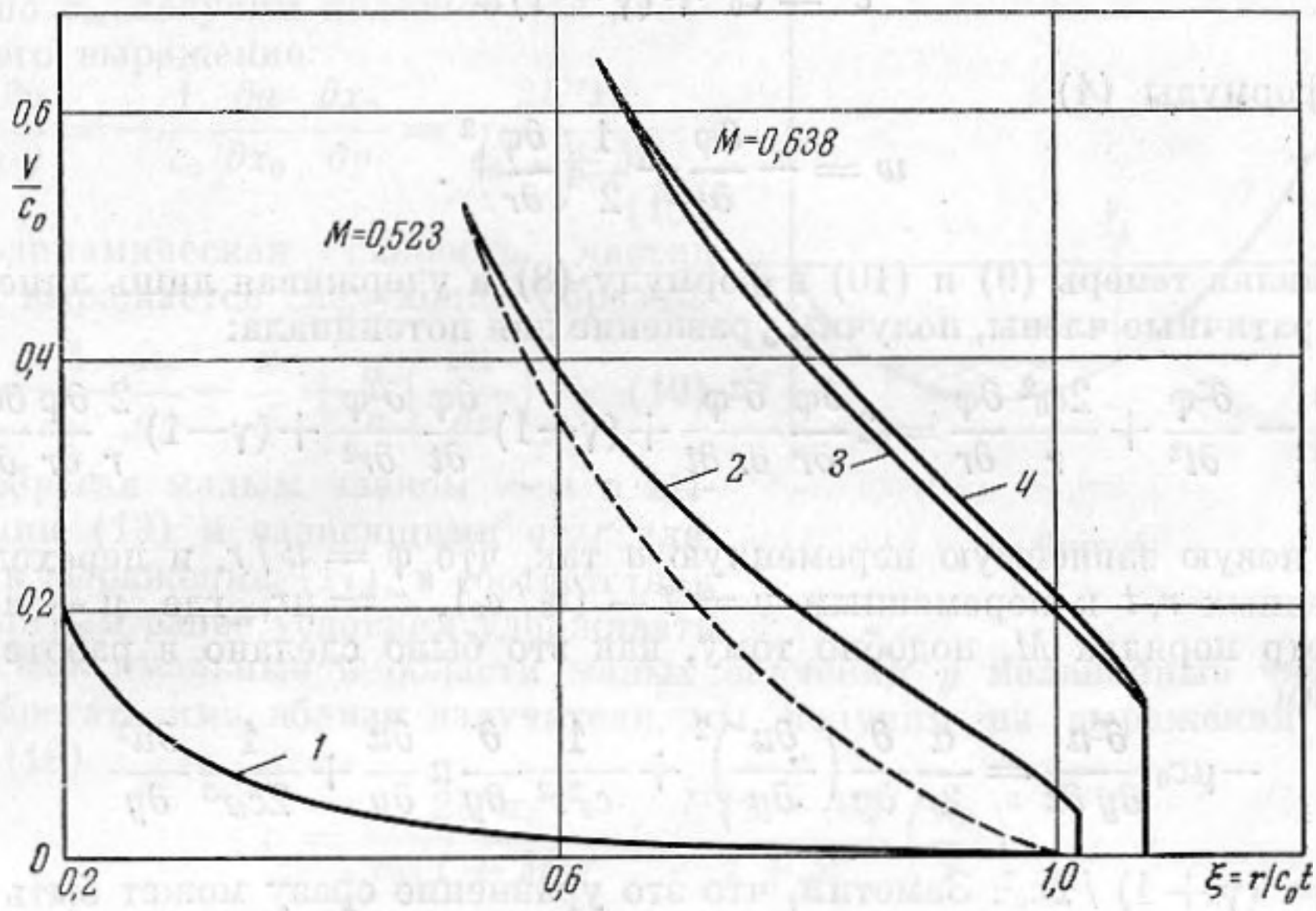
Сравнение точных решений с решениями (2), (3) позволяет, как было отмечено Дж. Тейлером, сделать следующие выводы. При малых скоростях расширения сферы ($M \ll 1$) распределение скорости, полученное в акустическом приближении, хорошо согласуется с точным; в то же время имеется значительная разница между приближенным и точным решениями в распределении давления в области $r \approx R$, где давление в действительности изменяется по параболическому закону и $\left.\dfrac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$, в то время как решение линейной акустики дает

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{2\rho M^2}{1-M^2}\frac{c_0^2}{R}.$$

Кроме того, главное качественное различие между решением в акустическом приближении и точным решением заключается в том, что точное решение обнаруживает присутствие слабого разрыва на переднем фронте волны сжатия при любых, сколь угодно малых, скоростях расширения сферы, в то время как в акустическом приближении ударные волны, естественно, отсутствуют.

Особенно любопытным, как отмечает Дж. Тейлор, является то обстоятельство, что это различие между точным решением и решением в акустическом приближении имеет место в области переднего фронта волны, где избыточные давления и скорости чрезвычайно малы и где поэтому можно было бы ожидать наибольшей применимости акустической теории.

Указанные различия вынуждают пользоваться точным решением, получаемым путем численного интегрирования уравнений, даже при срав-



Фиг. 3

нительно небольших скоростях расширения U, что, вообще говоря, не представляется удобным. Целью настоящей работы является получение приближенного аналитического решения задачи, учитывающего, однако, нелинейные эффекты.

Предполагая движение сферически симметричным, напишем исходную систему уравнений в виде уравнения движения

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{4}$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v)+2\frac{\rho v}{r}=0, \tag{5}$$

уравнения состояния

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \tag{6}$$

Здесь $\gamma = c_p / c_v$, c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, соответственно. Заметим, что результаты приведенных ниже приближенных расчетов можно применить и для случая жидкостей, если принять $\gamma=\left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}\frac{\rho_0}{c_0^2}+1$.

Для преобразования системы уравнений (4), (5), (6) удобно ввести тепловую функцию

$$w=\int\frac{dp}{\rho}=\int\frac{c^2 d\rho}{\rho}, \tag{7}$$

с помощью которой уравнение непрерывности (5) можно написать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t}+c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial w}{qr}+\frac{2c^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0, \tag{8}$$

где φ — потенциал скорости, так что $v=\partial\varphi/\partial r$. Далее, из формул (6) и (7) получим

$$c^2=c_0^2+(\gamma-1)w \tag{9}$$

и из формулы (4)

$$w=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2. \tag{10}$$

Подставляя теперь (9) и (10) в формулу (8) и удерживая лишь линейные и квадратичные члены, получим уравнение для потенциала:

$$c_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{2c_0^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t}+(\gamma-1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+(\gamma-1)\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{11}$$

Вводя новую зависимую переменную u так, что $\varphi=u/r$, и переходя от переменных r, t к переменным $y=t-(r_0/c_0)$, $z=\mu r$, где μ — малый параметр порядка M, подобно тому, как это было сделано в работе [2], получим

$$-\mu c_0\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\alpha}{2r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{c_0^2r^2}\frac{\partial}{\partial y}u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2c_0r^3}\frac{\partial u^2}{\partial y} \tag{12}$$

где $\alpha=(\gamma+1)/2c_0^2$. Заметим, что это уравнение сразу может быть проинтегрировано один раз по y. Учитывая также, что $\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_y=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_y$, получим

$$-\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\alpha}{2c_0r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{c_0^3r^2}u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{u^3}{2c_0^2r^3}+f(r), \tag{13}$$

где $f(r)$ — произвольная функция.

Будучи уравнением 1-го порядка в частных производных, уравнение (13), в принципе, может быть проинтегрировано с помощью стандартных методов. Мы, однако, для упрощения расчетов произведем дальнейшие приближения. Именно, принимая во внимание, что интересующие нас нелинейные эффекты наиболее существенны на переднем фронте волны, в области $y\approx 0$ мы будем удерживать в правой части уравнения (13) лишь максимальный в этой области член, а вместо граничного условия на поверхности сферы потребуем, чтобы решение уравнения (13) переходило в решение (1) линейной акустики при $r=R$. Тогда вместо уравнения (13) мы получим новое уравнение

$$-\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\alpha}{2c_0}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+f(r) \tag{14}$$

с граничным условием

$$u=\frac{U^3y^2}{1-M^2}\quad\text{при}\quad r=R. \tag{15}$$

Решение этого уравнения может быть получено путем применения метода характеристик. В параметрическом виде это решение может быть написано следующим образом:

$$y=-\frac{2\alpha U^2x_0}{c_0(1+M)}\ln\frac{r}{x_0}+\frac{1-M}{U}x_0, \tag{16}$$

$$u = -\frac{Ux_0^2}{1+M}(1-M) + \frac{2\alpha U^4}{c_0}\frac{x_0^2}{(1+M)^2}\ln\frac{r}{x_0} + \frac{\alpha U^4}{c_0(1+M)^2}(r^2 - x_0^2), \quad (17)$$

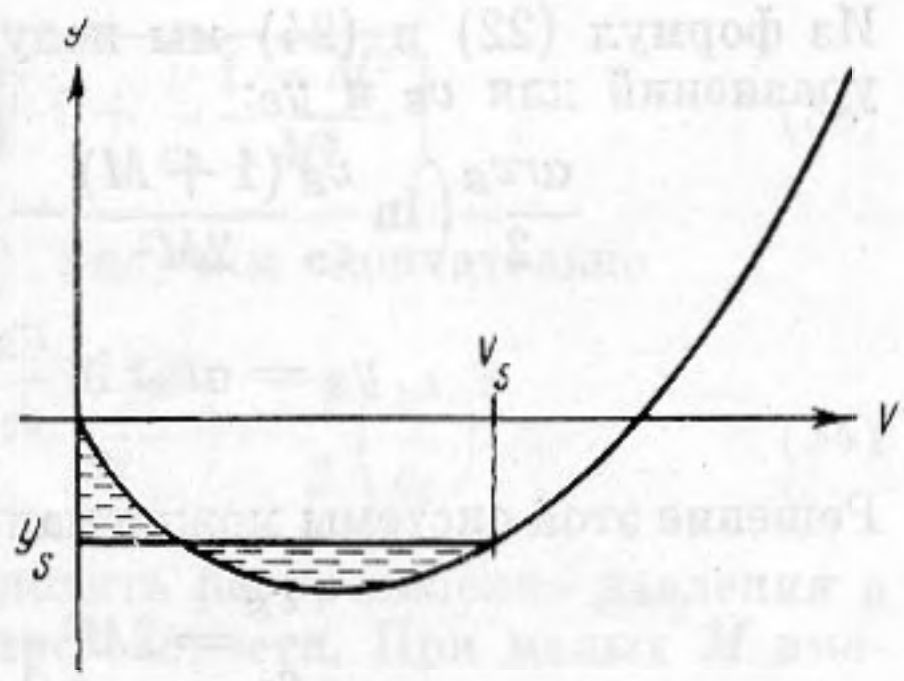
где x_0 — параметр. Заметим, что зависимость y и u от r означает учет нелинейных эффектов. В самом деле, в рамках линейной акустики u была бы функцией только y.

Дифференцируя формулы (16) и (17) по x_0, получим полезное для дальнейшего выражение:

$$-\frac{1}{c_0}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{c_0}\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial y} = \frac{2U^2 x_0}{c_0(1+M)}. \quad (18)$$

Гидродинамическая скорость частиц среды выражается следующим образом:

$$v = -\frac{1}{c_0 r}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{r^2} + \frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_y. \quad (19)$$



Фиг. 4

Пренебрегая малым членом $\sim\mu$ в выражении (19) и зависящими от r членами в выражении (17), в соответствии с принятым ранее условием удерживать лишь максимальные в области малых значений y нелинейные члены и пренебрегать ими вблизи излучателя, мы получим из выражений (17), (18), (19)

$$v = \frac{2U^2 x_0}{c_0(1+M)r} + \frac{U(1-M)}{1+M}\left(\frac{x_0}{r}\right)^2. \quad (20)$$

Формулы (16) и (20) в параметрическом виде представляют решение задачи о распределении скорости в волне сжатия, окружающей сферу. Разрешая формулу (20) относительно x_0 и исключая затем его из формулы (16), получим

$$y = \frac{r}{c_0}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right]\left\{\frac{(\gamma+1)M^3}{1-M^2}\ln\frac{M}{1-M}\times\right.$$
$$\left.\times\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right) + 1\right\}. \quad (21)$$

Проанализируем поведение этого решения при малых значениях y. В этом случае из формулы (21) приближенно следует

$$y \approx \alpha v r \ln\frac{v}{c_0}\frac{1+M}{2M^2} + \frac{1-M^2}{2M^3}\frac{v}{c_0}\frac{r}{c_0}. \quad (22)$$

Как видно из формулы (22), y обращается в нуль не только при $v = 0$, но и при $v = v_2$, где v_2 определяется соотношением

$$\frac{v_2}{c_0} = \frac{2M^2}{1+M}e^{-(1-M^2)/(\gamma+1)M^3} \quad (23)$$

и зависимость $y(v)$ в области малых y имеет вид, изображенный на фиг. 4. Гидродинамическая скорость v как функция y оказывается многозначной, что физически невозможно и означает, как известно (см. [3]) образование разрыва. Его положение и величины y_S и v_S могут быть определены, в рамках рассматриваемого приближения, из условия равенства заштрихованных площадей на фиг. 4, выражающего сохранение потоков массы, импульса и энергии на разрыве [3]. Аналитически это условие может быть выра-

жено соотношением:

$$I(v_S) = y_S v_S, \tag{24}$$

где

$$I(v_S) = \int_0^{v_S} y(v)\,dv.$$

Из формул (22) и (24) мы получим, таким образом, следующую систему уравнений для v_S и y_S:

$$\begin{gathered}\frac{\alpha r v_S}{2}\left(\ln\frac{v_S}{c_0}\frac{(1+M)}{2M^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1-M^2}{4}\frac{r v_S}{M^3 c_0^2}=y_S,\\ y_S=\alpha v_S r\ln\frac{v_S}{c_0}\frac{1+M}{2M^2}+\frac{1-M^2}{2M^3}\frac{v_S r}{c_0^2}.\end{gathered} \tag{25}$$

Решение этой системы можно написать следующим образом:

$$\frac{v_S}{c_0}=2M^2\frac{e^{-1/2}}{1+M}e^{-(1-M^2)/(\gamma+1)1/M^3}, \tag{26}$$

$$y_S=-\frac{\alpha v_S r}{2}, \tag{27}$$

в согласии с [4].

Заметим, что, как видно из формулы (26), величина разрыва v_S не зависит от r, т. е. интенсивность ударной волны остается постоянной по мере распространения волны, что является следствием автомодельности движения.

Итак, при заданной скорости расширения сферы распределение гидродинамической скорости в излучаемой сферой волне сжатия описывается формулой (26), дающей величину разрыва на переднем фронте волны, формулой (27), которую удобнее переписать в виде

$$\xi_S=\frac{1}{1-\frac{\gamma+1}{4}\frac{v_S}{c_0}},\qquad \xi=\frac{r}{c_0 t}, \tag{28}$$

определяющей положение разрыва, и формулой (21), принимающей в терминах ξ следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\xi}-1=\left[-1+\sqrt{1+\frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right]\times\\ \times\left\{\frac{(\gamma+1)M^3}{1-M^2}\ln\frac{M}{1-M}\left(-1+\sqrt{1+\frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right)+1\right\}.\end{gathered} \tag{29}$$

Построенные по этим формулам графики для $M = 0{,}203$, $0{,}523$, $0{,}638$ показаны на фиг. 1 (кривая *3*) и на фиг. 3 (кривые *1*, *2*, *4*). Как видно, даже при значениях малого параметра задачи M не слишком малых по сравнению с единицей, согласие приближенного и точного решений достаточно хорошее, а при $M = 0{,}203$ они совпадают в пределах точности используемого масштаба.

Перейдем к расчету распределения давления. Записывая уравнение состояния в виде

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{c^2}{c_0^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{30}$$

и используя формулы (9), получим

$$\frac{p}{p_0}=\left[1+\frac{\gamma-1}{c_0^2}w\right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{31}$$

где, в соответствии с формулой (10)

$$w = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v^2}{2}. \tag{32}$$

Далее, из формулы (20) мы имеем

$$x_0 = \frac{Ur}{c_0(1-M)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right] \tag{33}$$

и, принимая во внимание выражение (18), получим окончательно

$$\frac{w}{c_0^2} = \frac{2M^3}{1-M^2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c_0}\right)^2. \tag{34}$$

Формулы (31) и (34) позволяют вычислить распределение давления в волне сжатия, если известно распределение скорости. При малых M вместо формулы (31) можно пользоваться приближенной формулой, которая, с учетом выражения (34), приводит к следующему соотношению

$$\frac{p}{p_0} = 1+\gamma\left[\frac{2M^3}{1-M^2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{v}{c_0}\frac{1-M^2}{M^3}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c_0}\right)^2\right]. \tag{35}$$

При $r = R$, как нетрудно убедиться, $\partial p / \partial r = 0$. Это означает, что ускорение прилегающих к сфере частиц среды равно нулю, как это и должно быть при постоянной скорости ее расширения.

Графики распределения давления в волне сжатия для $M = 0{,}203$, $0{,}523$, $0{,}638$ показаны на фиг. 1 (кривая *2*) и фиг. 2 (кривые *1*, *4*, *5*). Как видно, согласие приближенного и точного решений, будучи хорошим в области переднего фронта волны, ухудшается с уменьшением ξ. Вызвано это пренебрежением 2 и 3 нелинейных членов в уравнении (13). Члены эти несущественны в области $\xi \approx 1$, но с уменьшением ξ их роль возрастает.

Необходимо сделать следующее замечание в связи с вычислением распределения давления. Как видно из фиг. 1, распределение скорости, полученное в приближении линейной акустики, хорошо согласуется с результатами точного расчета при небольших M, в то время как «акустическое» распределение давления вблизи сферы заметно отличается от истинного. Это происходит потому, что при вычислении давления по формуле линейной акустики

$$p - p_0 = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{36}$$

не учитывается конвективный член уравнения (4). Этот член, будучи вдали от излучателя малой величиной второго порядка малости по M, по сравнению с членом $\partial v / \partial t$ становится сравнимым с этим членом в области $r \approx R$ при любых, сколь угодно малых скоростях расширения сферы.

Однако, благодаря тому, что волновое уравнение в области $r \approx R \ll c_0 t$ вырождается в уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$, являющееся следствием одного лишь уравнения непрерывности, можно учесть конвективный член уравнения (4) при вычислении давления и использовать вместо (36) формулу

$$p - p_0 = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho_0\frac{v^2}{2}, \tag{37}$$

не учитывая при этом нелинейных членов при вычислении потенциала.

Именно это обстоятельство позволило нам вычислить давление по формуле (37) во всей области пространства, в том числе вблизи сферы, не-

смотря на то, что при вычислении потенциала скорости нелинейные эффекты учитывались лишь на переднем фронте волны.

В заключение выражаю благодарность проф. Р. Т. Бейеру и проф. П. Дж. Вестервельту за стимулирующие дискуссии и помощь в работе.

Институт радиоэлектроники
и горной электромеханики
Москва

Поступила в редакцию
12 апреля 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. I. Taylor. The air wave surrounding an expanding sphere. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1946, 186, 273—292.
2. К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж., 1963, 9, 1, 54—60.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1954.
4. R. Whitham. On the propagation of weak shock waves. Fluid., mech., 1956, 2, 1, 303—315.