АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 1

УДК 534.1:532.137

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЯЗКОСТИ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ЗОНДОВ

В. Н. Крутин, И. Б. Смирницкий

Получены зависимости основных колебательных характеристик стержневого зонда вискозиметра в режиме вынужденных продольных и крутильных колебаний в ньютоновской жидкости от вязкости и плотности последней, плотности материала, модуля упругости и коэффициента внутренних потерь в материале стержня, конфигурации поперечного сечения стержня и частоты вынужденных колебаний. Введено понятие коэффициента демпфирования, которым определяется влияние вязкости жидкости на колебательные характеристики зонда. Получены формулы для оценки погрешности методов измерения вязкости, основанных на измерении скорости распространения волны в стержне, коэффициента поглощения и добротности. Приведены рекомендации по выбору коэффициента демпфирования.

В настоящее время для измерения вязкости жидкостей находят применение приборы (вискозиметры) с колеблющимся стержнем — зондом. При погружении зонда в жидкость изменяются его колебательные характеристики; измеряя их, можно определить вязкость окружающей зонд жидкости.

Рассмотрим стержень постоянного сечения, окруженный смачивающей его безграничной средой. Пользуясь вторым законом Ньютона и пренебрегая деформацией поперечных сечений стержня, мы приходим к уравнению для гармонических продольных колебаний стержня в среде, справедливому для малых амплитуд:

$$E\frac{d^2u(x)}{dx^2}+(\rho\omega^2-i\omega hZ)\,u(x)=0. \qquad (1)$$

В этом уравнении x — текущая координата вдоль оси стержня, $u(x)$ — амплитуда смещения сечения x от положения равновесия, ρ — плотность материала стержня, E — модуль Юнга материала стержня, Z — волновое сопротивление среды для поперечных волн, ω — круговая частота вынужденных гармонических колебаний, h — отношение длины линии соприкосновения поперечного сечения стержня с жидкостью к площади этого сечения.

При тех же предположениях, пользуясь теоремой об изменении кинетической энергии вращающегося твердого тела, мы получим уравнение для гармонических крутильных колебаний стержня:

$$G\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+(\rho\omega^2-i\omega hZ)\,\varphi(x)=0, \qquad (2)$$

где $\varphi(x)$ — амплитуда угла закручивания сечения x от положения равновесия, G — модуль сдвига материала стержня, h — отношение полярного момента инерции линии соприкосновения поперечного сечения стержня с жидкостью к полярному моменту инерции площади этого сечения.

Таблица 1

Вид колебаний	Способ погружения зонда	Конфигурация поперечного сечения	
		Фиг. 1, *а*	Фиг. 1, *б*
Продольные	Внешней поверхностью	$\frac{2R}{R^2 - r^2}$	$\frac{a+b}{d(a+b-2d)}$
	Внутренней поверхностью	$\frac{2r}{R^2 - r^2}$	$\frac{a+b-4d}{d(a+b-2d)}$
	Целиком	$\frac{2}{R-r}$	$\frac{2}{d}$
Крутильные	Внешней поверхностью	$\frac{4R^3}{R^4 - r^4}$	—
	Внутренней поверхностью	$\frac{4r^3}{R^4 - r^4}$	—
	Целиком	$\frac{4(R^3 + r^3)}{R^4 - r^4}$	—

В табл. 1 приведены формулы для расчета величины h для наиболее распространенных конфигураций поперечного сечения зонда, изображенных на фиг. 1, *а, б*.

Для ньютоновской жидкости волновое сопротивление для поперечных вязких волн определяется выражением [1]:

$$Z = \sqrt{\frac{\rho_0 \omega \mu}{2}}(1+i), \tag{3}$$

где ρ_0 — плотность жидкости, μ — вязкость.

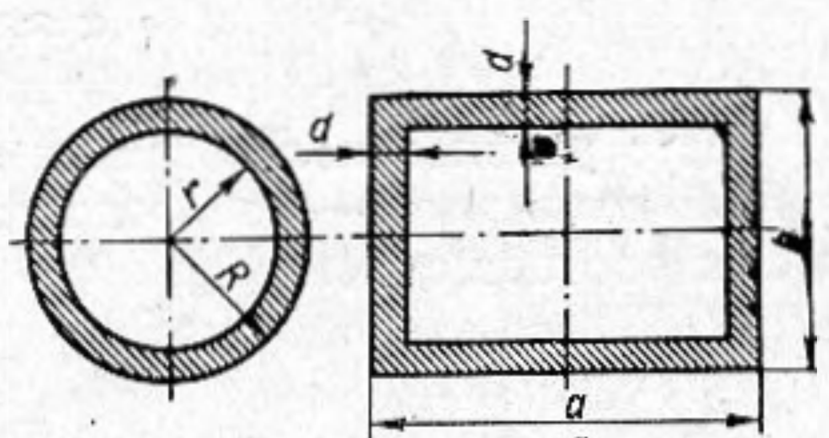
Внутренние потери в стержне при гармонических колебаниях можно учесть, если считать модули упругости комплексными [2]:

$$\begin{cases} E = \operatorname{Re} E(1+i\chi) \\ G = \operatorname{Re} G(1+i\chi) \end{cases} \tag{4}$$

где χ — коэффициент внутренних потерь.

Введем безразмерную величину

$$D = \frac{h\sqrt{\rho_0 \mu}}{\rho\sqrt{2\omega}}. \tag{5}$$



а

Фиг. 1

Ниже будет показано, что эта величина характеризует влияние демпфирующей жидкости на колебательные характеристики зонда; поэтому ее можно назвать коэффициентом демпфирования.

Подставляя выражения (3) — (5) в уравнения (1) или (2), мы получим волновое уравнение для гармонических колебаний стержня в следующем виде:

$$c_0^2 \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + 2\omega^2 \frac{1 + D - D\chi - i(D + D\chi + \chi)}{1 + \sqrt{1+\chi^2}} \Phi(x) = 0, \tag{6}$$

где c_0 — скорость распространения колебаний в недемпфированном ($D = 0$) стержне, причем для продольных колебаний $\Phi(x) = u(x)$ и для крутильных колебаний $\Phi(x) = \varphi(x)$. Постоянная распространения, соответствующая этому уравнению, выражается следующим образом:

$$\Gamma = \frac{\omega}{c_0\sqrt{1+\sqrt{1+\chi^2}}}\left[\sqrt{-1-D+D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2D+2D^2)}}+\right.$$

$$\left.+i\sqrt{1+D-D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2D+2D^2)}}\right], \tag{7}$$

откуда легко получить выражения для скорости распространения и коэффициента поглощения волны в стержне:

$$c = \frac{c_0\sqrt{1+\sqrt{1+\chi^2}}}{\sqrt{1+D-D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2D+2D^2)}}}, \tag{8}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0\sqrt{-1-D+D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2D+2D^2)}}}{\sqrt{-1+\sqrt{1+\chi^2}}}. \tag{9}$$

Здесь α_0 — коэффициент поглощения в недемпфированном $(D=0)$ стержне

$$\alpha_0 = \frac{\omega\sqrt{-1+\sqrt{1+\chi^2}}}{c_0\sqrt{1+\sqrt{1+\chi^2}}}. \tag{9'}$$

Влияние изменения вязкости на скорость распространения волны в стержне, как видно из выражений (8) и (5), можно моделировать, изменяя частоту возбуждения, т. е. рассматривая дисперсию волн.

При малых D и χ одинакового порядка малости выражения для скорости распространения и коэффициента поглощения упрощаются:

$$c \approx c_0\left(1-\frac{D}{2}\right), \tag{8'}$$

$$\alpha \approx \frac{\omega}{2c_0}(D+\chi). \tag{9''}$$

Часто удобнее пользоваться не коэффициентом поглощения, а безразмерной величиной — добротностью Q, связанной с коэффициентом поглощения соотношением [3]:

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha c}. \tag{10}$$

Подставляя в формулу (10) выражения (8) и (9), получим

$$Q = \frac{1+D-D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2D+2D^2)}}{2(D+D\chi+\chi)}. \tag{11}$$

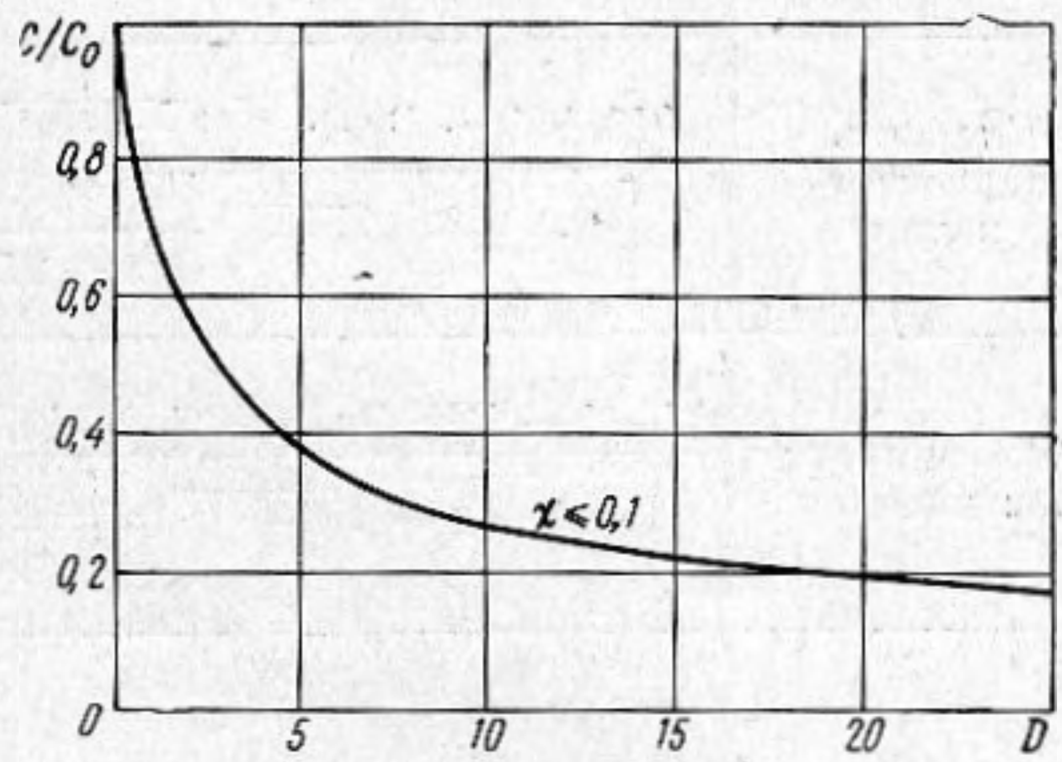
Добротность недемпфированного стержня $(D=0)$ выражается так:

$$Q_0 = \frac{1+\sqrt{1+\chi^2}}{2\chi}. \tag{11'}$$

При малых D и χ одинакового порядка малости из формулы (11) мы получаем приближенное выражение для добротности:

$$Q \approx \frac{1}{D+\chi}. \tag{11''}$$

Зависимости скорости распространения колебаний, коэффициента поглощения и добротности от коэффициента демпфирования представлены графически на фиг. 2, 3, 4 соответственно. Используя соотношения (8), (9) и (11), можно по измеренной величине скорости распространения колебаний, коэффициента поглощения или добротности определить коэффициент демпфирования D, а затем согласно формуле (5), при известных параметрах h, ρ_0, ρ, ω — вязкость среды.

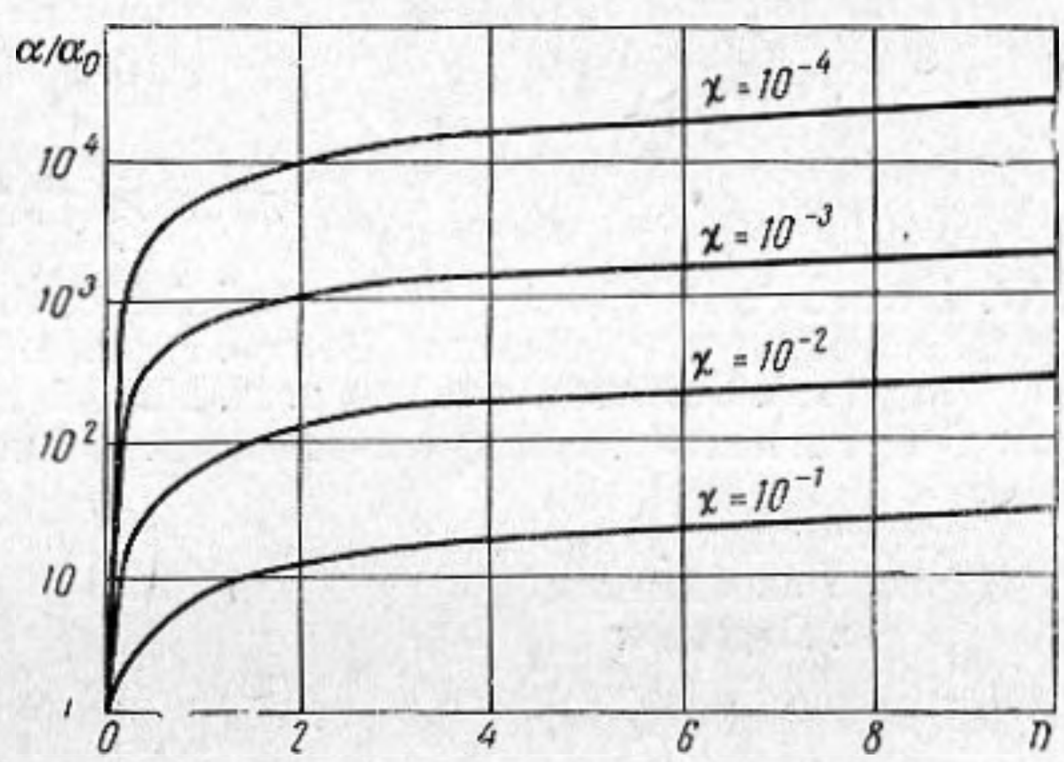


Фиг. 2

Относительная погрешность определения вязкости связана с относительной погрешностью измерения исходной величины A, соотношением:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = N_A \frac{\Delta A}{A}.$$

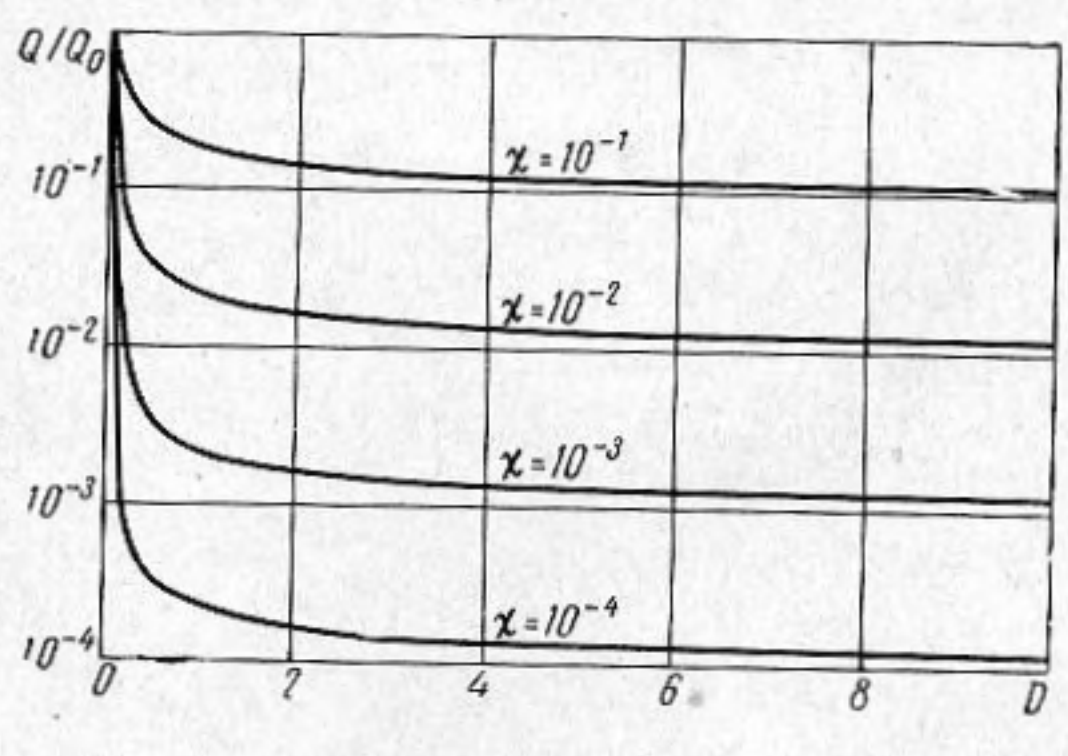
Величина N_A показывает, во сколько раз относительная точность определения вязкости с помощью измерения величины A хуже относительной погрешности измерения самой величины A.



Фиг. 3

Зависимости $N_A(D)$ для различных методов измерения вязкости представлены в табл. 2.

Из таблицы можно заключить, что метод, основанный на измерении скорости, для уменьшения погрешности целесообразно применять при больших коэффициентах демпфирования.



Фиг. 4

При определении вязкости через коэффициент поглощения величину коэффициента демпфирования следует выбирать в области $D > \chi / 1 - \chi$, руководствуясь требованием допустимой относительной погрешности $\Delta\alpha / \alpha$, т. к. величина N_2 очень слабо зависит от D.

При использовании метода, основанного на измерении добротности, коэффициент демпфирования следует выбирать в области

$$\sqrt{\chi / 2(1 + \chi)} < D < \sqrt{\chi / 1 + \chi}.$$

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Л. Д. Розенбергу за ряд сделанных им замечаний.

Таблица 2

Измеряемая величина	N_A	Особенности функции $N_A(D)$
Скорость распространения	$\dfrac{4\left[1+D-D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2_D+2_D{}^2)}\right]}{\left[1-\chi+\sqrt{1+\chi^2}\,\dfrac{1+2D}{\sqrt{1+2D+2D^2}}\right]D}$	Монотонно убывает от ∞ до 4
Коэффициент поглощения	$\dfrac{4\left[-1-D+D\chi+\sqrt{(1+\chi^2)(1+2D+2D^2)}\right]}{\left[-1+\chi+\sqrt{1+\chi^2}\,\dfrac{1+2D}{\sqrt{1+2D+2D^2}}\right]D}$	$2<N_\alpha(D)<4$ если $D>\dfrac{\chi}{1-\chi}$
Добротность	$\dfrac{2\sqrt{1+2D+2D^2}\,(D+D\chi+\chi)}{D\sqrt{1+\chi^2}}$	Имеет минимум в области $\sqrt{\dfrac{\chi}{2(1+\chi)}}<D<$ $<\sqrt{\dfrac{\chi}{1+\chi}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Roth, S. Rich. A new method for continuous viscosity measurement. General theory of the ultra-viscoson. J. Appl. Phys., 1953, 24, 7, 940.
2. Е. Скучик. Основы акустики, т. II. М., ИЛ, 1959.
3. Л. Бергман. Ультразвук и его применение в науке и технике. М., ИЛ, 1957.

Опытно-конструкторское
бюро автоматики
г. Воронеж

Поступила в редакцию
18 апреля 1964 г.