АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 1

УДК 534.2

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗ И РЕФЛЕКТОРА

И. Н. Каневский

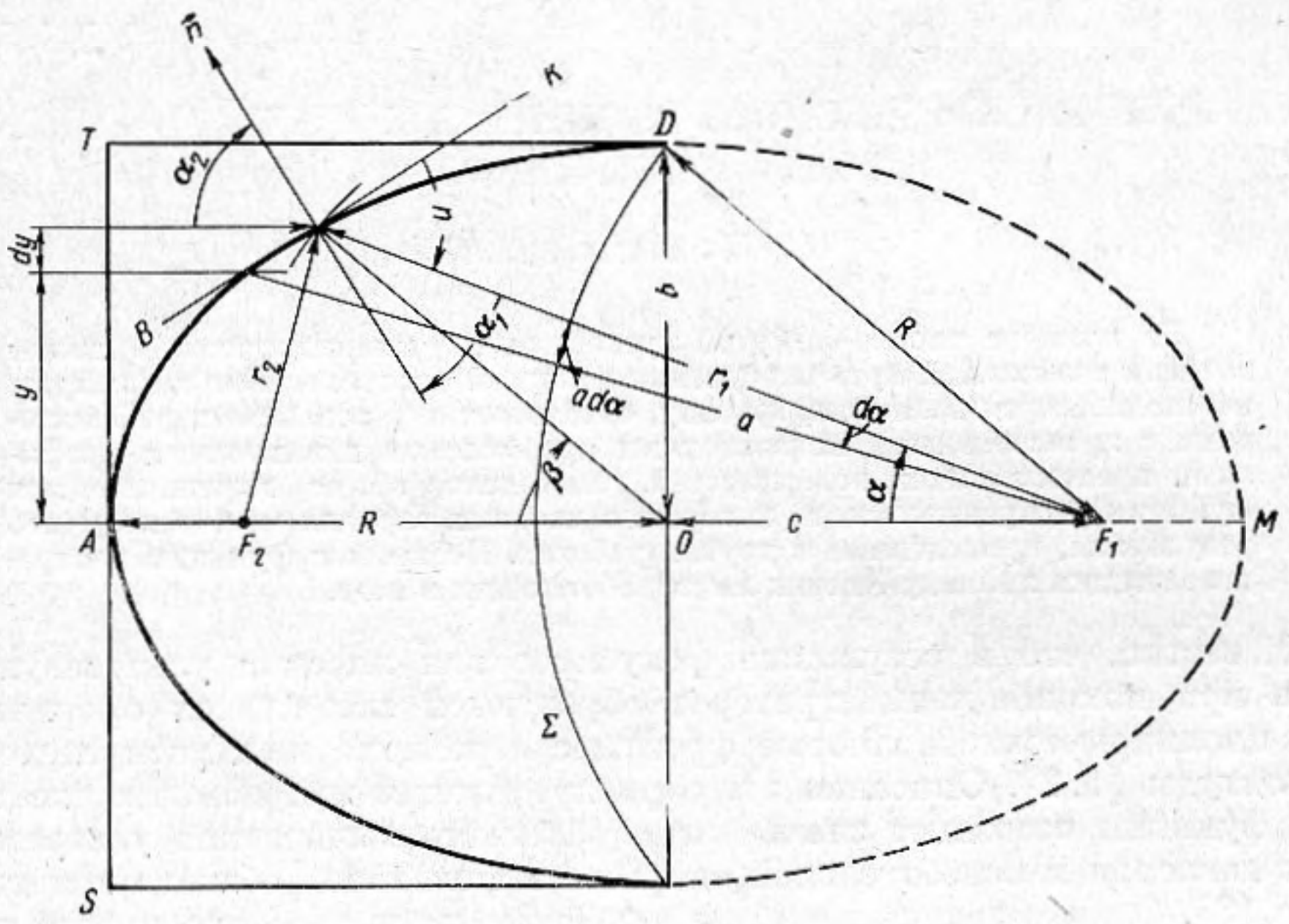
На примере плоско-вогнутой ускоряющей цилиндрической линзы показан возможный путь построения функций распределения амплитуды по сходящемуся волновому фронту, образованному реальными рефракторами с произвольными показателями преломления и заданными профилями преломляющих поверхностей. Выведено общее выражение для функции распределения, из которого в частных случаях можно получить результаты, приведенные в других работах. Построены функции распределения для цилиндрических линз, работающих в воде.

Известно, что в результате фокусирования плоских ультразвуковых волн при помощи концентраторов образуются сходящиеся сферические или цилиндрические волновые фронты с неравномерным распределением амплитуды [1, 2]. Описание этого распределения при помощи специальной функции позволяет значительно облегчить вычисление ультразвукового давления и колебательной скорости в фокальной области концентратора [3]. Однако задача введения такой функции довольно просто решается только для рефлекторных систем. Для рефракторов, даже таких простых, как плоско-вогнутая линза, функции распределения строятся приближенно. Это объясняется тем, что при выводе функции распределения для рефрактора необходимо учитывать изменение амплитуды по волновому фронту, происходящее как вследствие прохождения границ раздела различных сред, так и вследствие изменения сечения энергетических трубок при трансформации волнового фронта. Поэтому функция распределения зависит от показателя преломления на преломляющих границах раздела и от отношения волновых сопротивлений сред, лежащих по разные стороны от границ раздела. Следовательно, для рефракторов нельзя вывести универсальную функцию распределения, зависящую только от геометрии фокусирующей системы; функции распределения рефракторов необходимо строить для конкретных систем с учетом акустических свойств материалов преломляющих поверхностей и контактной или имерсионной сред. Напротив, в рефлекторных системах можно ввести — в указанном выше смысле — универсальную функцию распределения. Это объясняется тем, что в рефлекторах коэффициенты отражения на границах раздела сред практически равны единице, и при выводе функции распределения нужно учитывать только изменение сечения энергетических трубок при трансформации волнового фронта.

В работе [1] получена функция распределения для осесимметричной линзы с учетом коэффициентов прохождения энергии волны через границы раздела и изменения сечения энергетических трубок. Однако при выводе предполагается, что показатель преломления настолько мал, что преломляющую поверхность можно считать сферической. В работе [4] получена функция распределения для осесимметричной плоско-вогнутой ускоряющей линзы с учетом того, что преломляющая поверхность явля-

ется эллипсоидом; однако при выводе предполагается, что линза совершенно прозрачна, а показатель преломления мал. При этих же ограничениях в работе [2] выведена функция распределения для цилиндрической плоско-эллиптической ускоряющей линзы.

В настоящей статье намечен путь получения функций распределения для реальных рефракторных систем с любыми показателями преломления и заданными профилями преломляющих поверхностей. При рассмотрении этого вопроса, как и в предшествующих работах [1, 2, 4], предполагается, что длина ультразвуковой волны мала по сравнению с линейными



Фиг. 1

размерами системы и, следовательно, применимы приближения геометрической акустики. Кроме того, как и в работе [1], не будут учитываться многократные отражения ультразвуковой волны и ее поглощение, возможные внутри рефракторных систем.

Вывод функции распределения мы рассмотрим на примере плоско-вогнутой ускоряющей цилиндрической линзы. При этом, как и в работе [1], примем во внимание изменения амплитуды прошедшей волны вследствие отражения на плоской и преломляющей границах раздела и изменения сечения энергетической трубки.

Если на плоскую границу линзы TS (см. фиг. 1) слева падает ультразвуковая волна, то коэффициент прохождения энергии через эту границу равен

$$\Psi_1^2 = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2},$$

где z_1 и z_2 — волновые сопротивления среды и материала линзы соответственно. Так как коэффициент прохождения ультразвуковой энергии характеризуется отношением волновых сопротивлений сред, лежащих по разные стороны от границы раздела, то удобно ввести величину $q = z_1 / z_2$. Тогда

$$\Psi_1 = \frac{2\sqrt{q}}{(1+q)}. \qquad (1)$$

Вычислим теперь коэффициент прохождения через преломляющую границу раздела. Как известно, общее выражение для коэффициента прохождения энергии преломленной волны имеет вид

$$\Psi_2^2 = \frac{4z_1z_2 \cdot \cos\alpha_2}{(z_1\cos\alpha_2 + z_2\cos\alpha_1)^2}, \tag{2}$$

где α_1 и α_2 — углы падения и преломления. Эти углы показаны на фиг. 1. Выразим их через углы α (между радиус-вектором r_1 и большой осью AM) и u (между r_1 и касательной BK): $\alpha_1 = \pi/2 - u$; $\alpha_2 = \pi/2 - u - \alpha$. Подставив эти значения α_1 и α_2 в выражение (2) и введя величину $q = z_1/z_2$, получим

$$\Psi_2(\alpha) = \frac{2\sqrt{q}\sin(u-\alpha)}{\sin u + q\sin(u-\alpha)}. \tag{3}$$

В этом выражении угол u является функцией угла α: $u = u(\alpha)$. Установим вид этой зависимости, для чего воспользуемся выражением, связывающим угол u с элементами эллипса:

$$\sin^3 u = \frac{RbP}{(r_1r_2)^{3/2}}, \tag{4}$$

где $R = AO$ — большая, $b = OD$ — малая полуось эллипса, $p = b^2/R$ — параметр эллипса, $c = OF_1$ — расстояние между центром и фокусом эллипса (см. фиг. 1). Как показано в работе [1],

$$R = f(1+N), \tag{5а}$$

$$b = f\sqrt{\frac{1-N}{1+N}}, \tag{5б}$$

$$f = c + R, \quad \varepsilon = N, \tag{5в}$$

где N — показатель преломления, f — фокусное расстояние, ε — эксцентриситет. Воспользовавшись уравнением эллипса в полярных координатах

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\alpha} \tag{6}$$

(ρ — радиус-вектор с полюсом в фокусе), получим при помощи формул (5) следующие выражения:

$$\rho = r_1 = \frac{R(1-N^2)}{1-N\cos\alpha}, \tag{7а}$$

$$r_2 = \frac{R(1-N^2)}{1-N\cos(2u-\alpha)}, \tag{7б}$$

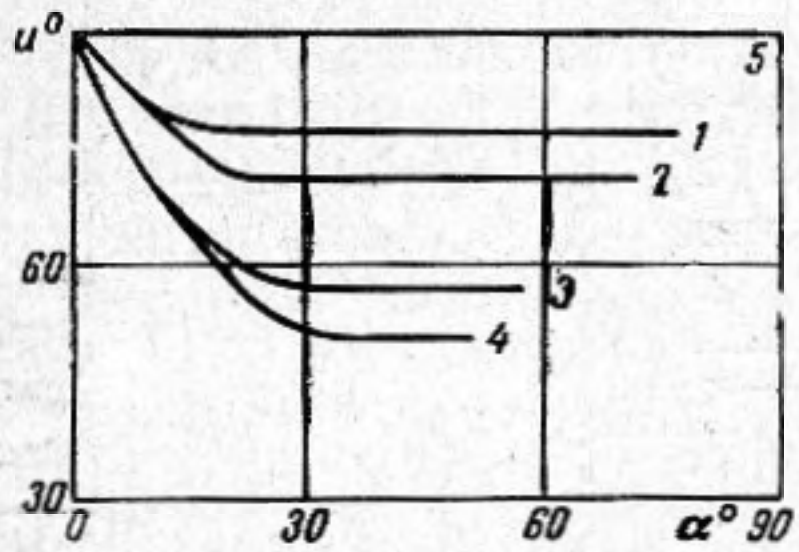
$$b^2 = R^2(1-N^2). \tag{7в}$$

Подставив выражения (7) в формулу (4), получим соотношение, связывающее углы u и α:

$$\sin^2 u = \frac{(1-N\cos\alpha)[1-N\cos(2u-\alpha)]}{1-N^2}. \tag{8}$$

Если в этом выражении считать α и N параметрами, то его можно рассматривать как трансцендентное уравнение относительно u. Задаваясь фиксированными значениями N и изменяя α в пределах от нуля до величины угла раскрытия волнового фронта, можно графически найти величины u, получив, таким образом, интересующую нас зависимость $u = u(\alpha)$ при $N = \text{const}$.

Зададимся теперь численными значениями величин N и q. Для этого выберем для линз четыре материала с разными акустическими свойствами: алюминий, латунь, плексиглас и полистирол. Предположим, что линзы из этих материалов работают в воде, в которой скорость распространения ультразвуковых волн равна $v = 1{,}43 \cdot 10^5$ *см/сек*, а волновое сопротивление $z_2 = 1{,}43 \cdot 10^5$ *ом·см*. Величины v, z_1, N и q представлены в таблице.



Фиг. 2

На фиг. 2 показана зависимость $u = u(\alpha)$; цифры у кривых на этом и последующих графиках соответствуют номерам материалов в таблице. Из графиков видно, что угол u изменяется быстро только при малых значениях α; при $\alpha > 30°$ для всех кривых $u = \text{const}$. С увеличением N возрастает как величина $du / d\alpha$, так и интервал значений α, в котором $u \neq \text{const}$. Иными словами, при малой величине N зависимость u от α слабая, угол u близок к $\pi / 2$ и эллиптическая поверхность линзы мало отличается от круговой. Это отличие совсем исчезает при $N = 0$; тогда угол $u = \pi / 2$ при любых значениях α, что показано на фиг. 2 прямой *5*.

Рассмотрим теперь изменение амплитуды, обусловленное различными сечениями энергетических трубок в падающей плоской и преломленной цилиндрической волнах. Как уже указывалось выше, для цилиндрических линз этот вопрос рассмотрен в работе [2], результатами которой мы воспользуемся.

№№ п/п	Материал линзы	$v \cdot 10^{-5}$, *см/сек*	$z_1 \cdot 10^{-5}$, *ом·см.*	N	q
1	Алюминий	6,32	13,70	0,23	0,104
2	Латунь	4,43	40,40	0,32	0,035
3	Плексиглас	2,63	3,14	0,54	0,455
4	Полистирол	2,35	2,49	0,61	0,574

Если падающая плоская волна состоит из элементарных энергетических трубок сечением dy (см. фиг. 1), то преобразованная волна, в данном случае — преломленная *, образует на некоторой круговой поверхности Σ с центром в геометрическом фокусе энергетическую трубку сечением $ad\alpha$ (a — радиус кривизны поверхности Σ). Так как сечения трубок обратно пропорциональны интенсивностям ультразвука, то для функции распределения амплитуды — в соответствии с определением, приведенным в работе [2] — получим выражение:

$$\Psi_3(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{a}\,\frac{dy}{d\alpha}}.$$

В нашем случае $y = \rho \sin \alpha$ (см. фиг. 1), поэтому

$$\Psi_3(\alpha) = \left[\frac{1}{a}\,\frac{d\rho}{d\alpha}\sin\alpha + \frac{\rho}{a}\cos\alpha\right]^{1/2}. \qquad (9)$$

Полученная функция распределения справедлива для любых концентраторов, преобразующих плоскую волну в цилиндрическую. В конкретных случаях нужно рационально выбрать величину радиуса кривизны a поверхности Σ, по которой производится интегрирование при вычислении потенциала сходящейся волны [4]. Для сходящегося волнового фронта, образованного плоско-эллиптической линзой мы примем $a = DF_1$ (см. фиг. 1), т. к. тогда вычисленные функции распределения $\Psi_3(\alpha)$ будут спра-

* Приведенный метод вывода функции распределения справедлив и для цилиндрического рефлектора, если падающую слева плоскую волну на фиг. 1 заменить волной, падающей справа, а поверхность Σ считать отражающей.

ведливы для линз с любым центральным углом $\beta \leqslant \pi / 2$ *. Определим величину $a = DF_1$. Из фиг. 1 следует, что $DF_1 = \sqrt{OD^2 + OF_1^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$; из выражений (5а) и (5в) мы получаем величину $c = NR$. Подставив эту величину и значение b из формулы (7в) в предыдущее выражение, получим $a = R$, т. е. величина радиуса кривизны вспомогательной поверхности Σ совпадает с величиной большой полуоси эллиптической преломляющей поверхности.

Подставив в выражение (9) значения ρ из формулы (7а) и $a = R$, получим

$$\Psi_3(\alpha) = \frac{\sqrt{(1 - N^2)(\cos\alpha - N)}}{1 - N\cos\alpha}. \tag{10}$$

Теперь получим функцию распределения для плоско-эллиптической линзы, выведенную в работе [4]. При помощи формул (5а) и (7а) можно представить уравнение эллиптической поверхности в виде

$$\rho = \frac{f(1 - N)}{1 - N\cos\alpha}. \tag{11}$$

Из формулы (5а) следует, что при малом значении N величина $R \approx f$. Подставив в формулу (9) значение $a = f$ и выражение (11), получим

$$\Psi_3(\alpha) = \frac{\sqrt{(1 - N)(\cos\alpha - N)}}{1 - N\cos\alpha}, \tag{12}$$

что совпадает с выражением, полученным в работе [4]. Как уже указывалось ранее, оно справедливо при малых значениях N. Если $N = 0$, то

$$\Psi_3(\alpha) = \sqrt{\cos\alpha}. \tag{13}$$

Это предельное выражение является общим для плоско-эллиптических (цилиндрических и осесимметричных) ускоряющих линз. Оно использовано в работе [3] для вычисления потенциала в фокальной области цилиндрической линзы с малым показателем преломления.

На фиг. 3 показаны функции распределения, построенные при помощи выражения (12) для материалов, а следовательно, и значений N, приведенных в таблице. Кривая *5* построена по формуле (13) для $N = 0$.

Получим теперь функцию распределения, учитывающую как коэффициенты прохождения энергии через границы раздела, так и изменение сечения энергетических трубок. Для этого достаточно перемножить выражения (1), (3) и (11); тогда

$$\Psi(\alpha) = \frac{4q}{1 + q}\,\frac{\sqrt{(1 - N^2)(\cos\alpha - N)\sin(u - \alpha)}}{(1 - N\cos\alpha)[q\sin(u - \alpha) + \sin u]}. \tag{14}$$

На фиг. 4 показаны графики функций распределения, построенные при помощи общего выражения (14). Из графиков видно, что с ростом N и q неравномерность распределения амплитуды по волновому фронту увеличивается. Сравнение графиков фиг. 4 и 3 показывает, что учет коэффициента прохождения ультразвуковой энергии при построении функции распределения может играть существенную роль.

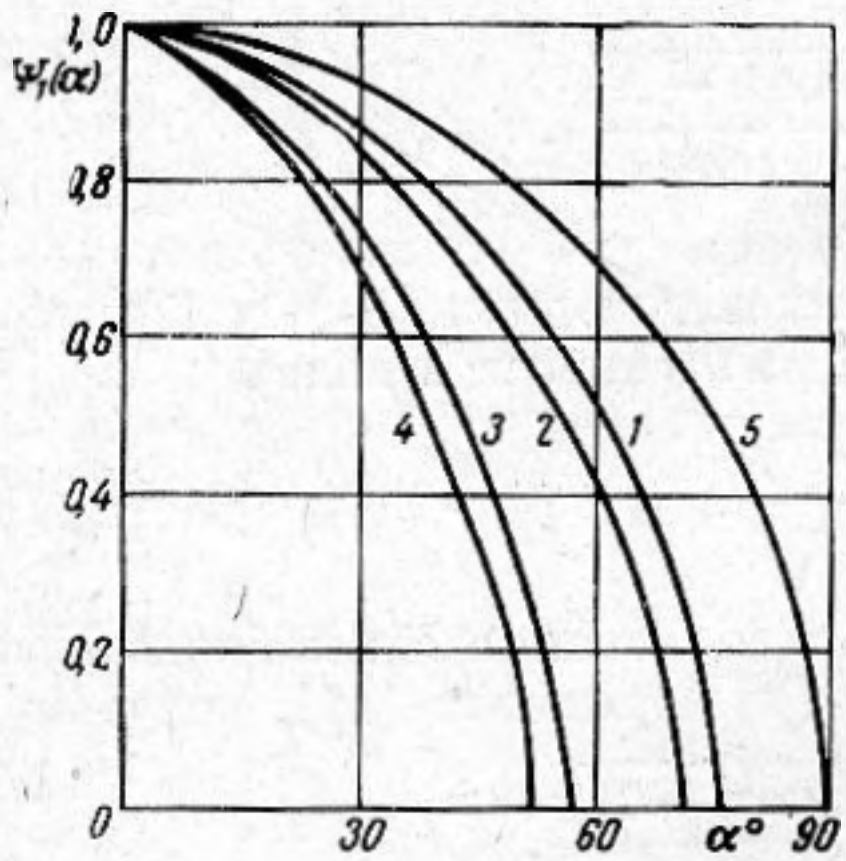
Получим из общего выражения (14) формулы, применяемые в некоторых частных случаях. Для линзы с круговой преломляющей поверхностью $N = 0$, $u = \pi / 2$; тогда из выражения (14) получим

$$\Psi(\alpha) = \frac{4q}{1 + q}\,\frac{\cos\alpha}{1 + q\cos\alpha}, \tag{15}$$

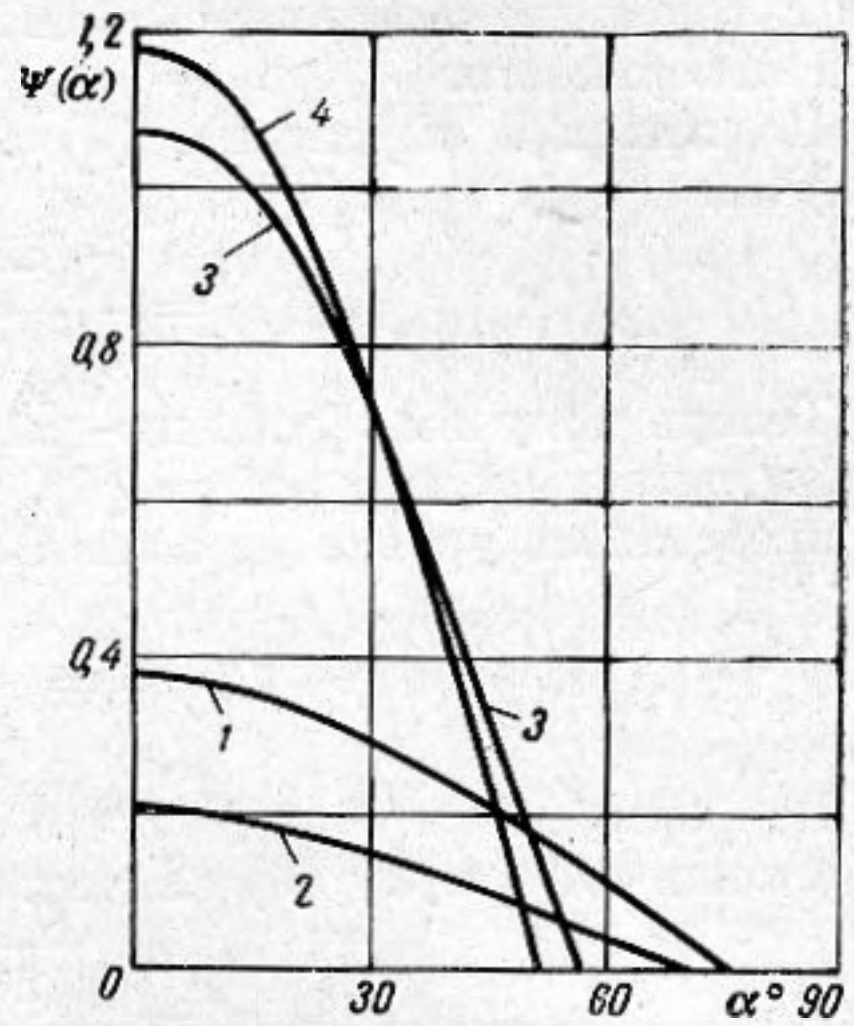
---

* Как показано в работе [2], для рефлектора в форме параболического цилиндра радиус кривизны поверхности Σ совпадает с фокусным расстоянием, т. е. $a = f$.

что совпадает с выражением (6.36а) работы [1], выведенным для сферической плоско-вогнутой линзы. Следовательно, для цилиндрических и сферических линз, изготовленных из материалов, в которых скорость распространения ультразвуковых волн бесконечно велика, функции распределе-

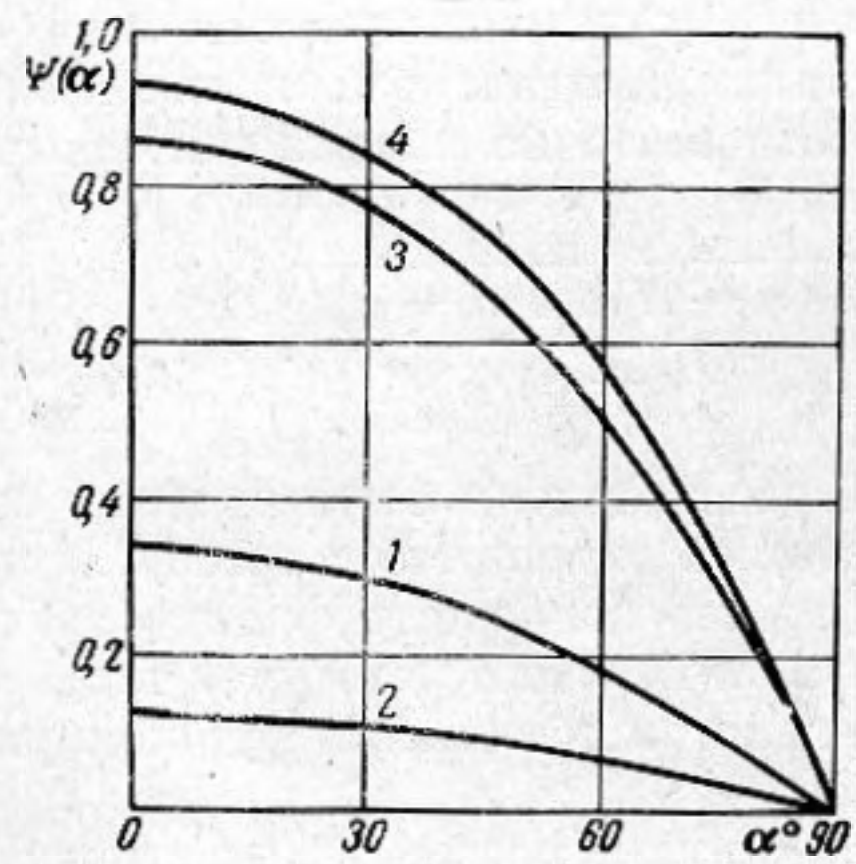


Фиг. 3

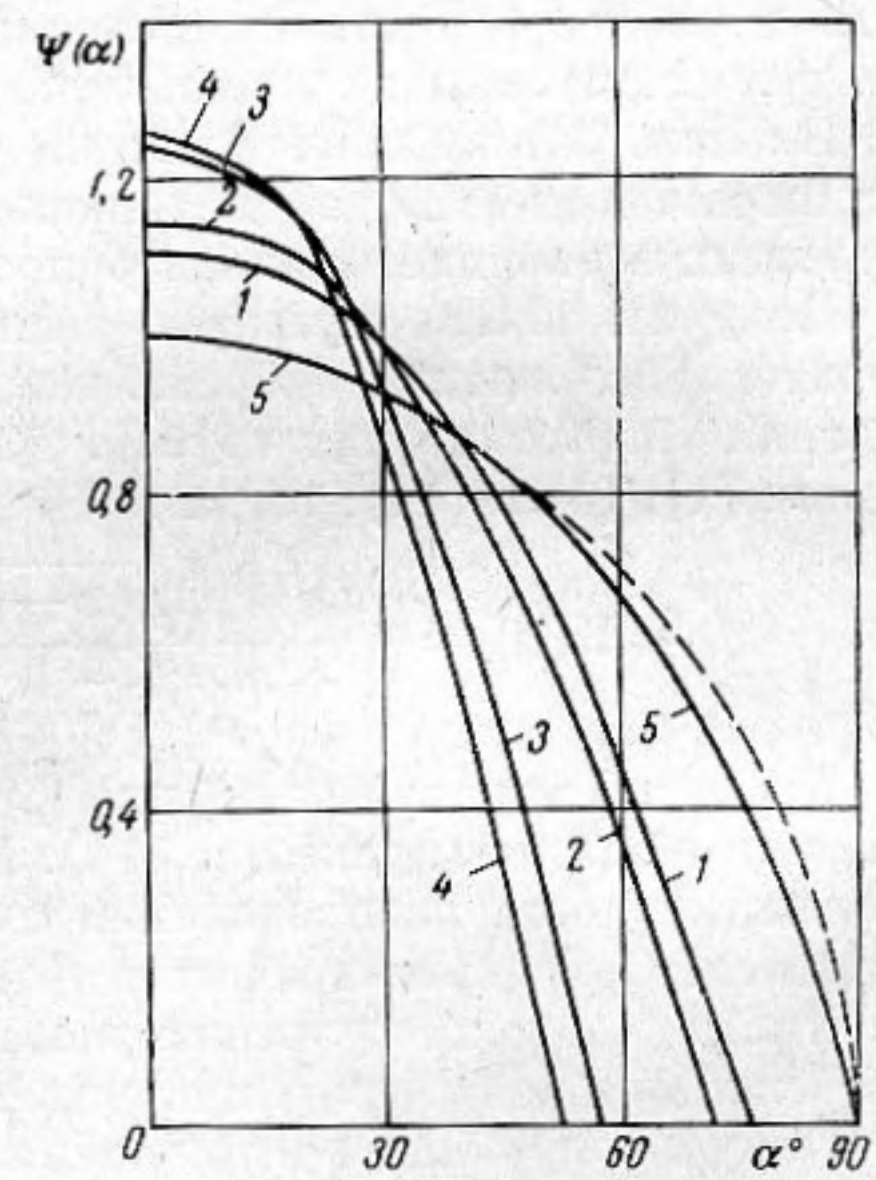


Фиг. 4

ния амплитуды одинаковы. Это означает, что при малых значениях N выражение (15) можно применять как к осесимметричным, так и к цилиндрическим линзам. При этом следует подчеркнуть, что выражение (14) к осесимметричным линзам не применимо.



Фиг. 5



Фиг. 6

Функции распределения, построенные при помощи формулы (15), показаны на фиг. 5. Обращает на себя внимание тот факт, что для круговых линз с нулевым показателем преломления угол раскрытия волнового фронта может достигать $\pi / 2$. Неравномерность распределения амплитуды, как и в предыдущем случае, уменьшается с ростом q.

Если волновые сопротивления линзы и среды одинаковы, то $q = 1$ и выражение (14) приобретает вид

$$\Psi(\alpha) = 2\frac{\sqrt{(1-N^2)(\cos\alpha - N)\sin(u-\alpha)}}{(1-N\cos\alpha)[\sin(u-\alpha)+\sin u]}. \qquad (16)$$

Это выражение может иметь непосредственное практическое значение в случае применения ультразвуковых линз с переходными слоями, увеличивающими коэффициент прохождения ультразвуковой энергии почти до единицы [5] *. Если линза «просветлена» и ее показатель преломления мал, то считая $q \approx 1$, $N = 0$, из выражения (14) получим

$$\Psi(\alpha) = \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (17)$$

На фиг. 6 показаны функции распределения для ультразвуковых линз с «просветляющими» слоями, причем кривые *1—4* построены по формуле (16), а кривая *5* — по формуле (17). Основные закономерности, наблюдаемые на этом графике при изменении N, такие же, как на фиг. 4. Штриховой линией на фиг. 6 показана функция распределения, построенная по формуле (13). Как видно, она очень близка к функции распределения, построенной по формуле (17) и, следовательно, применима для цилиндрических и осесимметричных линз с «просветленными» поверхностями и малым показателем преломления.

В заключение следует отметить, что рассмотренный путь построения функций распределения для цилиндрических плоско-вогнутых ускоряющих линз применим для линз с любой конфигурацией преломляющих поверхностей (например, двояко-вогнутых, плоско-выпуклых и т. п.), независимо от того, является ли линза цилиндрической или осесимметричной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Розенберг. Звуковые фокусирующие системы. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949.
2. Л. Д. Розенберг. Расчет усиления звуковых цилиндрических фокусирующих систем. Акуст. ж., 1955, **1**, 1, 70—77.
3. И. Н. Каневский, Л. Д. Розенберг. Расчет звукового поля в фокальной области цилиндрической фокусирующей системы. Акуст. ж., 1957, **3**, 1, 46—61.
4. Л. Д. Розенберг. Плоско-эллиптические звуковые линзы. Тр. Комисс. по акустике АН СССР, 1950, 5, 114—119.
5. Б. Д. Тартаковский. Звуковые переходные слои. Докл. АН СССР, 1950, **75**, 1, 29—32.

Государственный
н.-и. и проектный институт
редкометаллической промышленности
Москва

Поступила в редакцию
23 марта 1964 г.

---

* В оптике такие переходные слои называют просветляющими. Так как этот термин часто применяют и в акустике, то мы им пользуемся для краткости.