

УДК 534.833.524.2

РАССЕЯНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

Г. И. Усоскин

Решается задача о рассеянии монохроматической плоской изгибной волны на системе точечных препятствий, расположенных на бесконечной пластине и характеризующихся механическими импедансами. Полученные общие выражения применяются к расчету искажений, вносимых в спектральные измерения вследствие наличия реакции виброприемников. Результаты расчетов проверены экспериментально.

Исследование распространения изгибных волн по тонким пластинам, при наличии на последних разного рода препятствий, имеет большое практическое значение. В частности, представляет интерес случай точечных препятствий, т. е. препятствий, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной изгибной волны. Подобного рода задача возникает, например, при изучении влияния контактных виброприемников на погрешность измерений, при исследовании работы antivибраторов и в некоторых других случаях. Этим вопросам посвящены работы [1—3]. Однако решение такой важной с практической точки зрения задачи, как рассеяние плоской изгибной волны произвольной системой препятствий, неизвестно, хотя в работе [3] и решается ее частный случай, когда препятствия расположены на одной прямой. При этом однако не учитывается их взаимное влияние.

Пусть на систему из N произвольно расположенных точечных препятствий, находящихся на бесконечной тонкой пластине, падает плоская изгибная волна единичной амплитуды $e^{i(kx-\omega t)}$, где k — волновое число. Координата x совмещена с направлением прихода волны. Определим суммарное поле, образующееся на пластине в результате рассеяния падающей волны на этой системе препятствий с учетом их взаимного влияния.

В общем случае препятствие можно охарактеризовать следующими величинами [4]: механическим импеданцем z_M по отношению к поступательному движению пластинки перпендикулярно ее плоскости и импеданцем z_B по отношению к вращательному движению части пластинки, находящейся под препятствием. Последним, однако, в данном случае можно пренебречь в силу малых размеров препятствия. Поэтому в дальнейшем мы будем характеризовать препятствия только их механическими импедансами, причем для простоты примем их одинаковыми для всей системы.

Для решения поставленной задачи используем выражение для амплитуды изгибных колебаний тонкой бесконечной пластины, возбуждаемой гармонической сосредоточенной силой F , приложенной в точке с координатами $(x_0; y_0)$. Известно, что решение этой задачи имеет вид [5]

$$\xi(kR) = \frac{iF}{8k^2D} \theta(kR), \quad (1)$$

D — цилиндрическая жесткость пластины, $k = \left(\frac{\omega^2 \rho}{D}\right)^{1/4}$ — волновое чис-

ло изгибных колебаний, ρ — поверхностная плотность материала пластины, $H_0^{(1)}(kR)$ — функция Ганкеля 1-го рода.

Обозначим координаты препятствий через $(x_n; y_n)$. Тогда суммарное поле в любой точке пластины, состоящее из падающей волны и волн, рассеянных системой препятствий, можно написать в виде

$$\xi(x, y) = e^{ikhx} + \sum_{n=1}^N \xi_n(x, y), \quad (2)$$

где $\xi_n(x, y)$ зависит, естественно, от координат n -го препятствия $(x_n; y_n)$.

Для нахождения ξ воспользуемся методом, предложенным в работе [6], который заключается в том, что задача о свободных колебаниях нагруженной в точках пластинки заменяется задачей о чисто вынужденных колебаниях свободной пластинки под действием системы сосредоточенных сил, приложенных в тех же точках. Исходя из этого, в качестве $\xi(x, y)$ можно взять выражение (1), описывающее волну, создаваемую сосредоточенной силой в точке $(x_n; y_n)$. При этом формула (2) переписется в виде

$$\xi(x, y) = e^{ikhx} + \frac{i}{8k^2D} \sum_{n=1}^N F(x_n; y_n) \theta(kR_n), \quad (3)$$

где $R_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}$. Силу $F(x_n; y_n)$ можно выразить через импеданс препятствия: $-F(x_n; y_n) = -i\omega z_M \xi(x_n; y_n)$, где $\xi(x_n; y_n)$ — амплитуда результирующего смещения в точке приложения силы, а знак минус перед $F(x_n; y_n)$ указывает на то, что сила приложена к пластине со стороны препятствия. Подставляя это выражение в (3), получим

$$\xi(x, y) = e^{ikhx} - \frac{\omega z_M}{8k^2D} \sum_{n=1}^N \xi(x_n; y_n) \theta(kR_n). \quad (4)$$

Применяя равенство (4) последовательно ко всем точкам, в которых расположены препятствия, получим систему из N уравнений относительно неизвестных амплитуд $\xi(x_n; y_n)$:

$$\sum_{n=1}^N a_{nm} \xi(x_n; y_n) = e^{ikhx_m}; \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Решая эту систему, находим

$$\xi(x_n; y_n) = \Delta_n / \Delta, \quad (6)$$

где Δ — определитель системы (5), элементы которого равны

$$a_{nm} = \begin{cases} \frac{\omega z_M}{8k^2D} + 1, & \text{при } n = m \\ \frac{\omega z_M}{8k^2D} \theta(kR_{nm}) & \text{при } n \neq m, \end{cases} \quad (7)$$

где $R_{nm} = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$, а Δ_n представляет определитель, полученный из Δ путем замены n -го столбца свободным членом системы. Подставляя значение ξ из выражения (6) в (4), получаем решение задачи.

Полученные результаты можно применить при исследовании вопроса о влиянии реакции системы виброприемников, расположенных на пластине, на погрешность спектральных измерений вибраций. Будем считать, что виброприемники работают в дорезонансной области частот; при этом импеданс равен $-i\omega m$, где m — масса виброприемника. В связи с этим уравнение (4) с учетом формулы (6) примет вид

$$\xi(x, y) = e^{ikhx} + \frac{iA_0}{\Delta} \sum_{n=1}^N \Delta_n \theta(kR_n), \quad (8)$$

где $A_0 = \omega^2 m / 8k^2 D$ — коэффициент, определяющий амплитуду рассеянных волн. Так как в него входит масса виброприемника и цилиндрическая жесткость пластины, то фактически коэффициент A_0 определяет эффективность, с которой виброприемник нагружает пластину. Поэтому в дальнейшем A_0 мы называем коэффициентом нагрузки. В частности, для стальной пластины он равен $7 \cdot 10^{-7} mf / h^2$ (где h — толщина пластины в сантиметрах, а f — частота в герцах). Локальные изменения амплитуды результирующего поля по отношению к первоначальному полю ξ_0 при отсутствии виброприемников мы будем характеризовать величиной

$$\delta(x, y) = 20 \lg \left| \frac{\xi(x, y)}{\xi_0(x, y)} \right| \text{ дБ}. \quad (9)$$

В данном случае δ является мерой искажений, вносимых виброприемниками в существующее поле. Ниже рассматриваются два простейших частных случая, которые, однако, позволяют сделать некоторые важные выводы.

Пусть на пластине расположен всего один виброприемник в начале координат. Перейдем к полярной системе координат. Совместив луч $\varphi = 0$ с направлением прихода плоской волны, напишем результирующее поле, состоящее из падающей и рассеянной виброприемником волн, в виде

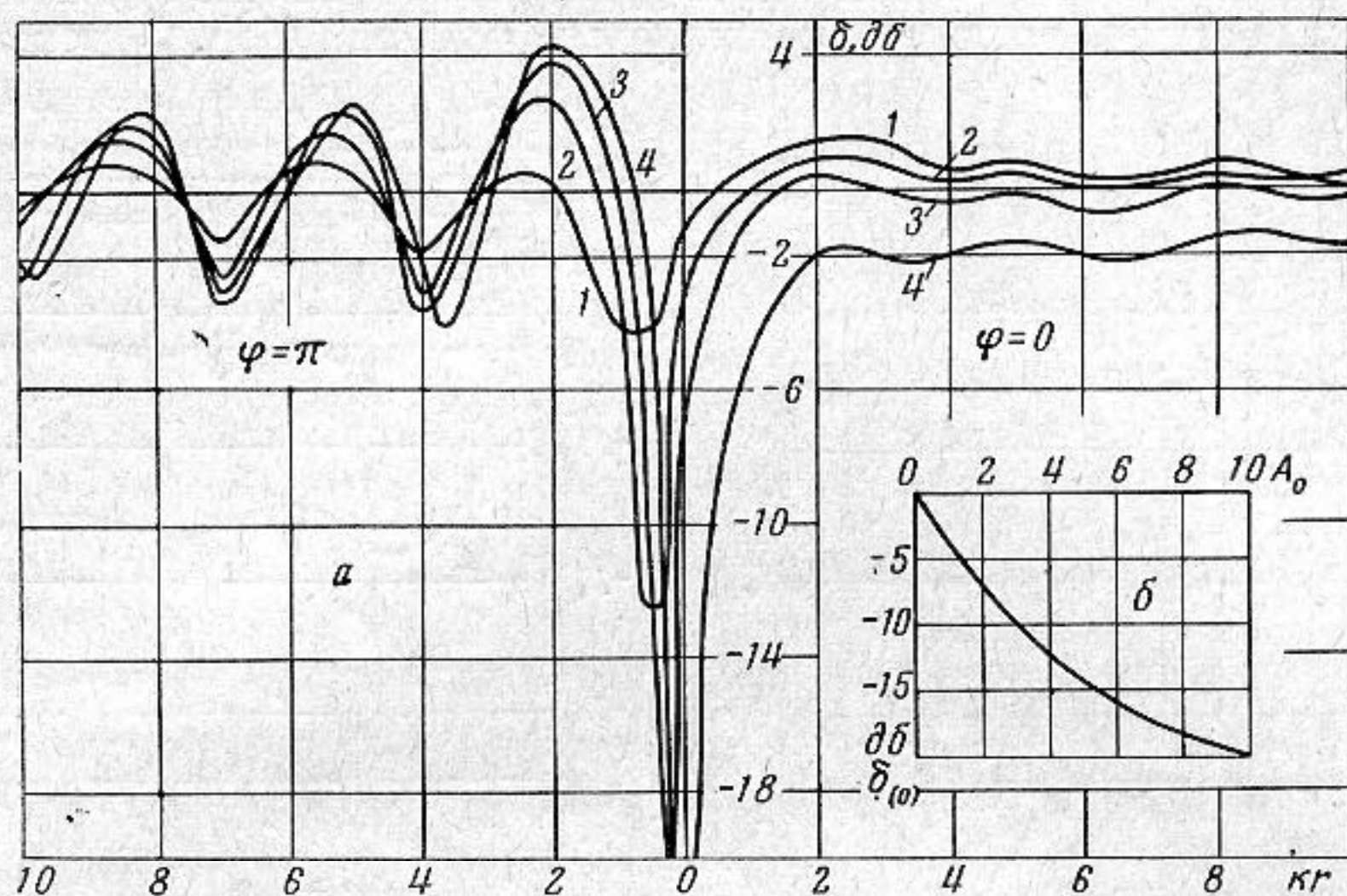
$$\xi(r, \varphi) = e^{ihr \cos \varphi} - \frac{iA_0}{iA_0 - 1} \theta(kr). \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в формулу (9), получим локальные искажения поля, вносимые вследствие реакции виброприемника. Исследуя угловую зависимость $\delta(r, \varphi)$, легко увидеть, что ее экстремумы находятся при значениях $\varphi = 0; \pi$. В зависимости от kr каждому из этих углов будет соответствовать либо максимум, либо минимум, причем при некоторых значениях kr угловая зависимость вообще будет отсутствовать. На фиг. 1, а приведены значения $\delta(kr)$ для случая $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ в зависимости от коэффициента нагрузки A_0 (кривые соответствуют 1 — $A_0 = 0,5$; 2 — $A_0 = 1$; 3 — $A_0 = 2$ и 4 — $A_0 = \infty$; последнее соответствует жесткому закреплению точки $r = 0$). Из кривых видно, что искажения поля вдоль прямой $\varphi = 0$ значительно меньше, чем вдоль прямой $\varphi = \pi$, причем наибольшие по абсолютной величине искажения возникают не в точке расположения препятствия, а в соседних точках при $\varphi = \pi$. Полученные кривые хорошо согласуются с качественной картиной отражения изгибных волн от бесконечно протяженного препятствия, рассмотренной в работе [4]. В частном случае, при $r = 0$ из формулы (9) с учетом выражения (10) можно получить локальное изменение амплитуды в точке расположения виброприемника, т. е. фактическую погрешность, вносимую в спектральные измерения вследствие конечности массы виброприемника:

$$\delta(0) = -10 \lg(1 + A_0^2). \quad (11)$$

Результат совпадает с формулой, приведенной ранее без вывода в работе [4]. На фиг. 1, б построена величина этой погрешности в зависимости от A_0 .

Представляет интерес получить аналогичные результаты для случая, когда на пластине существует случайное поле изгибных волн, например, диффузное. При переходе к случайным полям в качестве их характеристики вместо спектральных амплитуд $\xi(\omega)$, введем в рассмотрение средне-



Фиг. 1

квадратичную спектральную плотность, которая является энергетической характеристикой поля. Известно, что они связаны соотношением

$$B(\omega) = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(\omega) \xi^*(\omega) dt \right]^{1/2}, \quad (12)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. В качестве меры искажений случайного поля при наличии рассеяния на препятствиях воспользуемся величиной δ , которую по аналогии с (9) напомним в виде

$$\delta(x, y) = 10 \lg \frac{B(x, y)}{B_0(x, y)}, \quad (13)$$

где $B_0(x, y)$ — квадрат среднеквадратичной спектральной плотности неискаженного поля.

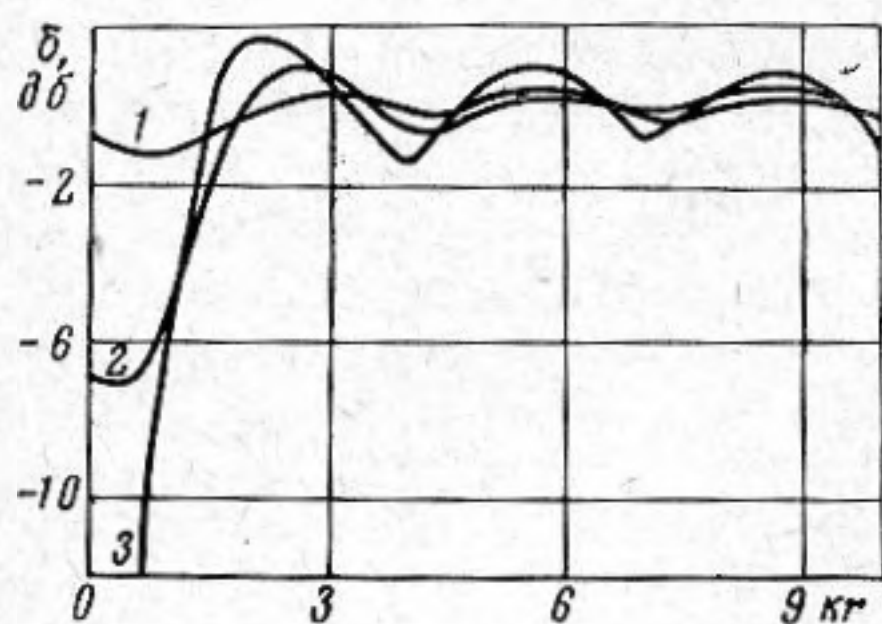
Для диффузного поля характерным является то, что амплитуда колебаний в каждой его точке является результатом суперпозиции большого количества независимых друг от друга колебаний, приходящих в данную точку с различных направлений. С учетом этого, (12) можно написать:

$$B(kr) = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{2\pi} \xi(r, \varphi) \xi^*(r, \varphi) d\varphi dt \right]^{1/2}. \quad (14)$$

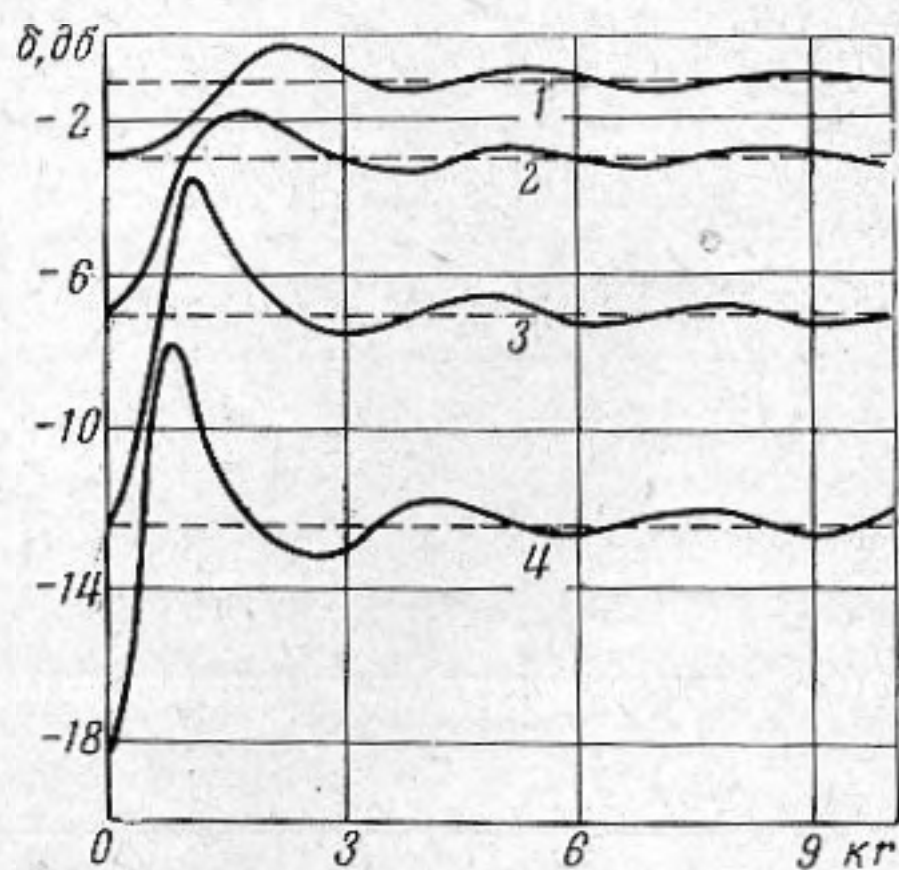
Подставив сюда значение $\xi(r, \varphi)$ из формулы (10) и проведя необходимые вычисления, мы получим выражение, которое можно подставить в (13). Учитывая также, что $B_0(kr)$ равно 2π , получим окончательную формулу для искажений диффузного поля одним препятствием:

$$\delta(kr) = 10 \lg \left\{ 1 + \frac{A_0^2}{1 + A_0^2} [\text{Im}^2 \theta(kr) - \text{Re}^2 \theta(kr)] - \frac{2A_0}{1 + A_0^2} \text{Re} \theta(kr) \text{Im} \theta(kr) \right\}. \quad (15)$$

На фиг. 2 приведены кривые, соответствующие формуле (15) для следующих значений коэффициента нагрузки A_0 : 1 — $A_0 = 0,5$; 2 — $A_0 = 2$; 3 — $A_0 = \infty$. Из графика видно, что в случае диффузного поля наибольшие искажения возникают в точке расположения препятствия, причем величина этих искажений зависит от коэффициента A_0 , так же как и для случая плоской бегущей волны, и определяется формулой (11). С достаточной



Фиг. 2



Фиг. 3

степенью точности можно считать, что при $kr \geq 2$ влияние препятствия на спектральные характеристики поля не сказывается и $\delta = 0$. Поэтому можно считать, что если виброприемники отстоят друг от друга больше, чем на $\lambda_{изг} / 3$, где $\lambda_{изг}$ — длина изгибной волны, то они практически не влияют друг на друга, и таким образом для спектральных искажений получается результат, описываемый формулой (11). Однако, если виброщупы расположены на более близком расстоянии, то они будут взаимодействовать друг с другом, и величина вносимых искажений будет заметно отличаться от величины, вычисленной по формуле (11).

Используя формулы (8), (13) и (14), можно получить искажения в точках нахождения виброприемников при любом их количестве и расположении. На фиг. 3 приведены результаты расчетов искажения диффузного поля в случае двух виброприемников в зависимости от расстояния между ними. В силу симметричности картины искажения в местах расположения обоих виброприемников одинаковы. Кривые приведены для следующих значений A_0 : 1 — $A_0 = 0,5$; 2 — $A_0 = 1$; 3 — $A_0 = 2$; 4 — $A_0 = 4$. Из кривых видно, что величина искажений в месте расположения каждого из виброприемников, т. е. фактическая погрешность при измерениях при наличии двух виброприемников, имеет два предельных значения в зависимости от расстояния между ними. При $r > \lambda_{изг} / 3$ в соответствии со сделанным ранее выводом взаимное влияние виброприемников перестает сказываться и величина искажений определяется формулой (11) (пунктирные линии на фиг. 3). При $r = 0$, т. е. когда виброприемники находятся в одной точке, величина искажений также определяется по формуле (11), однако в качестве A_0 нужно брать удвоенную величину коэффициента нагрузки, так как два виброприемника, расположенные в одной точке, можно рассматривать как один, но с удвоенной массой. Наконец, при $r < \lambda_{изг} / 3$ величина δ может заметно отличаться от этих двух крайних значений, причем отклонение увеличивается с ростом коэффициента искажений.

Для подтверждения полученных результатов были произведены практические измерения спектральных искажений, вносимых системой измерительных виброприемников для случая диффузного поля. Измерения производились на стальной пластине размерами $700 \times 1000 \times 4$ мм с ребрами

жесткости по краям. Пластина возбуждалась случайным шумом в диапазоне частот $0,3 \div 7,6$ кГц при помощи магнитострикционного вибратора. В результате на пластине устанавливалось поле вибраций, близкое к диффузному. Степень диффузности проверялась путем измерения среднеквадратичных значений спектральных уровней в третьоктавных полосах в различных точках пластины, а также измерением пространственных корреляционных функций по различным направлениям. Результаты показали, что во всех третьоктавных полосах, начиная с 1 кГц, уровни вибраций не зависят от координат (это несправедливо лишь для точек, расположенных в непосредственной близости от ребер жесткости) и колеблются в пределах $\pm 1,5$ дБ. Корреляционные функции также получились близкими к расчетным для случая диффузного поля.

При опытах исследовалась система, состоящая из двух виброприемников, с резонансной частотой 15 кГц, расстояние между которыми изменялось. Когда виброприемники совмещались, реализовался тот случай, когда на пластине находится один виброприемник с удвоенным весом. В ходе эксперимента вес виброприемников изменялся от 40 до 280 г при помощи грузов, закрепляемых на их корпусе. Все измерения производились в третьоктавных полосах со средними частотами 1600 и 3200 гц.

Таким образом, величина коэффициента нагрузки A_0 изменялась как путем изменения веса виброприемников, так и путем изменения частоты.

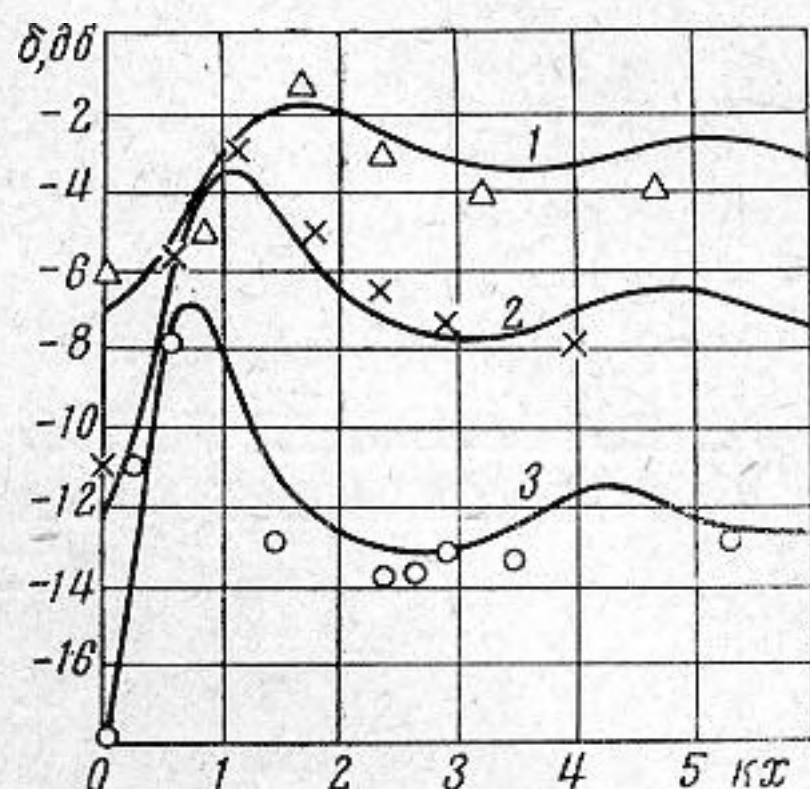
Результаты измерений приведены на фиг. 4 в виде изменения среднеквадратичного спектрального уровня в децибаллах по отношению к уровню в случае отсутствия искажающих виброприемников (этот уровень измерялся легким виброприемником, величина коэффициента нагрузки для которого не превосходила 0,3) в зависимости от расстояния между виброприемниками. Кривая 1 соответствует расчету для случая $A_0 = 1$, экспериментальные точки нанесены в виде треугольников. Кривая 2 и крестики соответствуют $A_0 = 2$, а кривая 3 и кружки — относятся к случаю $A_0 = 4$.

Из приведенных данных видно, что экспериментальные и теоретические результаты совпадают достаточно хорошо. Заметим, что экспериментальные результаты при $r = 0$ хорошо совпадают с кривой, построенной на фиг. 1, б, дающей снижение спектрального уровня в точке нахождения виброприемника в зависимости от коэффициента нагрузки в случае, когда на пластине установлен только один виброприемник.

В заключение подчеркнем, что полученные результаты носят достаточно общий характер и могут быть применены для исследования совместной работы антивибраторов, а также во всех тех случаях, когда размеры препятствий в качестве которых, в частности, могут служить опоры самой пластины, малы и имеются сведения об их механических импедансах.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. К л ю к и н. О влиянии виброметра на движение колеблющейся поверхности. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 38—44.
2. И. И. К л ю к и н. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем. Акуст. ж., 1960, 6, 2, 213—219.
3. И. И. К л ю к и н, Ю. Д. С е р г е е в. О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине. Акуст. ж., 1964, 10, 1, 60—65.
4. Л. М. Б р е х о в с к и х. Распространение волн изгиба по пластинам. Ж. техн. физ., 1944, 14, 9, 568—576.
5. А. В. Р и м с к и й - К о р с а к о в. Об излучении звука пластиной при колебаниях сложной формы. Ж. техн. физ., 1951, 21, 8, 970—985.
6. С. А. Г е р ш г о р и н. Колебания пластинок, нагруженных сосредоточенными массами. Прикл. матем. и механика, 1933, 1, 1.



Фиг. 4