

УДК 534.29

**РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СБЛИЖЕНИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ В СТОКСОВСКОМ РЕЖИМЕ ОБТЕКАНИЯ**

*Д. Б. Дианов, А. А. Подольский, В. И. Турубаров*

Рассмотрена задача о сближении двух сферических частиц, колеблющихся в звуковом поле при малых числах Рейнольдса. Получено приближенное решение для случая произвольной ориентации линии центров частиц относительно направления колебательной скорости среды. Показано существование оптимальной частоты звукового поля, соответствующей максимуму скорости сближения для данной пары частиц.

При движении сферической частицы с малыми числами Рейнольдса возникает поле скоростей, описываемое формулами Стокса [1]:

$$v_x = v_0 \left[ \frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{Rx^3}{r^3} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right]$$

$$v_y = \frac{3}{4} v_0 \frac{Rxy}{r^3} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_z = \frac{3}{4} v_0 \frac{Rxz}{r^3} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right),$$

где  $v_0$  — скорость движения частицы вдоль оси  $x$ ,  $R$  — радиус частицы,  $r$  — расстояние от частицы до точки наблюдения.

При использовании системы (1) для решения задачи о гидродинамическом взаимодействии аэрозольных частиц в звуковом поле мы ограничимся случаем  $R/r \ll 1$ . Тогда, с учетом взаимного влияния поля скоростей одной частицы на движение второй приближенные уравнения движения аэрозольных частиц можно написать в виде

$$m_1 \frac{dv_{1x}}{dt} = -6\pi\eta R_1 \left\{ v_{1x} - v - (v_{2x} - v) \left[ \frac{3}{4} \frac{R_2}{r} + \frac{3}{4} \frac{R_2(x_1 - x_2)^2}{r^3} \right]^2 - \right.$$

$$\left. - v_{2y} \frac{3}{4} \frac{R_2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^3} \right\},$$

$$m_1 \frac{dv_{1y}}{dt} = -6\pi\eta R_1 \left\{ v_{1y} - (v_{2x} - v) \frac{3}{4} \frac{R_2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^3} - \right.$$

$$\left. - v_{2y} \left[ \frac{3}{4} \frac{R_2}{r} + \frac{3}{4} \frac{R_2(y_1 - y_2)^2}{r^3} \right] \right\}, \quad (2)$$

$$m_2 \frac{dv_{2x}}{dt} = -6\pi\eta R_2 \left\{ v_{2x} - v - (v_{1x} - v) \left[ \frac{3}{4} \frac{R_1}{r} + \frac{3}{4} \frac{R_1(x_1 - x_2)^2}{r^3} \right]^2 - \right.$$

$$\left. - v_{1y} \frac{3}{4} \frac{R_1(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{r^3} \right\}$$



$$m_2 \frac{dv_{2y}}{dt} = -6\pi\eta R_2 \left\{ v_{2y} - (v_{1x} - v) \frac{3 R_1 (x_2 - x_1) (y_2 - y_1)}{4 r^3} - v_{1y} \left[ \frac{3 R_1}{4 r} + \frac{3 R_1 (y_1 - y_2)^2}{4 r^3} \right] \right\},$$

где  $v_{1x}$ ,  $v_{1y}$  и  $v_{2x}$ ,  $v_{2y}$  — компоненты скоростей первой и второй частиц относительно неподвижной системы координат,  $v = v_m \sin \omega t$  — колебательная скорость газовой среды,  $\eta$  — коэффициент вязкости среды,  $m_1$  — масса частицы радиуса  $R_1$ ,  $m_2$  — масса частицы радиуса  $R_2$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$  — координаты частиц (фиг. 1).

При составлении уравнений (2) система координат выбрана таким образом, что движение частиц происходит в плоскости  $XY$  ( $v_{1z} = v_{2z} = 0$ ). Заметим, что система уравнений (2) вследствие симметрии поля обтекания каждой частицы описывает движение частиц в течение целого периода. Легко показать, что если пренебречь тем обстоятельством, что изменение расстояния между частицами на протяжении периода звуковой волны является конечной величиной, то компоненты скоростей частиц будут представлять собой гармонические функции времени, и сближение частиц будет отсутствовать.

Полагая, что изменение расстояния между частицами на протяжении периода, будучи конечным, все же значительно меньше самого расстояния, мы получим приближенно

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\cong x_0 - \Delta x, & y_2 - y_1 &\cong y_0, \\ r &\cong r_0 \left( 1 - \frac{x_0 \Delta x}{r_0^2} \right), \\ \frac{1}{r} &\cong \frac{1}{r_0} \left( 1 + \frac{x_0 \Delta x}{r_0^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  — расстояние между равновесными положениями частиц;  $\Delta x = \frac{v_m}{\omega} [\mu_2 \cos(\omega t - \varphi_2) - \mu_1 \cos(\omega t - \varphi_1)]$ ,  $\mu = \cos \varphi$  — коэф-

фициент увлечения частицы,  $\varphi = \arctg \omega \tau$  — угол сдвига фазы [2],  $\tau = \frac{2\gamma R^2}{9\eta}$ ,  $\gamma$  — плотность частицы.

С учетом соотношений (3) система уравнений (2), при пренебрежении величинами 2-го порядка малости, может быть написана в виде

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{dv_{1x}}{dt} &= -v_{1x} + v + A_2 v_{2x} - A_2 v + B_2 v_{2y} - C_2 v_2 \frac{v_m^2}{\omega} \cos(\omega t - \varphi_2) \times \\ &\quad \times [\mu_2 \cos(\omega t - \varphi_2) - \mu_1 \cos(\omega t - \varphi_1)], \\ \tau_1 \frac{dv_{1y}}{dt} &= -v_{1y} + B_2 v_{2x} - B_2 v + E_2 v_{2y} - D_2 v_2 \frac{v_m^2}{\omega} \cos(\omega t - \varphi_2) \times \\ &\quad \times [\mu_2 \cos(\omega t - \varphi_2) - \mu_1 \cos(\omega t - \varphi_1)], \\ \tau_2 \frac{dv_{2x}}{dt} &= -v_{2x} + v + A_1 v_{1x} - A_1 v + B_1 v_{1y} - C_1 v_1 \frac{v^2}{\omega} \cos(\omega t - \varphi_2) \times \\ &\quad \times [\mu_2 \cos(\omega t - \varphi_2) - \mu_1 \cos(\omega t - \varphi_1)], \end{aligned} \quad (4)$$



$$\tau_2 \frac{dv_{2y}}{dt} = -v_{2y} + B_1 v_{1x} - B_1 v + E_1 v_{1y} - D_1 v_1 \frac{v_m^2}{\omega} \cos(\omega t - \varphi_2) \times \\ \times [\mu_2 \cos(\omega t - \varphi_2) - \mu_1 \cos(\omega t - \varphi_1)],$$

где

$$A_1 = \frac{3}{4} \frac{R_1}{r_0} \left(1 + \frac{x_0^2}{r_0^2}\right), \quad A_2 = \frac{3}{4} \frac{R_2}{r_0} \left(1 + \frac{x_0^2}{r_0^2}\right); \\ B_1 = \frac{3}{4} \frac{R_1 x_0 y_0}{r_0^3}, \quad B_2 = \frac{3}{4} \frac{R_2 x_0 y_0}{r_0^3}; \\ C_1 = \frac{3}{4} \frac{R_1 x_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right), \quad C_2 = \frac{3}{4} \frac{R_2 x_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right); \\ D_1 = \frac{3}{4} \frac{R_1 y_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right), \quad D_2 = \frac{3}{4} \frac{R_2 y_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right); \\ E_1 = \frac{3}{4} \frac{R_1}{r_0} \left(1 + \frac{y_0^2}{r_0^2}\right), \quad E_2 = \frac{3}{4} \frac{R_2}{r_0} \left(1 + \frac{y_0^2}{r_0^2}\right);$$

$\nu = \sin \varphi$  — коэффициент обтекания частицы.

Для нахождения из системы уравнений (4) постоянных составляющих скоростей движения частиц, обуславливающих изменение среднего расстояния между ними, произведем усреднение выражений (4) за период звуковой волны:

$$\bar{v}_{1x} - A_2 \bar{v}_{2x} - B_2 \bar{v}_{2y} = -C_2 \nu_2 \frac{v_m^2}{2\omega} [\mu_2 - \mu_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)], \\ \bar{v}_{1y} - B_2 \bar{v}_{2x} - E_2 \bar{v}_{2y} = -D_2 \nu_2 \frac{v_m^2}{2\omega} [\mu_2 - \mu_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)], \\ \bar{v}_{2x} - A_1 \bar{v}_{1x} - B_1 \bar{v}_{1y} = -C_1 \nu_1 \frac{v_m^2}{2\omega} [\mu_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \mu_1], \\ \bar{v}_{2y} - B_1 \bar{v}_{1x} - E_1 \bar{v}_{1y} = -D_1 \nu_1 \frac{v_m^2}{2\omega} [\mu_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \mu_1]. \quad (5)$$

Решение системы (5) имеет вид

$$\bar{v}_{1x} = \frac{3}{8} \frac{v_m^2}{\omega} \frac{R_2 x_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right) \nu_1 \nu_2 (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2), \\ \bar{v}_{2x} = \frac{3}{8} \frac{v_m^2}{\omega} \frac{R_1 x_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right) \nu_1 \nu_2 (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2), \\ \bar{v}_{1y} = \frac{3}{8} \frac{v_m^2}{\omega} \frac{R_2 y_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right) \nu_1 \nu_2 (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2), \\ \bar{v}_{2y} = \frac{3}{8} \frac{v_m^2}{\omega} \frac{R_1 y_0}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1\right) \nu_1 \nu_2 (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2), \quad (6)$$

или, переходя к полярной системе координат,

$$\bar{v}_{1r} = \frac{3}{8} \frac{v_m^2}{\omega} \frac{R_2}{r_0^2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \nu_1 \nu_2 (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2), \\ \bar{v}_{2r} = \frac{3}{8} \frac{v_m^2}{\omega} \frac{R_1}{r_0^2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \nu_1 \nu_2 (\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2), \quad (7)$$



$$\bar{v}_{1\theta} = \bar{v}_{2\theta} = 0,$$

$$\text{где } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{|y_0|}{x_0}.$$

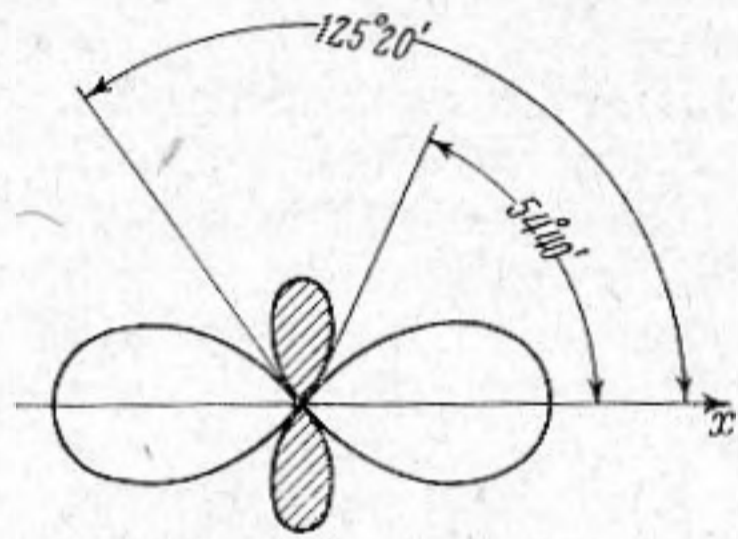
В рассматриваемом приближении тангенциальные составляющие постоянных скоростей частиц оказались равными нулю, и, следовательно, в процессе взаимодействия направление линии центров частиц в равновесных положениях остается неизменным. Постоянные скорости частиц имеют всегда одинаковые направления, причем меньшая частица имеет большую скорость. Скорость сближения или расхождения частиц определяется разностью  $\bar{v}_{1r}$  и  $\bar{v}_{2r}$ :

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{1r} - \bar{v}_{2r} = \frac{3v_m^2}{8\omega} \frac{R_2 - R_1}{r_0^2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) v_1 v_2 (\mu_1 v_2 - v_1 \mu_2), \quad (8)$$

время же сближения частиц с расстояния  $r_{02}$  до расстояния  $r_{01}$  выражается следующим образом:

$$t = \frac{8\omega}{9v_m^2} \frac{r_{02}^3 - r_{01}^3}{(R_2 - R_1) (3 \cos^2 \theta_0 - 1) v_1 v_2 (\mu_1 v_2 - v_1 \mu_2)}. \quad (9)$$

При  $\theta_0 = 0$  (осевое взаимодействие) выражение (8) совпадает с полученным в работе [3]. При положительном значении множителя  $(3 \cos^2 \theta_0 - 1)$ , т. е. когда угол  $\theta_0$  лежит в интервалах  $(0^\circ, 54^\circ 40')$  и  $(125^\circ 20', 180^\circ)$ , имеет место сближение частиц; при отрицательном значении того же множителя происходит расхождение частиц. Действительно, пусть  $(3 \cos^2 \theta_0 - 1) > 0$  и индекс 1 относится к малой частице, индекс 2 — к большой частице. Тогда, как видно из формулы (8),  $\bar{v}_{1r} > \bar{v}_{2r} > 0$  и, согласно фиг. 1, малая частица приближается к большой. Если индекс 1 относится к большой частице, а индекс 2 — к малой, то  $\bar{v}_{2r} < \bar{v}_{1r} < 0$  и, следовательно, положительное значение разности  $\bar{v}_{1r} - \bar{v}_{2r}$  свидетельствует, что и в этом случае малая частица приближается к большой. В частности, при осевом взаимодействии возможно только сближение частиц.



Фиг. 2

Угловая зависимость постоянной скорости, определяющей изменение среднего расстояния между частицами, представляет собой тело, получаемое при вращении изображенной на фиг. 2 кривой вокруг оси  $x$ . Заштрихованный участок соответствует интервалу углов, при которых частицы расходятся. Полный телесный угол, в котором происходит сближение частиц, составляет  $1,7 \pi$ ; расхождение имеет место в телесном угле  $2,3 \pi$ . Максимальная скорость сближения ( $\theta_0 = 0^\circ, 180^\circ$ ) вдвое превышает максимальную скорость расхождения ( $\theta_0 = 90^\circ$ ).

Из формулы (8) видно, что скорость сближения является функцией частоты. Оптимальная частота, т. е. частота, при которой скорость сближения максимальна, определяется выражением

$$f_{\text{опт}} = \frac{\omega_{\text{опт}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad (10)$$

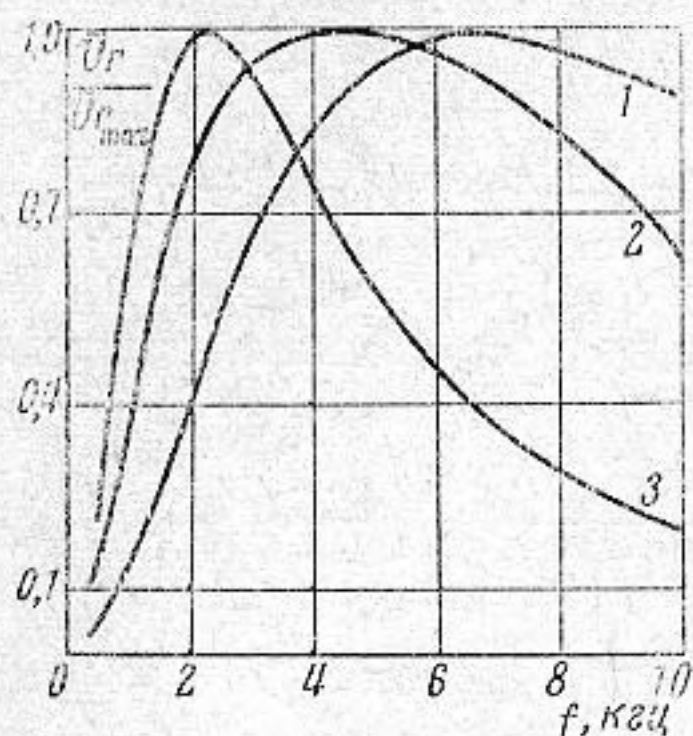
и скорость сближения при этом будет

$$\bar{v}_{r\text{max}} = \frac{v_m^2 \gamma}{12\eta r_0^2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \frac{R_1^2 R_2^2 (R_2 - R_1)^2 (R_2 + R_1)}{(R_1^2 + R_2^2)^2}. \quad (11)$$

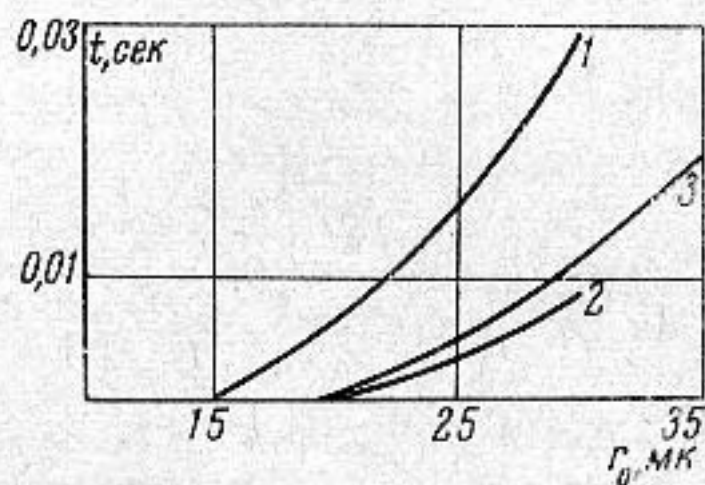


На фиг. 3 представлены зависимости  $\bar{v}_r / \bar{v}_{r \max}$  от частоты для следующих пар частиц: 1 —  $R_1 = 1 \text{ мк}$ ,  $R_2 = 2 \text{ мк}$ ; 2 —  $R_1 = 1 \text{ мк}$ ,  $R_2 = 3 \text{ мк}$ ; 3 —  $R_1 = 2 \text{ мк}$ ,  $R_2 = 3 \text{ мк}$ . Из графиков видно, что для полидисперсного аэрозоля имеет смысл говорить не об оптимальной частоте звукового поля, а о целой области частот, тем более если учесть, что при коагуляции происходит непрерывное изменение дисперсного состава аэрозоля.

По формуле (9) были рассчитаны времена сближения при оптимальных частотах звукового поля для тех же пар частиц, что и на фиг. 3. Изображенные на фиг. 4 графики представляют собой зависимости времени сближения при осевом взаимодействии от расстояния  $r_0$  до расстояния  $r_{01}$  (15 мк для кри-



Фиг. 3



Фиг. 4

вой 1 и 20 мк для кривых 2 и 3). Нумерация кривых на фиг. 4 соответствует нумерации на фиг. 3.

Таким образом, стоксовское взаимодействие оказывается существенным лишь на достаточно малых расстояниях между частицами и, следовательно, может играть роль в коагуляции аэрозолей лишь в том случае, когда произошло предварительное сближение частиц под действием других сил.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. II, М., Физматгиз, 1963.
2. Е. П. Медников. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1963.
3. А. А. Подольский, В. И. Турубаров. К теории сближения аэрозольных частиц в звуковом поле в стоксовском режиме обтекания. Акуст. ж., 1966, 12, 2, 266—269.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) Поступила в редакцию  
2 июля 1965 г.

Ленинградский институт авиационного приборостроения