

УДК 534.21+548

ОБОБЩЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ
В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

Д. А. Турсунов

Приведены основные выражения, описывающие распространение поверхностных волн в плоскости (100) кубического кристалла. Исследована возможность существования волн Лява в направлениях [100] и [110]. Анализируются полученные численные результаты для обобщенных поверхностных волн в кристаллах LiF и Cu.

Упругие поверхностные волны ультразвуковых частот могут быть использованы при решении ряда практических задач по исследованию поверхностных слоев кристаллов. Ввиду того, что в кристалле могут существовать два типа поверхностных волн, а именно рэлеевская волна, характеризующаяся экспоненциальным законом изменения амплитуды смещения с глубиной, и обобщенная поверхностная волна, у которой смещение содержит компоненты, изменяющиеся с расстоянием от свободной поверхности как произведение тригонометрической и экспоненциальной функций, представляет интерес изучение особенностей распространения обоих типов волн. В настоящей статье исследуются особенности распространения обобщенных волн.

Задача о существовании поверхностных волн в плоскости (100) кубического кристалла в общем виде была решена Стонелем [1].

Напишем решение уравнений движения для волны, связанной со свободной поверхностью $Z = 0$, в виде

$$(u, v, w) = (U, V, W) \exp[-\beta qz + iq(lx + my - v_R t)], \quad (1)$$

где U, V, W — константы, β — постоянная затухания в направлении оси z (в расчете на длину волны, деленную на 2π), $q = 2\pi/\lambda$ — волновое число, v_R — фазовая скорость поверхностной волны, $l = \cos \Theta$, $m = \sin \Theta$ (Θ — угол между кристаллографической осью x и направлением распространения волны).

Подставляя выражение (1) в уравнения движения, получим систему линейных однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U(c_{11}l^2 + c_{44}m^2 - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2) + Vlm(c_{12} + c_{44}) + iWl\beta(c_{12} + c_{44}) &= 0 \\ Vlm(c_{12} + c_{44}) + V(c_{44}l^2 + c_{11}m^2 - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2) + iWm\beta(c_{12} + c_{44}) &= 0 \\ Ul\beta(c_{12} + c_{44}) + Vm\beta(c_{12} + c_{44}) + iW(\rho v_R^2 + c_{11}\beta^2 - c_{44}) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

которая обладает решениями, отличными от нулевого, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11}l^2 + c_{44}m^2 - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2 & lm(c_{12} + c_{44}) & l\beta(c_{12} + c_{44}) \\ lm(c_{12} + c_{44}) & c_{44}l^2 + c_{11}m^2 - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2 & m\beta(c_{12} + c_{44}) \\ l\beta(c_{12} + c_{44}) & m\beta(c_{12} + c_{44}) & \rho v_R^2 + c_{11}\beta^2 - c_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Здесь c_{ik} — упругие модули, ρ — плотность среды.

Выражение (3) является уравнением третьей степени относительно величин v_R^2 и β^2 . Следовательно, каждому положительному вещественному значению скорости в общем случае соответствуют три различных значения постоянной затухания β , удовлетворяющих условию существования поверхностной волны. Смещения в граничные условия $\sigma_{yz} = \sigma_{xz} = \sigma_{zz}/z = 0$ мы подставим в виде

$$(u, v, iw) = \sum_{k=1}^3 (\eta_k, \gamma_k, \psi_k) K_k \exp[-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)], \quad (4)$$

где K_k — константы, η_k, γ_k, ψ_k — находятся из уравнений (2) и выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} \eta_k &= \begin{vmatrix} c_{44}l^2 + c_{11}m^2 - \rho v_R^2 - c_{44}\beta_k^2 & m\beta_k(c_{12} + c_{44}) \\ m\beta_k(c_{12} + c_{44}) & \rho v_R^2 + c_{11}\beta_k^2 - c_{44} \end{vmatrix}, \\ \gamma_k &= \begin{vmatrix} m\beta_k(c_{12} + c_{44}) & lm(c_{12} + c_{44}) \\ \rho v_R^2 + c_{11}\beta_k^2 - c_{44} & l\beta_k(c_{12} + c_{44}) \end{vmatrix}, \\ \psi_k &= \begin{vmatrix} lm(c_{12} + c_{44}) & c_{44}l^2 + c_{11}m^2 - \rho v_R^2 - c_{44}\beta_k^2 \\ l\beta_k(c_{12} + c_{44}) & m\beta_k(c_{12} + c_{44}) \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Полученная система линейных однородных уравнений с тремя неизвестными K_k имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен 0:

$$\left. \begin{aligned} l\psi_1 - \beta_1\eta_1 & & l\psi_2 - \beta_2\eta_2 & & l\psi_3 - \beta_3\eta_3 \\ m\psi_1 - \beta_1\gamma_1 & & m\psi_2 - \beta_2\gamma_2 & & m\psi_3 - \beta_3\gamma_3 \\ l\eta_1 + m\gamma_1 + \frac{c_{11}}{c_{12}}\beta_1\psi_1 & & l\eta_2 + m\gamma_2 + \frac{c_{11}}{c_{12}}\beta_2\psi_2 & & l\eta_3 + m\gamma_3 + \frac{c_{11}}{c_{12}}\beta_3\psi_3 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (6)$$

Выражения (3), (5) и (6) дают полное решение задачи о существовании поверхностной волны в плоскости (100) кубического кристалла.

Из формулы (4) следует, что поверхностная волна в общем случае связана с тремя различными постоянными затухания β_k , а частицы среды в поверхностной волне описывают эллипс, плоскость которого может не совпадать с направлением распространения волны. Значения β_k определяют тип поверхностной волны. Если все β_k — положительные вещественные числа и имеет место рэлеевская волна, когда одно β_k — положительно и вещественно, а два других — комплексные с положительной вещественной частью, существует обобщенная волна.

Как показал Стонель [1], для направлений [100] и [110] система уравнений (2) значительно упрощается, а ее определитель распадается на две части, одна из которых описывает распространение поверхностной волны, а вторая — волны Лява.

Выражения для поверхностной волны принимают вид [100]:

$$(c_{11} - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2)(c_{44} - \rho v_R^2 - c_{11}\beta^2) + \beta^2(c_{12} + c_{44})^2 = 0, \quad (7)$$

[110]:

$$[c_{44} + 1/2(c_{11} + c_{12}) - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2](c_{44} - \rho v_R^2 - c_{11}\beta^2) + \beta^2(c_{12} + c_{44})^2 = 0. \quad (8)$$

Для волн Лява соответственно

$$c_{44} - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2 = 0, \quad (9)$$

$$1/2(c_{11} - c_{12}) - \rho v_R^2 - c_{44}\beta^2 = 0. \quad (10)$$

Из уравнений (7) и (8) видно, что для $l = 1, m = 0$ и $l = m = 1/\sqrt{2}$ поверхностная волна может быть представлена в виде суммы двух неоднородных волн, связанных с двумя различными значениями β_k . Неоднородная компонента, у которой смещение параллельно фронту волны, не принимает участия в образовании поверхностной волны.

Представив согласно формуле (2) $W_k = \xi_k U_k$ ($k = 1, 2$), подставим смещения в граничные условия. Получим при этом систему двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными U_k . После решения определителя системы и замены согласно формулам (7) и (8) значений $\beta_1^2 \cdot \beta_2^2$ и $\beta_1^2 + \beta_2^2$ находим [100]:

$$\left(1 - \frac{\rho v_R^2}{c_{44}}\right) \left(1 - \frac{c_{12}^2}{c_{11}^2} - \frac{\rho v_R^2}{c_{11}}\right)^2 = \frac{\rho^2 v_R^4}{c_{11}^2} \left(1 - \frac{\rho v_R^2}{c_{11}}\right), \quad (11)$$

[110]:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho v_R^2}{c_{44}}\right) \left[\frac{1/2 c_{11} (c_{11} + c_{12} + 2c_{44}) - c_{12}^2}{c_{11}^2} - \frac{\rho v_R^2}{c_{11}} \right]^2 = \\ = \frac{\rho^2 v_R^4}{c_{11}^2} \left[\frac{1/2 (c_{11} + c_{12} + 2c_{44}) - \rho v_R^2}{c_{11}} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) позволяют сразу определить значение фазовой скорости v_R .

Перейдем к рассмотрению вопроса о существовании волн Лява в плоскости (100) кубического кристалла. Положив $w = 0$, из третьего уравнения системы (2) имеем

$$\frac{u}{v} = -\frac{m}{l}. \quad (13)$$

С учетом этого соотношения первые два выражения системы (2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} c_{11} l^2 - c_{44} m^2 - \rho v^2 - c_{44} \beta^2 - l^2 (c_{12} + c_{44}) &= 0 \\ - (c_{12} + c_{44}) m^2 + (c_{11} m^2 + c_{44} l^2 - \rho v^2 - c_{44} \beta^2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

После несложных математических преобразований из выражений (14) следует, что волна Лява со смещением $u = v$ может распространяться вдоль направлений $\Theta = \pm 45^\circ$. Заменяв в любом из выражений (14) $l = m = 1/\sqrt{2}$, получим соотношение (10), откуда

$$\beta_{1,2} = \pm \left(\frac{1/2 (c_{11} - c_{12}) - \rho v^2}{c_{44}} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

На этом основании смещения мы берем в виде

$$u = [U_1 \exp(-\beta qz) + U_2 \exp(\beta qz)] \exp i q (lx + my - vt). \quad (16)$$

Подстановка выражения (16) в граничные условия после ряда преобразований приводит к условию $\exp 2\beta qz = 1$, которое соблюдается, если $2\beta qz = 2\pi n i$ или $z = \lambda n / 2\beta$ (λ — длина волны). Из величин, входящих в показатель функции, мнимой может быть только постоянная затухания β . Для этого необходимо, чтобы подкоренное выражение (15) было меньше нуля или $v > (c_{11} - c_{12} / 2\rho)^{1/2}$, т. е. $v > v_{t[110]}$. Легко показать, что для [100] смещение $u = 0$, и граничные условия удовлетворяются, когда $v > (c_{44} / \rho)^{1/2}$, т. е. $v > v_t$.

Так, необходимым условием существования волн Лява вдоль направлений [110] и [100] кубического кристалла является наличие второй свободной от напряжений поверхности. При $z \rightarrow \infty$ скорость распространения

волны Лява стремится для $[110]$ к скорости поперечной волны вдоль $[110]$, поляризованной по $[1\bar{1}0]$, а для $[100]$ — к $v_t = (\tau_{44} / \rho)^{1/2}$.

Рассмотрим распространение обобщенных поверхностных волн в плоскости (100) кубического кристалла. Анализ в общем виде уравнений (3) и (6) для произвольного направления представляет значительные математические трудности из-за громоздкости получаемых выражений. Поэтому ограничимся численным исследованием особенностей распространения обобщенных волн. Расчеты проводились для кристаллов LiF и Cu. Значения плотности и упругих модулей приведены в табл. 1.

Способ вычислений заключался в следующем. Для $m = 1$, $l = 0$ и $l = m = 1/\sqrt{2}$ из уравнений (11) и (12) определялись значения фазовых скоростей v_R , а из формул (7) и (8) — соответствующие им постоянные затухания β_k . Для промежуточных направлений по задаваемым значениям v_R из уравнения (3) вычислялись β_k ; из соотношений (5) соответствующие им η_k , γ_k , ψ_k . Полученные данные подставлялись в определитель (6) и методом приближений отбирались те значения v_R и β_k , для которых определитель обращался в нуль.

На основании числовых расчетов было установлено, что в области значений $0^\circ < \Theta < 30^\circ$ для кристаллов LiF и Cu существуют обобщенные волны, связанные с тремя постоянными затуханиями. Для углов $30^\circ < \Theta < 45^\circ$ одно из значений β_k оказывается чисто мнимым, и поверхностная волна в виде суперпозиции трех неоднородных волн не удовлетворяет граничным условиям.

Гацис и другие [2], вычисляя фазовые скорости для различных направлений плоскости (100) ряда кубических кристаллов, также обнаружили области значений углов Θ , для которых уравнения (3) и (6) не имеют решения. Они установили, что эти направления обычно бывают вблизи $[110]$. В связи с этим, они пришли к выводу, что у некоторых кристаллов существуют области исключенных направлений, в которых невозможны ни обычные рэлеевские, ни обобщенные поверхностные волны. Однако экспериментальные исследования, проведенные нами, показали, что поверхностные волны существуют для всех направлений плоскости (100) .

При отыскании решения, удовлетворяющего поверхностной волне, можно исходить из следующих физических соображений. Поверхностная волна в общем случае является результатом интерференции трех неоднородных волн («продольной» и двух «поперечных»), для которых проекции волновых векторов на свободную поверхность равны волновому вектору поверхностной волны. Для некоторых значений упругих модулей

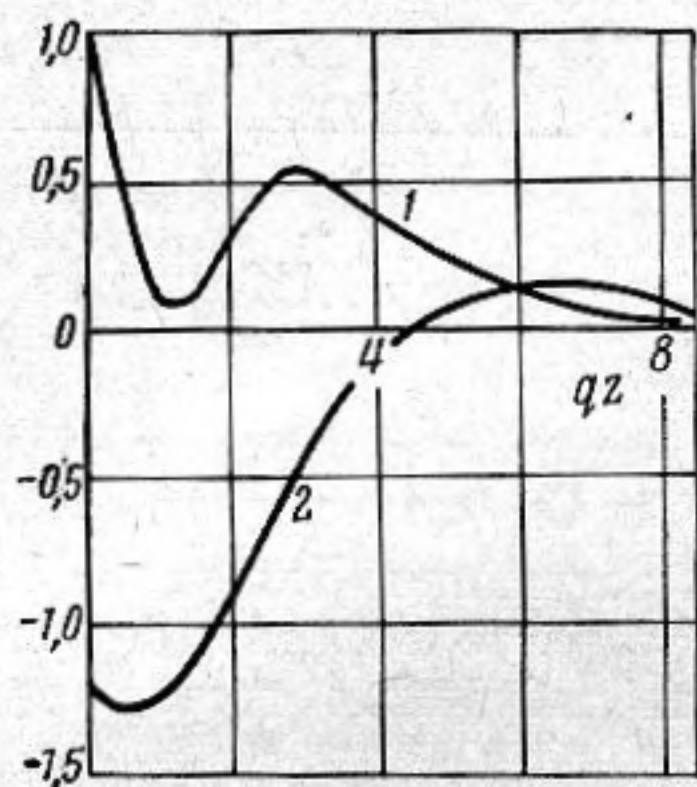
Т а б л и ц а 1

Кристалл	Плотность, г/см ³	Упругие модули, 10 ⁻¹⁰ дин/см ²		
		c ₁₁	c ₁₂	c ₄₄
LiF	2,60	113,0	48,0	62,5
Cu	8,93	170,2	123,0	75,1

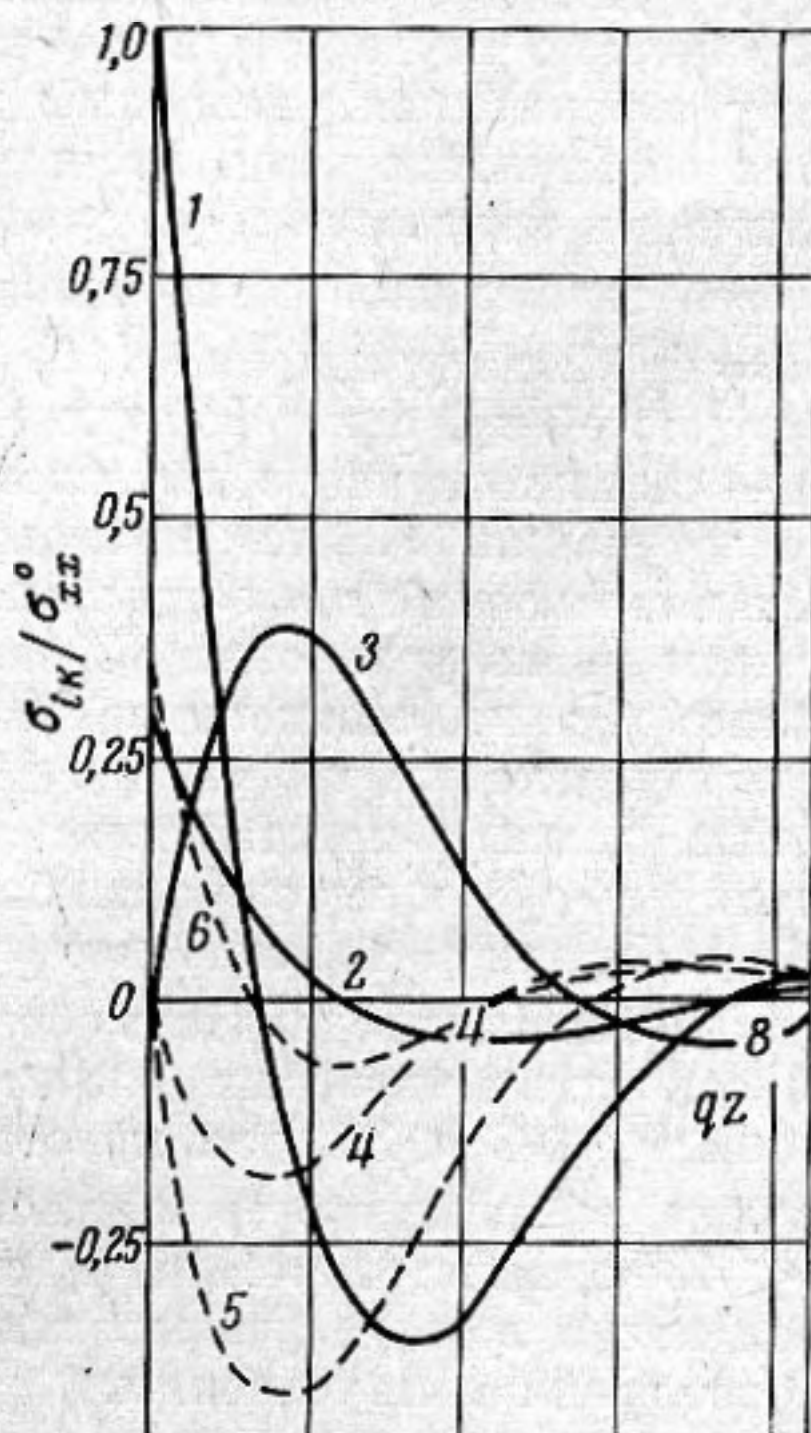
Т а б л и ц а 2

θ°	LiF			Cu		
	$v_R \times 10^{-5}$, см/сек	β_1	$\beta_{2,3}$	$v_R \times 10^{-5}$, см/сек	β_1	$\beta_{2,3}$
0	3,907	—	0,393 ± i0,576	2,020	—	0,229 ± i0,764
5	3,912	0,592	0,394 ± i0,572	—	—	—
15	3,946	0,487	0,404 ± i0,541	2,063	0,578	0,248 ± i0,727
25	3,966	0,180	0,462 ± i0,499	2,052	0,250	0,359 ± i0,673
30	4,17	—	0,344 ± i0,499	2,27	—	0,201 ± i0,662
45	4,144	—	0,500 ± i0,499	2,345	—	0,376 ± i0,672

может оказаться, что составляющая волнового вектора одной из неоднородных волн по граничной поверхности не равна волновому вектору поверхностной волны. Тогда последняя может быть образована двумя другими волнами, проекции волновых векторов которых на свободную поверхность одинаковы, а напряжения, создаваемые ими на граничной поверхности, равны нулю. По сути дела, этот случай имеет место для углов $\Theta = 0^\circ$ и 45° , когда одна из поперечных компонент не участвует в образовании поверхностной волны. Исходя из этого, нами была рассмотрена возможность существования волн в виде различных комбинаций двух неоднородных волн («продольная» — «поперечная», «поперечная» — «поперечная»). Уравнения для каждого типа волн легко могут быть получены из выражений (2), (3) и граничных условий и здесь не приводятся.



Фиг. 1



Фиг. 2

Числовые расчеты для кристаллов LiF и Cu показывают что вдоль направлений $30^\circ < \Theta < 45^\circ$ существуют поверхностные волны, у которых $\nu = 0$, а β_k — комплексные числа. Вычисленные значения фазовой скорости для LiF хорошо согласуются с данными экспериментов; результаты расчетов представлены в табл. 2.

Дальнейшие вычисления проводились для $\Theta = 15^\circ$ LiF. Величины относительных смещений по осям равны:

$$\left. \begin{aligned} u &= \{0,210 \exp(-0,487qz) + \exp(-0,404qz)[2,106 \sin 0,541qz - \\ &\quad - 1,636 \cos 0,541qz]\} \sin \omega t, \\ v &= \{-0,866 \exp(-0,487qz) + \exp(-0,404qz)[0,456 \sin 0,541qz + \\ &\quad + 0,539 \cos 0,541qz]\} \sin \omega t, \\ w &= \{0,241 \exp(-0,487qz) + \exp(-0,404qz)[-2,425 \sin 0,541qz - \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Амплитудные значения смещений вдоль волнового вектора и перпендикулярно к нему могут быть найдены как $U_1 = lU + mV$, $V_1 = lV - mU$, $W_1 = W$. Тогда результирующее смещение в горизонтальной плоскости — $(U_1^2 + V_1^2)^{1/2}$. Для поверхности $Z = 0$ $(U_{10}^2 + V_{10}^2) = 1,462$ и $W_0 = -1,760$. Следовательно, в обобщенной поверхностной волне частицы описывают эллипс, у которого отношение вертикальной оси к горизонтальной равно 1,2. Угол наклона плоскости эллипса к направлению вол-

нового вектора определяется как $\varphi = \text{arctg } V_1/U_1$ и изменяется с глубиной. Значения углов наклона для разных qz приведены в табл. 3.

Фиг. 1 иллюстрирует изменение амплитуд горизонтальной и вертикальной компонент смещения с глубиной. Кривые даны в виде отношений: $1 - (U_1^2 + V_1^2)^{1/2} / (U_{10}^2 + V_{10}^2)^{1/2}$, $2 - W / (U_{10}^2 + V_{10}^2)^{1/2}$.

Используя формулу (4), выражения упругих напряжений для поверхностной волны можно написать в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= iq \sum_{k=1}^3 (c_{11}l\eta_k + c_{12}m\gamma_k + c_{12}\beta_k\psi_k) K_k \exp \times \\
 &\times [-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)], \\
 \sigma_{yy} &= iq \sum_{k=1}^3 (c_{12}l\eta_k + c_{11}m\gamma_k + c_{12}\beta_k\psi_k) K_k \exp \times \\
 &\times [-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)], \\
 \sigma_{zz} &= iq \sum_{k=1}^3 (c_{12}l\eta_k + c_{12}m\gamma_k + c_{11}\beta_k\psi_k) K_k \exp \times \\
 &\times [-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)], \\
 \sigma_{yz} &= qc_{44} \sum_{k=1}^3 (m\psi_k - \beta_k\gamma_k) K_k \exp [-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)], \\
 \sigma_{xz} &= qc_{44} \sum_{k=1}^3 (l\psi_k - \beta_k\eta_k) K_k \exp [-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)], \\
 \sigma_{zx} &= iq c_{44} \sum_{k=1}^3 (m\eta_k + l\gamma_k) K_k \exp [-\beta_k qz + iq(lx + my - v_R t)].
 \end{aligned} \tag{18}$$

Таблица 3

qz	0	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2
φ°	17	234,5	213,8	218,6	228	246	306,4

Компоненты напряжения σ_{yz} , σ_{xz} по отношению к остальным напряжениям имеют фазовый сдвиг, равный $\pi/2$. Следовательно, результирующие векторы напряжений, действующие на элементарные площади, описывают эллипсы в плоскостях, перпендикулярных плоскости распространения.

На фиг. 2 представлено изменение с глубиной напряжений

$$\begin{aligned}
 &\sigma_{xx}(1), \quad \sigma_{yy}(2), \quad \sigma_{zz}(3), \\
 &\sigma_{yz}(4), \quad \sigma_{xz}(5), \quad \sigma_{xy}(6).
 \end{aligned}$$

По ординате отложена величина $\sigma_{ik}/\sigma_{xx}^0$, где $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}$ при $z = 0$. Компоненты σ_{zz} , σ_{yz} , σ_{xz} на глубине порядка четверти длины волны достигают своего максимального значения. Примерно с $qz = 6,0$ величины напряжений близки к нулю.

Таким образом, упругая энергия обобщенной поверхностной волны, как и в случае обычной рэлеевской волны, оказывается сконцентрированной у поверхности на глубине порядка длины волны.

Автор благодарит Л. Г. Меркулова за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Stoneley. The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal. Proc. Roy. Soc., 1955, A232, 447—458.
2. D. C. Gazis, R. Herman, R. F. Wallist. Surface elastic waves in cubic crystals. Phys. Rev., 1960, 119, 533—544.