АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 3

УДК 534.833.534

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗОНАТОРОВ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ЗАТУХАНИЯ ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ, ОБЛИЦОВАННОМ ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИМ МАТЕРИАЛОМ

А. Д. Лапин

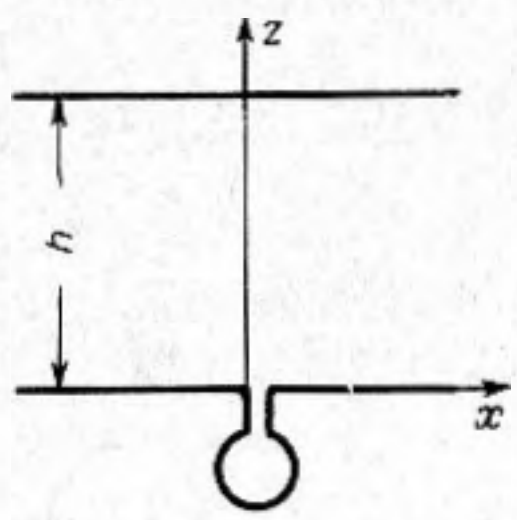
Рассмотрена плоская задача о рассеянии звука на резонаторах в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом. Показано, что в результате рассеяния происходит трансформация слабо затухающих нормальных волн низких номеров в нормальные волны высоких номеров, хорошо поглощаемые стенками волновода. Эта трансформация приводит к увеличению затухания звука, распространяющегося в волноводе.

В архитектурной акустике, аэродинамике и т. п. часто возникает задача уменьшения передачи звука по волноводу. Эта задача решается двумя способами. Первый способ — создание отражения звука на резонаторах в волноводе («резонаторные глушители», см. [1]). Как известно [2], этот способ эффективен лишь в области низких частот, когда в волноводе может распространяться только одна нормальная волна. Второй способ — создание поглощения звука на стенках волновода путем покрытия внутренних стенок волновода звукопоглощающим материалом. Однако все звукопоглощающие материалы эффективны лишь при малых углах падения звуковой волны; при увеличении угла падения поглощение звука быстро уменьшается. По этой причине затухание нормальных волн в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом, сильно уменьшается при уменьшении их номера. Наименьшее затухание имеет нормальная волна самого низкого номера и при достаточно большой длине облицованного участка в волноводе остается только эта нормальная волна. По затуханию именно этой нормальной волны и оценивается эффективность использованного звукопоглощающего материала [3].

В настоящей работе предлагается способ увеличения затухания звука в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом, путем трансформации слабо затухающих нормальных волн низких номеров в нормальные волны высоких номеров, хорошо поглощаемые стенками волновода. Эта трансформация нормальных волн осуществляется при помощи резонаторов, акустически присоединяемых к волноводу. При распространении в волноводе звуковых волн, имеющих частоту, равную собственной частоте резонаторов или близкую к ней, происходит интенсивное рассеяние звука на резонаторах. В результате рассеяния и происходит трансформация нормальных волн низких номеров в нормальные волны высоких номеров. Тип резонаторов и способ их акустического присоединения к волноводу не имеют принципиального значения.

Если в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом, одновременно распространяются звуковые волны, имеющие различные частоты, то к волноводу нужно акустически присоединить набор резонаторов, имеющих соответственные собственные частоты.

Для иллюстрации предлагаемого способа увеличения затухания мы рассмотрим плоскую задачу о рассеянии звука в волноводе (фиг. 1), имеющем на стенке резонатор (резонатор Гельмгольца), размеры которого малы по сравнению с длиной волны звука. Поскольку метод решения этой задачи и эффект, обусловливаемый наличием резонатора, не зависят от вида граничных условий на стенках волновода, то с целью наглядности мы подробно исследуем сперва тот случай, когда стенки волновода являются жесткими. Решение задачи о рассеянии звука на резонаторе в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом, будет дано без подробных выкладок.



Фиг. 1

Пусть в волноводе, представленном на фиг. 1, распространяется нормальная волна номера q, имеющая частоту ω. Для волновода с жесткими стенками эта волна имеет вид

$$p_0(x, z) = Ae^{i\xi_q x} \cos(k_{qz} z), \tag{1}$$

где

$$k_{qz} = \frac{q\pi}{h}, \quad \xi_q = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2_{qz}},$$

c — скорость звука в воздухе. Множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее мы будем опускать. Под действием волны (1) резонатор возбуждается и излучает поле $p(x, z)$. Полное поле в волноводе получим сложением полей p_0 и p.

Для нахождения поля p используем следующий прием. Как известно [4], если размеры резонатора малы по сравнению с длиной волны, то этот резонатор можно рассматривать как колебательную систему с одной степенью свободы. Сосредоточенные параметры системы определяются размерами горла и объемом воздушной полости резонатора. Обозначим через V_0 объемную скорость, создаваемую резонатором при воздействии на него падающего поля p_0 и выразим через V_0 рассеянное поле в волноводе. Пользуясь методом, аналогичным изложенному в работе [5], получим соотношение

$$p(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k\rho c V_0}{\theta_n \xi_n h} e^{\pm i\xi_n x} \cos(k_{nz} z), \tag{2}$$

где $k = \omega / c$, ρ — плотность воздуха $\theta_n = \begin{cases} 2 \text{ при } n = 0 \\ 1 \text{ при } n \neq 0 \end{cases}$. Здесь и далее верхний знак выбирается при $x > 0$, а нижний знак — при $x < 0$.

Величину V_0 и, следовательно, поле $p(x, z)$ можно найти, используя уравнение вынужденных колебаний резонатора под действием поля $p_0(x, z)$. Это уравнение имеет вид

$$M\ddot{z} + (r_0 + r)\dot{z} + \frac{1}{\varkappa} = -aAe^{-i\omega\tau}, \tag{3}$$

где M — эффективная масса (масса воздуха в горле резонатора плюс присоединенная масса), a — ширина горла, $\varkappa$ — гибкость, r_0 — сопротивление трения, r — сопротивление излучения. Величина r определяется по формуле

$$r = \mathrm{Re}\left\{\frac{a^2}{V_0} p(0,0)\right\} = \rho c \frac{a^2}{h} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{k}{\theta_n \xi_n}$$

где N — число нормальных волн, распространяющихся в волноводе.

Решение уравнения (3) можно представить в форме

$$z = \frac{-aAe^{i(\varphi-\omega t)}}{\left[\left(\frac{1}{\varkappa}-\omega^2 M\right)^2+(R\omega)^2\right]^{1/2}},$$

где $R=(r_0+r)$, $\operatorname{tg}\varphi = R\omega \Big/ \left[\frac{1}{\varkappa}-\omega^2 M\right]$

и, следовательно,

$$V_0 = a\dot{z}e^{i\omega t} = \frac{\omega a^2 A e^{i(\pi/2+\varphi)}}{\left[\left(\frac{1}{\varkappa}-\omega^2 M\right)^2+(R\omega)^2\right]^{1/2}}$$

Если частота звука совпадает с собственной частотой резонатора ($\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{\varkappa M}$) и сопротивление трения мало по сравнению с сопротивлением излучения ($r_0 \ll r$), то эта формула принимает следующий вид:

$$V_0 = \frac{-Ah}{\rho c \sum\limits_{n=0}^{N-1} \frac{k}{\theta_n \xi_n}}. \tag{4}$$

Пользуясь формулами (2) и (4), получим для рассеянного поля следующее выражение:

$$p(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\pm i\xi_n x} \cos(k_{nz} z),$$

где амплитуды A_n нормальных волн вычисляются по формуле

$$A_n = -A\left\{\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\theta_n \xi_n}{\theta_m \xi_m}\right\}^{-1}. \tag{5}$$

Из этих формул следует, что амплитуды нормальных волн, рассеянных вперед и назад, одинаковы.

Исследуем поведение величин A_n в зависимости от различных параметров. Из формулы (5) видно, что возбуждение нормальных волн в волноводе не зависит от номера q падающей волны. Поскольку амплитуды A_n обратно пропорциональны величине ξ_n, то степень возбуждения нормальной волны увеличивается при увеличении ее номера. Наибольшую амплитуду имеет волна, у которой критическая частота наиболее близка к частоте звука. В предельном случае совпадения критической частоты для нормальной волны номера l с частотой звука получим

$$A_l = -A, \qquad A_n (n \neq l) = 0.$$

Таким образом, при $kh = l\pi$, где l — любое целое число, возбуждается только нормальная волна номера l; другие нормальные волны не возбуждаются.

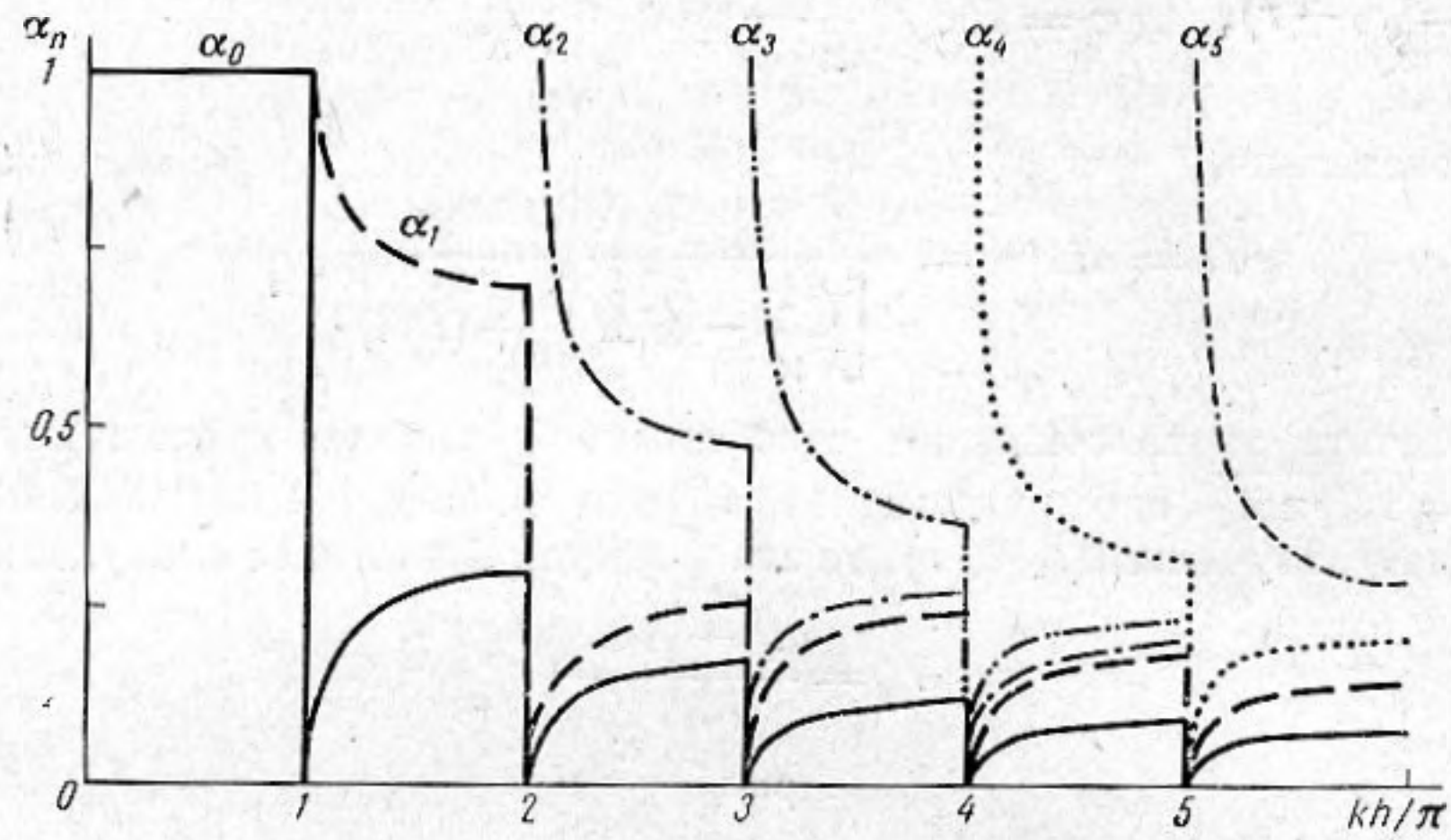
На фиг. 2 представлены графики величины

$$\alpha_n = -\frac{A_n}{A} = \left\{\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\theta_n \xi_n}{\theta_m \xi_m}\right\}^{-1}$$

в функции (kh/π) — приведенной ширины волновода. Из этих графиков видно, что амплитуды рассеянных нормальных волн увеличиваются при

увеличении их номера. Следовательно, при рассеянии звука на резонаторе в волноводе происходит трансформация нормальных волн низких номеров в нормальные волны высоких номеров.

Пусть теперь стенка $z = h$ волновода покрыта звукопоглощающим материалом, имеющим акустическую проводимость η, а стенка $z = 0$ по-прежнему является жесткой. Величину η мы будем выражать в единицах



Фиг. 2

$1/\rho c$. Для нахождения рассеянного поля мы применим здесь тот же метод, что и выше. Выберем в качестве падающего поля нормальную волну номера q. В рассматриваемом случае эта волна имеет вид

$$p_0(x, z) = Ae^{i\xi_q x} \cos[\sqrt{k^2 - \xi_q^2}\, z],$$

где ξ_q — корень уравнения

$$[\sqrt{k^2 - \xi^2} h] \operatorname{tg}[\sqrt{k^2 - \xi^2} h] = -ikh\eta, \tag{6}$$

удовлетворяющий условиям: $\operatorname{Re} \xi_q \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \xi_q \geqslant 0$.

Выполняя соответственные вычисления, мы получим для рассеянного поля в волноводе следующее выражение:

$$p(x, z) = \sum_n A_n e^{\pm i\xi_n x} \cos[\sqrt{k^2 - \xi_n^2}\, z],$$

где

$$A_n = -A \left\{ \tilde{\theta}_n \xi_n \operatorname{Re} \left(\sum_m \frac{1}{\tilde{\theta}_m \xi_m} \right) \right\}^{-1},$$

$$\tilde{\theta}_n = \left\{ 1 - \frac{ik\eta}{h[k^2(1 - \eta^2) - \xi_n^2]} \right\}.$$

Суммирование в этих формулах производится по всем корням уравнения (6), удовлетворяющим условиям $\operatorname{Re} \xi_n \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \xi_n \geqslant 0$.

В рассматриваемом случае рассеянное поле имеет те же основные свойства, что и в волноводе с жесткими стенками. Как и там, амплитуда рассеянной нормальной волны увеличивается при увеличении ее номера. Поскольку затухание нормальной волны тоже растет при увеличении ее номера, то применение резонаторов на стенке волновода, облицованного звукопоглощающим материалом, приведет к увеличению затухания звука.

Вычислим ослабление интенсивности в падающей волне после прохождения резонатора. Пусть на резонатор падает нормальная волна номера q,

имеющая амплитуду A. После прохождения резонатора амплитуда этой нормальной волны будет равна $(1-\alpha_q)A$, где

$$\alpha_q = \left\{\tilde{\theta}_q \xi_q \operatorname{Re}\left(\sum_m \frac{1}{\tilde{\theta}_m \xi_m}\right)\right\}^{-1}.$$

Следовательно, ослабление интенсивности звука в децибелах выразится формулой

$$\beta_{дб} = -20 \lg |(1-\alpha_q)|. \tag{7}$$

Если в волноводе имеется m резонаторов, расположенных на таком расстоянии друг от друга, что рассеянные нормальные волны, возникающие на них, успевают затухнуть из-за поглощения на стенках, то результирующее ослабление падающей волны после прохождения всех резонаторов будет равно $(m\beta)_{дб}$.

Для вычисления величин A_n и β нужно знать корни трансцендентного уравнения (6). В общем случае эти корни можно найти численными методами; приближенно их можно получить и в явном виде. Найдем корни уравнения (6) для случаев

$$[(kh)|\eta|] \ll 1 \text{ и } [(kh)|\eta|] \gg 1. \text{ При } [(kh)|\eta|] \ll 1$$

корни удобно искать в виде

$$[\sqrt{k^2 - \xi_n^2}h] = n\pi + \gamma_n,$$

где γ_n — величины, обращающиеся в нуль для абсолютно жесткой стенки. Подставляя это выражение в уравнение (6), мы получим для искомых величин γ_n следующее уравнение:

$$[n\pi + \gamma_n] \operatorname{tg} \gamma_n = -i(kh)\eta. \tag{8}$$

Предположим, что выполняется условие $\gamma_n \ll 1$. Тогда $\operatorname{tg}\gamma_n$ можно разложить в ряд по степеням γ_n и ограничиться в этом разложении несколькими членами. Если взять лишь первый член, то решение уравнения (8) примет вид

$$\gamma_n = \begin{cases} -i\dfrac{(kh)}{n\pi}\eta & \text{при } n \neq 0, \\ \sqrt{-i(kh)\eta} & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

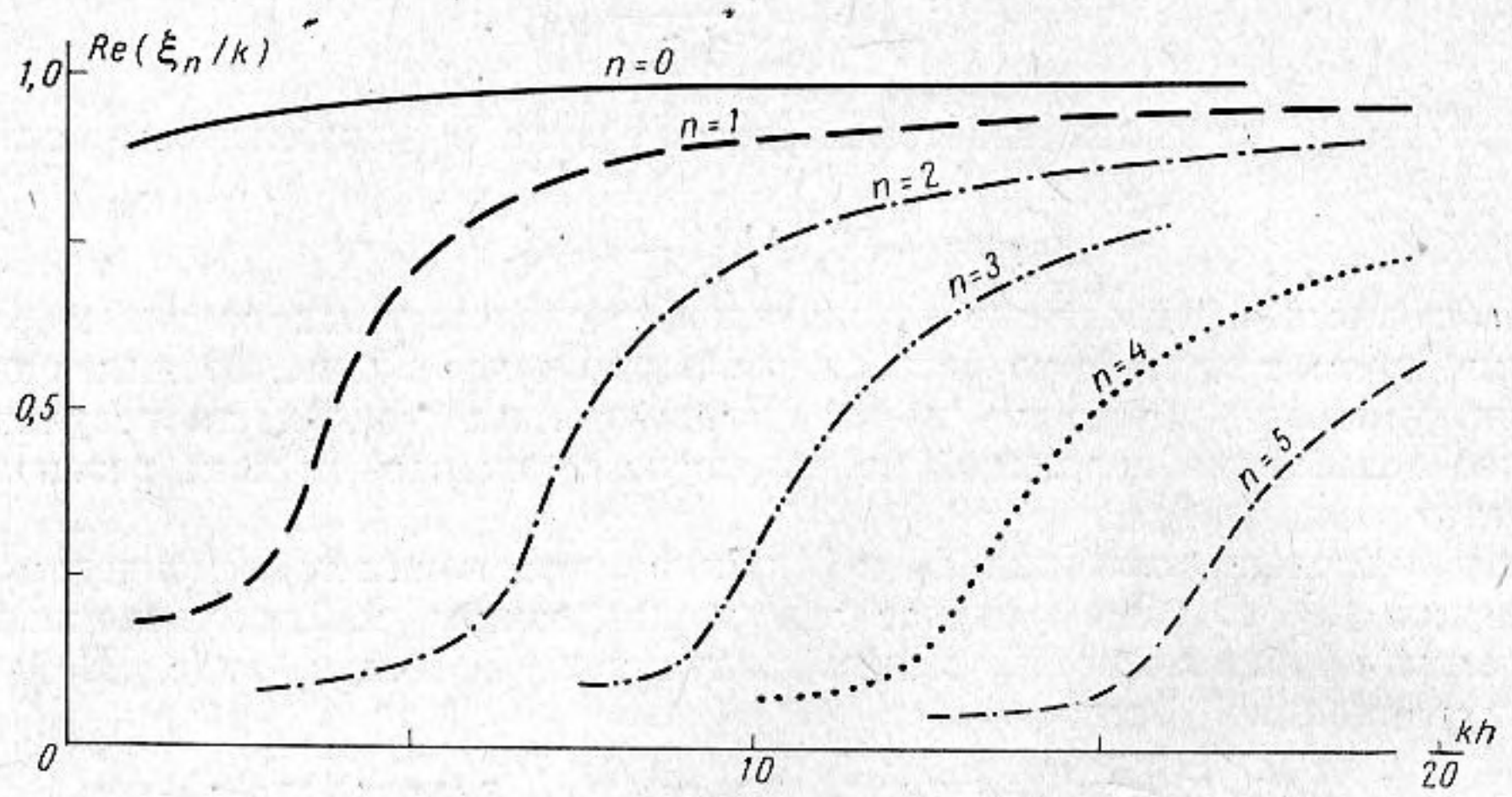
При использовании двух членов разложения мы получим следующую формулу:

$$\gamma_n = \begin{cases} -i\dfrac{(kh)\eta}{n\pi}\left[1 + \dfrac{i(kh)}{(n\pi)^2}\eta\right] & \text{при } n \neq 0, \\ \sqrt{-i(kh)\eta\left[1 + i\dfrac{(kh)}{3}\eta\right]} & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

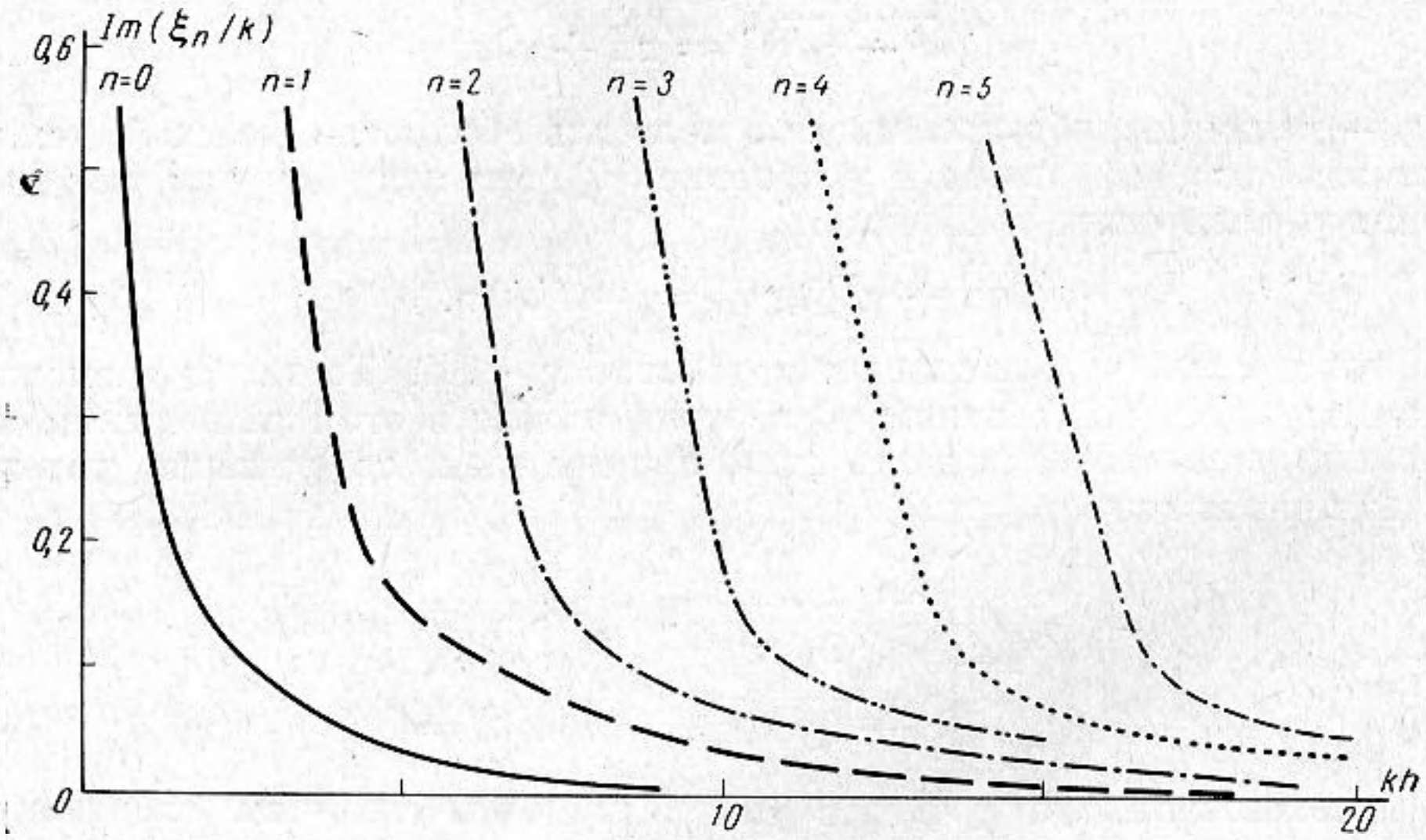
В случае $[(kh)|\eta|] \gg 1$ решение удобно искать в виде $[\sqrt{k^2 - \xi_n^2}h] = [\frac{\pi}{2}(1+2n)] + \tilde{\gamma}_n$, где $\tilde{\gamma}_n$ — величины, обращающиеся в нуль для абсолютно мягкой стенки. Подставляя это выражение в уравнение (6) и выполняя выкладки, аналогичные предыдущим, мы получим в первом приближении следующее выражение:

$$\tilde{\gamma}_n = -\frac{i}{(kh)\eta}\left[\frac{\pi}{2}(1+2n)\right].$$

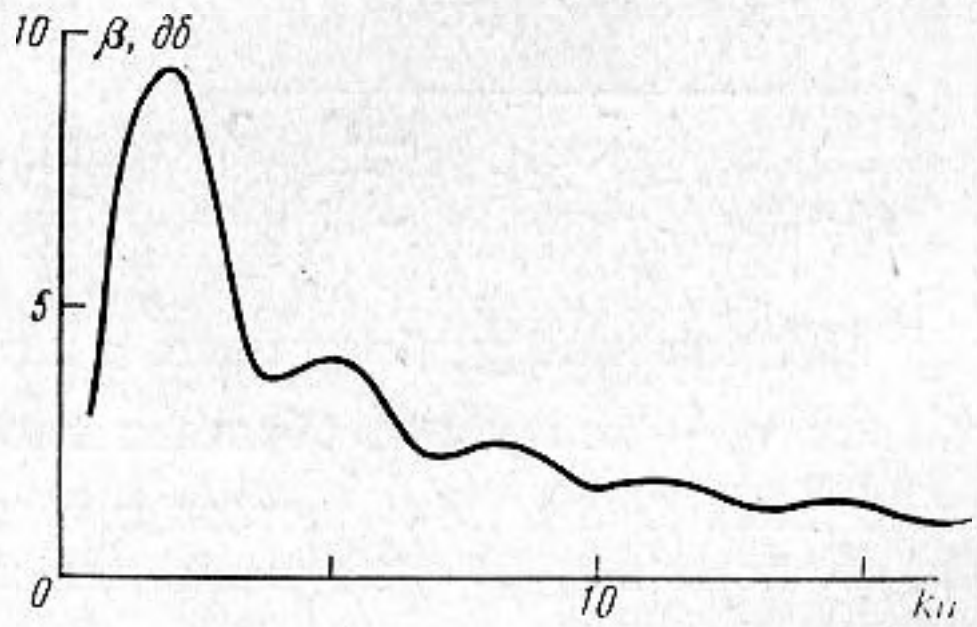
В качестве иллюстрации вычислим ослабление интенсивности нулевой нормальной волны после прохождения резонатора в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом. При расчете мы будем пред-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

полагать, что $\eta = (1{,}5 - i\ 0{,}8)^{-1}$ (маты АТИМХ [см. 3]). Найдем сперва корни трансцендентного уравнения (6). Реальная и мнимая части этих

корней, рассчитанные по приближенным формулам, представлены в виде графиков соответственно на фиг. 3 и 4. Графики величин Im ($\xi_{n/h}$) показывают, что затухание нормальной волны в волноводе быстро убывает при уменьшении номера этой волны и при увеличении ширины волновода. Например, при $kh > 8$ практически можно считать, что нулевая нормальная волна не поглощается на стенках волновода. Ослабление интенсивности в нулевой нормальной волне из-за рассеяния на резонаторе мы получим по формуле (7), подставляя в нее корни ξ_n. График зависимости величины β в функции (kh) представлен на фиг. 5. Из этого графика видно, что резонатор в волноводе, облицованном звукопоглощающим материалом, обеспечивает эффективное ослабление нулевой нормальной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. D. Davis, G. M. Stokes, D. Moore, G. L. Stevens. Theoretical and experimental investigation of mufflers with comments on engine-exhaust muffler design. NACA Rep., 1954, 1192.
2. А. Д. Лапин. Дифракция звука на прямоугольных канавках в волноводе. Промышл. аэродинамика, 1960, 18, 34—47.
3. Г. Д. Малюжинец, Р. Д. Филиппова. Расчет затухания звуковых волн низких частот в прямых облицованных каналах. Промышл. аэродинамика, 1960, 18, 3—11.
4. Рэлей. Теория звука. М.— Л., ГИТТЛ, 1944, т. 2.
5. М. А. Исакович. Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе. Акуст. ж., 1957, 3, 1, 37—45.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
29 января 1965 г.