АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 1

УДК 534.26

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТЕНКОЙ

А. Д. Лапин

Рассмотрена задача об излучении звука упругой периодически неоднородной стенкой, колеблющейся под действием статистически распределенных сил. Задача сведена к решению бесконечной системы алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Для некоторых значений параметров неоднородности эта система уравнений была решена численно методом последовательных приближений. Исследовано влияние неодородностей стенки и статистических параметров силы на излучение.

В работах [1, 2] было рассчитано звуковое поле, создаваемое однородной упругой стенкой, колеблющейся под действием статистически распределенных сил. Представляет интерес рассмотреть эту задачу в более общей постановке, а именно в предположении, что упругая стенка неоднородна. В настоящей работе дано решение задачи об излучении звука упругой периодически неоднородной стенкой. Никаких ограничений на величину неоднородностей здесь не накладывается. Зависимость вынуждающей силы от времени предполагается гармонической; множетель $e^{-i\omega t}$ мы будем всюду опускать.

Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость xy совпадала с границей раздела между стенкой и средой, а ось z была направлена от стенки в среду. Обозначим плотность среды и скорость звука в ней соответственно через ρ_0 и c_0. Пусть на стенку, свойства которой периодически меняются по координате x, действует распределенная сила $f(x, y)$, являющаяся однородной статистической функцией точки. Предположим, что уравнение свободных колебаний стенки в отсутствие среды имеет вид $(\rho\omega^2 + L)\zeta = 0$, где L — линейный дифференциальный оператор, характеризующий упругие свойства стенки, ρ — поверхностная плотность стенки, ζ — поперечное смещение. Например, для мембраны оператор L равен $T_0\nabla^2$, где T_0 — натяжение мембраны. Для пластинки, совершающей изгибные колебания, этот оператор, как известно [3, 4], имеет вид

$$L = \left\{ (1-\sigma)\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \nabla^2(D\nabla^2) \right\},$$

где σ — коэффициент Пауссона, D — цилиндрическая жесткость. Величина D определяется по формуле

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

где h — толщина пластинки, E — модуль Юнга.

Обозначим через $p(x, y, z)$ звуковое давление в среде. Тогда уравнение вынужденных колебаний стенки под действием силы $f(x, y)$ при учете реакции среды будет иметь вид

$$-(\rho\omega^2 + L)\zeta + p(x, y, o) = f(x, y). \quad (1)$$

Величины ζ и p связаны также граничным условием

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = \omega^2\rho_0\zeta, \quad (2)$$

означающим непрерывность нормальных компонент скорости на границе раздела между стенкой и средой.

Решение будем искать методом Фурье. Согласно работе [5], разложим функцию $f(x, y)$ на гармоники по формуле Фурье — Стилтьеса

$$f(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(mx+ny)} dg, \quad (3)$$

где $g(m, n)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями. Последнее означает, что функция $g(m, n)$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{dg\,(m, n)\,dg^*\,(m', n')} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq m' \text{ или } n \neq n' \\ G\,(m, n)\,dm\,dn & \text{при } m = m',\ n = n', \end{cases}$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину, а черта — статистическое усреднение. Функция $G(m, n)$ связана с функцией корреляции силы

$$R(x - x',\ y - y') = \overline{f(x, y) f^*(x', y')}$$

формулой

$$G(m, n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x, \tau_y)\, e^{-i(m\tau_x + n\tau_y)}\, d\tau_x\, d\tau_y. \quad (4)$$

Найдем поля, обусловленные в отдельности каждой из гармоник, присутствующих в разложении (3). Искомое поле получим сложением этих полей.

Найдем сперва решение для вынуждающей силы $f_{mn}(x, y) = a \exp[i(mx + ny)]$, где $a = \text{const}$. Поскольку свойства стенки изменяются периодически по координате x, смещение ζ_{mn} можно представить в форме

$$\zeta_{mn}(x, y) = a \exp[i(mx + ny)] F(x),$$

где $F(x)$ — периодическая функция, период которой равен периоду неоднородностей. Эту функцию будем искать в виде ряда Фурье:

$$F(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{d} q\right) x\right],$$

где B_q — искомые коэффициенты, d — период неоднородностей. Из волнового уравнения и граничного условия (2) следует, что сила f_{mn} создает звуковое поле

$$p_{mn}(x, y, z) = a \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q(m, n) \exp\{i[(m + \Omega_q)x + ny + \sqrt{k^2 - \gamma_q^2}\, z]\}, \quad (5)$$

где

$$A_q = -\frac{i\omega^2\rho_0}{\sqrt{k^2 - \gamma_q^2}} B_q,\ \Omega_q = \frac{2\pi}{d} q,\ k = \frac{\omega}{c_0},\ \gamma_q^2 = [(m + \Omega_q)^2 + n^2].$$

Это поле состоит из плоских волн («спектров»), направляющие косинусы которых определяются условием Брэгга.

Для определения величин B_q воспользуемся уравнением (1). Разложим параметры, характеризующие неоднородные свойства стенки, в ряды Фурье, подставим эти ряды и величины ζ_{mn}, p_{mn} и f_{mn} в уравнение (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых экспонентах в правой и левой части. Тогда мы получим бесконечную систему алгебраических уравнений для коэффициентов B_q:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \{L_{ql} + \omega^2 M_l\} B_{q-l} + \frac{i\omega^2 \rho_0}{\sqrt{k^2 - \gamma_q^2}} B_q = -\delta_{0q}, \tag{6}$$

где

$$L_{ql} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-i[(m+\Omega_q)x+ny]} L\{e^{i[(m+\Omega_{q-l})x+ny]}\}\, dx,$$

$$M_l = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \rho(x) e^{-i\Omega_l x} dx, \quad \delta_{0q} = \begin{cases} 0 \text{ при } q \neq 0 \\ 1 \text{ при } q = 0. \end{cases}$$

Например, для мембраны величины L_{ql} равны $-T_0\gamma_q^2\delta_{0l}$, а для пластинки они определяются по формуле

$$L_{ql} = \{(1-\sigma) n^2 \Omega_l^2 - \gamma_q^2 \gamma_{(q-l)}^2\} N_l,$$

где

$$N_l = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} D(x) e^{-i\Omega_l x}\, dx.$$

Решение системы уравнений (6) дает величины B_q и, следовательно, величины A_q. Суммируя действие всех гармоник f_{mn}, мы получим

$$\zeta(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} B_q(m, n) \exp\{i[(m + \Omega_q)x + ny]\}\, dg, \tag{7}$$

$$p(x, y, z) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} A_q(m, n) \exp\{i[(m+\Omega_q)x + ny + \sqrt{k^2 - \gamma_q^2 z}]\}\, dg.$$

Эти формулы дают решение задачи для случая бесконечной стенки.

Найдем звуковое поле, излучаемое стенкой конечных размеров, колеблющейся под действием вынуждающей силы $f(x, y)$. Радиус корреляции этой силы мы будем предполагать малым по сравнению с размерами стенки. В этом предположении можно считать, что смещение стенки вдали от ее краев не зависит от краевых условий и выражается формулой (7). Для вычисления звукового поля используем одночленную формулу Грина:

$$p = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial p}{\partial z} dS,$$

где S — поверхность стенки, r — расстояние от элемента поверхности dS до точки наблюдения. Согласно формулам (2) и (7) величина $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0}$ имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = \omega^2 \rho_0 \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(m, n) e^{i(mx+ny)}\, dm\, dn, \text{ где}$$

$$g_1(m,n)=\sum_{q=-\infty}^{\infty} g(m-\Omega_q,n)B_q(m-\Omega_q,n). \qquad (8)$$

Подставим величину $(\partial p\,/\,\partial z)_{z=0}$ в формулу Грина и выполним в ней интегрирование, считая, что точка наблюдения находится во Фраунгоферовой зоне. Поскольку аналогичные интегралы подробно вычисляются в работе [1], мы сразу приведем окончательный результат. Поле p в зоне Фраунгофера запишется в виде

$$p=-2\pi\rho_0 k^2 c_0^2\frac{e^{ikr_0}}{r_0}g_1(k\cos\theta\cos\varphi,\, k\cos\theta\sin\varphi),$$

где r_0 — расстояние от точки наблюдения до начала координат, взятого на поверхности стенки, θ — угол между направлением на точку наблюдения и стенкой и φ — угол между проекцией этого направления на стенку и осью x.

Вычислим среднюю плотность потока энергии в направлении $(\theta,\ \varphi)$. Эта величина определяется выражением

$$I=\frac{\overline{pp^*}}{2\rho_0 c_0}=2\pi^2\rho_0\frac{k^4c_0^3}{r_0^2}\overline{g_1(\tilde m,\tilde n)g_1^*(\tilde m,\tilde n)},$$

где $\tilde m=k\cos\theta\cos\varphi$, $\tilde n=k\cos\theta\sin\varphi$. Пользуясь формулой (8) и соотношением

$$\overline{g(m,n)g^*(m,n)}=\frac{1}{(2\pi)^4}\iint_S\iint_S \overline{f(x,y)f^*(x',y')}\exp\{i[m(x'-x)+$$

$$+n(y'-y)]\}\,dx\,dy\,dx'\,dy'=\frac{S}{(2\pi)^2}G(m,n),$$

величину I можно представить в виде

$$I=\frac{\rho_0k^4c_0^3}{2r_0^2}S\sum_{q=-\infty}^{\infty}|B_q(\tilde m-\Omega_q,\tilde n)|^2G(\tilde m-\Omega_q,\tilde n). \qquad (9)$$

Подставляя в эту формулу коэффициенты B_q, являющиеся решением системы уравнений (6), и спектральную плотность интенсивности G, вычисленную по формуле (4), мы найдем значение плотности потока энергии в направлении $(\theta,\ \varphi)$.

В некоторых частных случаях решение системы уравнений (6) очевидно. Так, например, для всех m и n, удовлетворяющих соотношению $\gamma_q^2=k^2$, оно имеет вид $B_q(m,\ n)=0$. Подставляя это решение в формулу (9), мы получим, что в направлении $\theta=0^0$ стенка ничего не излучает. Это объясняется тем, что колебания стенки, происходящие по оси z, не могут создать звуковые волны, распространяющиеся перпендикулярно этой оси.

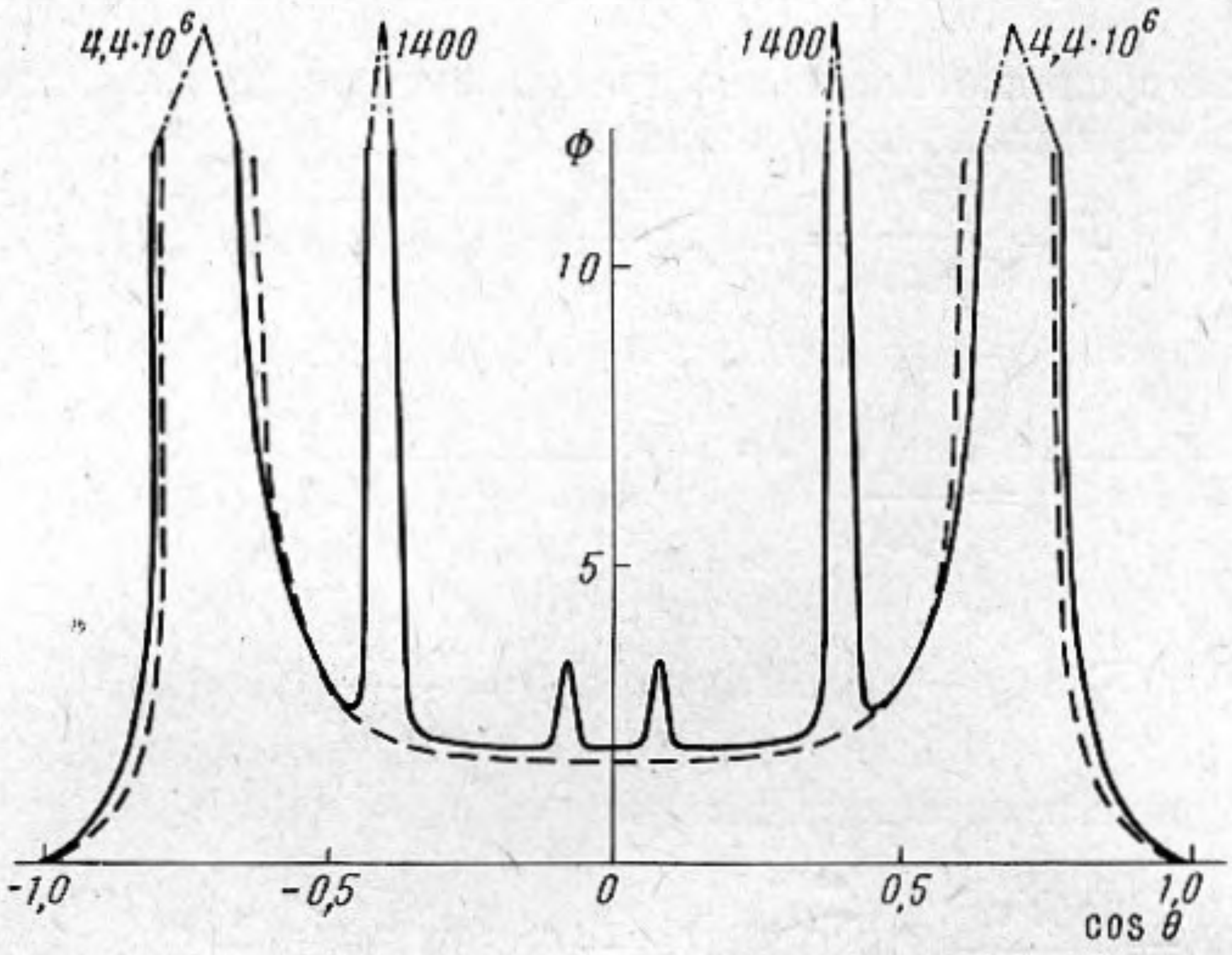
В общем случае решение системы уравнений (6) удобно искать численно методом последовательных приближений. Для возможности применения этого метода достаточно, чтобы система уравнений была регулярной [6]. Можно показать, что в рассматриваемом случае условие регулярности выполняется, если функции, характеризующие неоднородные свойства стенки, являются достаточно гладкими. В нулевом приближении метода последовательных приближений мы имеем

$$B_q=-\frac{\delta_{0q}}{\left\{L_{00}+\omega^2M_0+\dfrac{i\omega^2\rho_0}{\sqrt{k^2-\gamma_0^2}}\right\}}.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (9), мы получим решение задачи для однородной стенки, совпадающее с решением, данным в работе [1]. В первом приближении метода последовательных приближений мы получим для B_q следующую формулу:

$$B_q = -\frac{\{\delta_{0q} + (1-\delta_{0q})[L_{qq} + \omega^2 M_q] B_0(m, n)\}}{\left\{L_{q0} + \omega^2 M_0 + \dfrac{i\omega^2 \rho_0}{\sqrt{k^2 - \gamma_q^2}}\right\}}.$$

Это приближение учитывает влияние малых неоднородностей стенки на ее излучение. При больших неоднородностях нужно пользоваться высшими приближениями.



Фиг. 1

В качестве иллюстрации рассчитаем излучение стальной пластинки, имеющей толщину

$$h(x) = h_0 + h_1 \cos\left(\frac{2\pi}{d} x\right)$$

в воздухе, приняв при расчете следующие значения параметров: $h_1 / h_0 = 0{,}25$; $kh_0 = 0{,}4$; $kd = 20$; $\rho_{06} = \rho / h = 7{,}8$ *г/см*^{3}; $E = 2{,}1 \cdot 10^{12}$ *дн / см*^{2}; $\sigma = 0{,}29$; $\rho_0 = 0{,}0013$ *г/см*^{3}; $c_0 = 330$ *м/сек*. Функцию корреляции внешней силы мы выберем в виде $R(\tau_x, \tau_y) = \sigma^2 \exp\{-{}^{\tau^2}/{}_{\tau_0^2}\}$, где $\sigma^2 = \overline{f(x, y) f^*(x, y)}$, $\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2$, τ_0 — характерный масштаб силы. Для такой силы функция $G(m, n)$ запишется так:

$$G(m, n) = \frac{\sigma^2 \tau_0^2}{4\pi} \exp\left\{-\frac{1}{4}(m^2 + n^2)\tau_0^2\right\}.$$

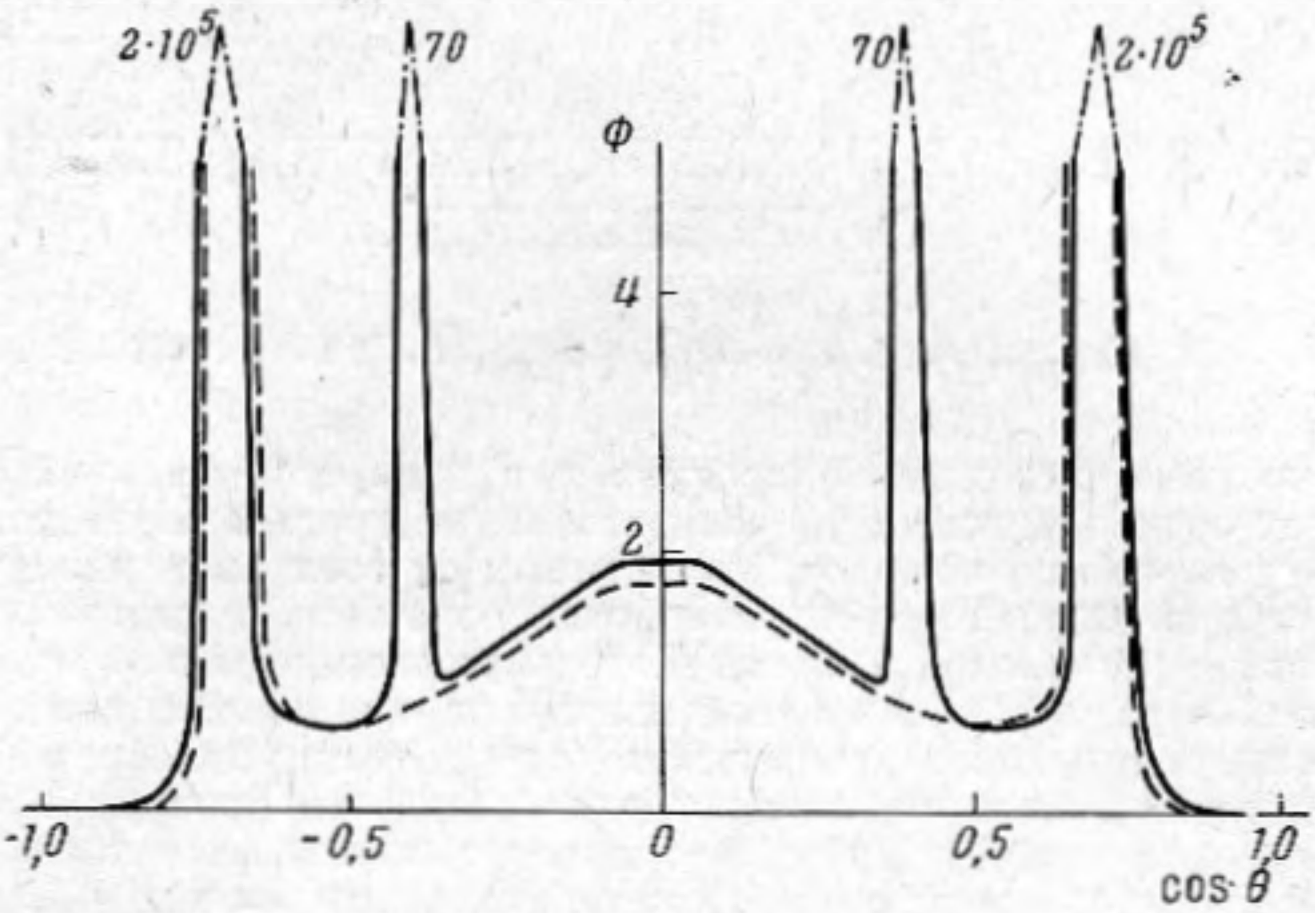
На фиг. 1 и фиг. 2 сплошными линиями представлены графики величины

$$\Phi(\theta) = 8\pi \cdot 10^7 \frac{\rho_0 c_0 r_0^2}{\sigma^2 (k\tau_0)^2 S} I(\theta, \varphi = 0)$$

в функции $\cos\theta$, рассчитанные указанным способом для неоднородной пластинки соответственно при $k\tau_0 = 1$ и $k\tau_0 = 5$. Для сравнения на тех же фигурах пунктирными линиями нанесены соответственные графики для однородной пластинки. Резкое увеличение величины Φ происходит вблизи направлений, удовлетворяющих условию

$$|\cos\theta_{\max}| = \frac{c_0}{c_{\text{изг}}} \mp q\frac{2\pi}{kd},$$

где $c_{\text{изг}} = (\omega^2 D_0 / \rho_{0б} h_0)^{1/4}$ — скорость распространения изгибной волны в однородной пластинке. При выбранных параметрах имеем $|\cos\theta_{\max}| = 0{,}083$; $0{,}40$; $0{,}71$. Численные значения величины $\Phi(\theta_{\max})$ приведены на



Фиг. 2

графиках. Из графиков видно, что вблизи направлений $\theta_{\max}$ неоднородности пластинки влияют на излучение наиболее сильно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исакович. Излучение упругой стенки, колеблющейся под действием статистически распределенных сил. Сб. «Исслед. по экспер. и теор. физике». Памяти Г. С. Ландеберга. М., Изд-во АН СССР, 1959, 117—120.
2. Л. М. Лямшев. К теории излучения звука тонкими упругими оболочками и пластинками. Акуст. ж., 1959, 5, 4, 420—427.
3. И. М. Бабаков. Теория колебаний. М., ГТТИ, 1958.
4. В. Н. Красильников. Рефракция изгибных волн. Акуст. ж., 1962, 8, 1, 79—84.
5. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. мат. наук, 1952, 7, 5 (51), 3—168.
6. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1949.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
17 апреля 1965 г.