

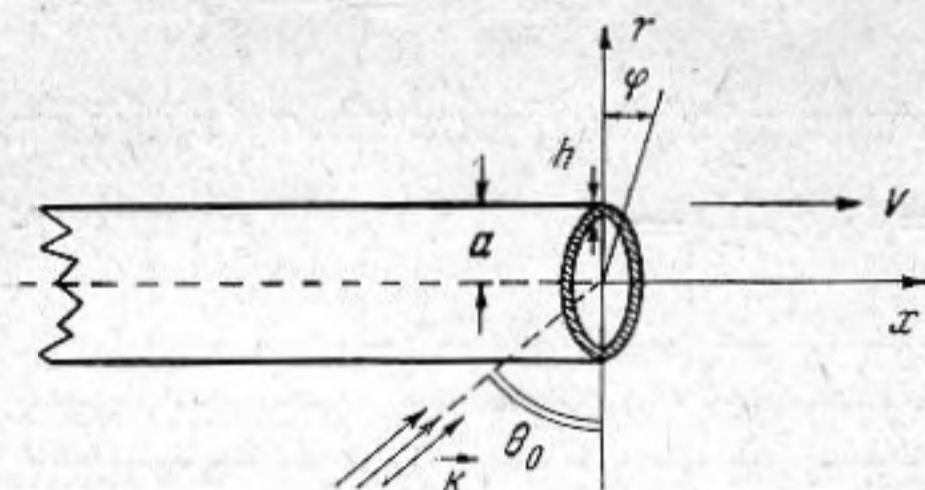
УДК 534.26

**РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ТРУБОЙ
В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

Л. М. Лямшев

Получено точное решение задачи о дифракции плоской монохроматической звуковой волны на полубесконечной упругой цилиндрической тонкой оболочке кругового сечения в движущейся среде. Предполагается, что направление потока совпадает с образующей оболочки, и учитываются все типы колебаний оболочки. Детально исследуется часть поля рассеянной волны, связанная с осесимметричными колебаниями.

Ниже приводится строгое решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны тонкой полубесконечной упругой трубой в движущейся среде. Рассмотрение этой задачи представляет известный принципиальный и практический интерес. Анализ ее строгого решения, например, дает возможность выяснить некоторые важные особенности эффекта незеркального отражения звука. Следует заметить также, что в настоящее время значительное внимание уделяется изучению генерации звука турбулентными потоками. В ряде интересных случаев для расчета спектральной интенсивности и корреляционных характеристик поля излучения турбулентного потока достаточно знать решение соответствующей дифракционной задачи и функцию корреляции пульсаций давления или тензор корреляции пульсаций скорости в турбулентном потоке [1—3]. В этой связи решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на полубес-



конечной упругой трубе в движущейся среде можно использовать для расчета акустического поля реактивной турбулентной струи, причем в рамках этого расчета может быть рассмотрена роль колебаний оболочки — сопла в формировании поля излучения струи*. Ниже мы ограничимся лишь постановкой и решением дифракционной задачи.

Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, x и предположим, что упругая труба кругового сечения занимает область $-\infty < x \leq 0, 0 < r \leq a$ **.

Направление движения среды пусть совпадает с положительным направлением оси x (см. фигуру). Пусть на трубу падает под углом Θ_0 к ее оси плоская монохроматическая звуковая волна, потенциал

* Заметим, что одной из первых работ, в которой указывалось на важную роль дифракционных и рефракционных эффектов в генерации звука реактивной струей, является работа Рибнера [4].

** Стенки оболочки будем считать настолько тонкими, что их толщиной можно пренебречь.

которой φ_0 определяется выражением

$$\varphi_0 = \exp[ik_x x + ik_r r \cos \psi], \quad (1)$$

где $k_x = k(\sin \theta_0 - M)$, $k_r = k \sqrt{1 - M^2} \cos \theta_0$, $k = k_0 / \sqrt{1 - M^2}$,

$k_0 = \omega/c$, M — число Маха.

Необходимо определить потенциал φ звукового поля в движущейся среде. Функция φ является решением уравнения

$$\left[\Delta + k_0^2 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial r} \Big|_{r=a} = i\omega \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) w, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (3)$$

$$L_1 w = L_2 (p^+ - p^-) \Big|_{r=a}, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (4)$$

где

$$p = i\omega \rho \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi.$$

На краю оболочки должны выполняться условия на ребре:

$\varphi = \text{const}$, $x = 0^\pm$, $r = a \pm 0$, $\partial \varphi / \partial r = \text{const} \cdot x^{-1/2}$, $x = 0^+$, $r = a \pm 0$; φ — должна быть регулярной функцией на бесконечности непрерывной на интервале $0 < x < +\infty$ и $\partial \varphi / \partial r$ — непрерывной на всем интервале $-\infty < x < +\infty$. В выражениях, приведенных выше, φ^+ и φ^- , p^+ и p^- соответственно значения потенциала и давления при $r = a \pm 0$, L_1 и L_2 — дифференциальные выражения четного порядка с постоянными коэффициентами, причем порядок дифференциального выражения L_1 выше порядка L_2 . Выражение (4) представляет собой уравнение движения цилиндрической оболочки. В случае, например, т. н. пологой цилиндрической оболочки

$$L_1 \equiv \nabla^8 + \frac{1 - \nu^2}{\mu^2 a^4} \frac{\partial}{\partial x^4} - \omega^2 \frac{\rho_1 h}{D} \nabla^4, \quad L_2 \equiv -\frac{\nabla^4}{D},$$

где

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \quad \mu^2 = \frac{h^2}{12a^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

D — цилиндрическая жесткость и h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга и ρ_1 — плотность материала оболочки.

Заметим, что здесь рассматриваются малые и устойчивые колебания оболочки. Вопросы динамической неустойчивости оболочки в потоке, естественно, не рассматриваются.

Краевые условия на конце трубы для простоты будем считать самосопряженными, а L_1 — самосопряженным дифференциальным оператором $2l$ -го порядка. Пользуясь формулой Грина и краевыми условиями, напишем уравнение

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{1 - M^2}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r'} \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} [\varphi^+(x', \psi') - \varphi^-(x', \psi')] \times \right. \\ \left. \times \exp[-ikM(x - x')] \frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} a dx' d\psi' \right\}_{r'=a}, \quad x \leq 0, \quad (5)$$

где

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \{(x - x')^2 - (1 - M^2)[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\psi - \psi')]\}^{1/2}.$$

Продифференцируем правую и левую части этого уравнения по r , устремим r к a и, пользуясь условием (3), а также вводя следующие обозначения:

$$u(x, \psi) = \begin{cases} \omega w(x, \psi), & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} ; g(x, \psi) = \begin{cases} k_r \cos \psi \exp[ik_x x + ik_r a \cos \psi], & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x, \psi) = \begin{cases} \varphi^+(x, \psi) - \varphi^-(x, \psi), & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x, \psi) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{a(1 - M^2)}{4\pi i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(x', \psi') \exp[-ikM(x - x')] \times \right. \\ \left. \times \frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' d\psi' \right\}_{r=r'=a}, & x > 0, \end{cases}$$

получаем систему интегродифференциальных уравнений:

$$\left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, \psi) + f(x, \psi) = g(x, \psi) + \frac{a(1 - M^2)}{4\pi i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(x', \psi') \frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' d\psi' \right\}_{-\infty < x < +\infty, r=r'=a}, \quad (6)$$

$$L_x u(x, \psi) = i\omega^2 \rho L_2 \left(1 + \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, \psi), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (7)$$

Для решения интегродифференциальных уравнений (6) и (7) воспользуемся интегральным преобразованием Фурье. Заметим, что в дальнейшем мы всюду будем считать волновое число k комплексным, полагая $k = k_1 + i\varepsilon$, в окончательных же результатах положим $\varepsilon = 0$. Умножим правые и левые части уравнений (6) и (7) на $\exp[-ipx - in\psi]$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, а по ψ от 0 до 2π . Пользуясь в необходимых случаях правилом интегрирования по частям, получаем

$$\left(1 - \frac{M}{k_0} p\right) U_+(p, n) + P_1 + F_-(p, n) = \Gamma_+(p, n) + \frac{\pi a(1 - M^2)v^2}{2} H_n^{(1)}(va) J_n'(va) \Phi_+(p, n), \quad (8)$$

$$M_1(p, n) U_+(p, n) + P_2(p, n) = i\omega^2 \rho M_2(p, n) \left(1 - \frac{M}{k_0} p\right) \Phi_+(p, n), \quad (9)$$

где $v^2 = (1 - M^2)[k^2 - (p + kM)^2]$, $H_n^{(1)}(\alpha)$, $J_n(\alpha)$ — соответственно функция Ханкеля первого рода и функция Бесселя; штрих означает дифференцирование по аргументу,

$$U_+(p, n) = \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} u(x, \psi) \exp[-ipx - in\psi] dp d\psi,$$

$$F_-(p, n) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x, \psi) \exp[-ipx - in\psi] dp d\psi \text{ и т. д.}$$

$M_1(p, n)$ и $M_2(p, n)$ — полиномы, содержащие лишь четные степени функции p , причем $M_1(p, n)$ является полиномом степени $2l$ в соответствии с порядком дифференциального оператора L_1 ; с точностью до коэффициентов $P_1 \equiv \omega w(0)$,

$$P_2(p) \equiv \sum_{k=0}^{2l-1} (-ip)^k w^{(2l-k)}(0),$$

где индекс в скобках обозначает порядок производной по x , а индекс без скобок — показатель степени.

Уравнения (8) и (9) необходимо решить относительно функции $\Phi_+(p, n)$. Рассмотрим в связи с этим поведение функций, входящих в уравнения (8) и (9), в плоскости комплексной переменной p . Для функции $\Gamma_+(p, n)$ мы имеем выражение

$$\Gamma_+(p, n) = \frac{2\pi J_n'(k_0 a) k_0 i^{n+1}}{p - k_{1x} - i\varepsilon_x},$$

где $\varepsilon_x = \varepsilon(\sin \theta_0 - M)$. Функция $\Gamma_+(p, n)$ регулярна в верхней полуплоскости при $\text{Im } p > \varepsilon_x = \varepsilon(\sin \theta_0 - M)$. Область регулярности функций $\Phi_+(p, n)$ и $U_+(p, n)$ устанавливается из того факта, что $\varphi(x)$ и $u(x)$ должны исчезать как $\exp(-\varepsilon_x |x|)$ при $x \rightarrow \infty$, а $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям на ребре. Нетрудно выяснить, что функция $F_-(p, n)$ регулярна в нижней полуплоскости при $\text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$. Произведение $H_n^{(1)'}(va) J_n'(va)$ регулярно в полосе $-\varepsilon(1 + M) < \text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$. Следовательно, функции, входящие в систему уравнений (8) и (9), имеют общую полосу регулярности $\varepsilon(\sin \theta_0 - M) < \text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$ и указанная система функциональных уравнений может быть решена методом Винера — Хопфа.

Для этого исключим из уравнений (8) и (9) функцию $U_+(p, n)$. Из уравнения (9) имеем

$$U_+(p, n) = \frac{i\omega^2 \rho M_2(p, n) \left(1 - \frac{M}{k_0} p\right) \Phi_+(p, n) - P_2(p, n)}{M_1(p, n)}. \quad (10)$$

Подставляя равенство (10) в уравнение (8), получаем

$$\begin{aligned} M_1(p, n) F_-(p, n) - \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right) P_2(p, n) + M_1(p, n) P_2(p, n) = \\ = M_1(p, n) \Gamma_+(p, n) + \frac{1 - M^2}{2} K(p, n) \Phi_+(p, n), \end{aligned}$$

где

$$K(p, n) \equiv v^2 \pi a H_n^{(1)'}(va) I_n'(va) M_1(p, n) - \frac{2i\omega^2 \rho M_2(p, n) \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right)^2}{1 - M^2}$$

Функция $K(p, n)$ регулярна в полосе $-\varepsilon(1 + M) < \text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$. Ее можно представить в виде отношения двух функций:

$$K(p, n) = \frac{K_+(p, n)}{K_-(p, n)}, \quad (11)$$

одна из которых, $K_+(p, n)$, регулярна в верхней полуплоскости при $\text{Im } p > -\varepsilon(1 + M)$, а другая, $K_-(p, n)$ — в нижней полуплоскости при $\text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$. Подставляя равенство (11) в уравнение (10) и полагая

$$\Gamma_+(p, n) K_-(p, n) = L_+(p, n) - L_-(p, n), \quad (12)$$

где $L_+(p, n)$ регулярна при $\text{Im } p > \varepsilon(\sin \theta_0 - M)$, а $L_-(p, n)$ — регулярна при $\text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$, получаем

$$M_1(p, n)L_+(p, n) + \frac{1 - M^2}{2} K_+(p, n)\Phi_+(p, n) = M_1(p, n) \times \\ \times F_-(p, n)K_-(p, n) - \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right) P_2(p, n)K_-(p, n) + \\ + M_1(p, n)P_1K_-(p, n) + M_1(p, n)L_-(p, n). \quad (13)$$

Функции в левой части равенства (13) регулярны в верхней полуплоскости при $\text{Im } p > \varepsilon(\sin \theta_0 - M)$, а функции в правой части равенства регулярны в нижней полуплоскости при $\text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$.

На основании известной теоремы Лиувилля правые и левые части равенства (13) должны быть равны некоторому полиному функции p .

$$M_1(p, n)L_+(p, n) + \frac{1 - M^2}{2} K_+(p, n)\Phi_+(p, n) = S(p, n). \quad (14)$$

$$M_1(p, n)F_-(p, n)K_-(p, n) - \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right) P_2(p, n)K_-(p, n) + \\ + M_1(p, n)P_1K_-(p, n) + M_1(p, n)L_-(p, n) = S(p, n). \quad (15)$$

Из равенства (14) получаем

$$\Phi_+(p, n) = \frac{S(p, n) - M_1(p, n)L_+(p, n)}{\frac{1 - M^2}{2} K_+(p, n)}. \quad (16)$$

Теперь для определения искомой функции $\Phi_+(p, n)$ надо знать явный вид полинома $S(p, n) \equiv S(p)$ *.

Выполнив факторизацию выражения (11) и (12), получаем (см. приложение)

$$K_+(p) = \left[\prod_{i=1}^l (p - \eta_i) \right] \exp \left[- \int G(p) dp \right], \quad (17)$$

$$K_-(p) = \left\{ \left[\prod_{j=1}^l (p - \eta_j) \right] \exp \left[+ \int G(p) dp \right] \right\}^{-1}, \quad (18)$$

где η_i — полюсы функции $K_+(p)$, лежащие в нижней полуплоскости, а η_j — полюсы функции $K_-(p)$, лежащие в верхней полуплоскости,

$$G(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K'(\eta)}{K(\eta)} \frac{d\eta}{\eta - p}$$

и значение интеграла по порядку величины равно $\mu = \frac{k_f^3 \rho}{k^4 \rho_1 h} \ll 1$,

$$L_+(p) = \frac{2\pi k_r J_n'(k_r a) i^{n+1}}{p - k_x} K_-(k_x). \quad (19)$$

Рассматривая асимптотическое поведение функций, входящих в левую часть уравнения (14) при $|p| \rightarrow \infty$, убеждаемся, что степень полинома $S(p)$ должна быть не выше $2l - 1$, где, как уже отмечалось, $2l$ — сте-

* В дальнейшем мы будем писать $M(p)$ вместо $M(p, n)$, $U_+(p)$ вместо $U_+(p, n)$, т. е. $U_+(p, n) \equiv U_+(p)$, $K(p) \equiv K(p, n)$ и т. д.

пень полинома $M_1(p) = M_1(p, n)$, т. е.

$$S(p) = \sum_{k=0}^{2l-1} C_k p^k. \quad (20)$$

Теперь необходимо определить неизвестные коэффициенты C_k в выражении (20) и коэффициенты $w^{(2l-k)}(0)$ функции $P_2(p)$. Заметим, что всего имеется $4l$ неизвестных коэффициентов, $2l$ коэффициентов полинома $S(p)$ и столько же неизвестных коэффициентов функции $P_2(p)$. Прежде всего воспользуемся свойством регулярности функций $U_+(p)$ и $F_-(p)$ в соответствующих полуплоскостях. На основании уравнения (15) напишем

$$F_-(p) = \frac{S(p) + \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right) P_2(p) K_-(p)}{M_1(p) K_-(p)} - \frac{L_-(p)}{K_-(p)} - P_1. \quad (21)$$

Из равенств (10) и (21) следует, что нули функции $M_1(p)$ как бы являются полюсами функций $F_-(p)$ и $U_+(p)$. Корни уравнения $M_1(p) = 0$ есть волновые числа для свободных колебаний (нормальных волн), способных распространяться вдоль безграничной цилиндрической оболочки (трубы), находящейся в вакууме; $M_1(p)$ — полином четной степени. Полагая существование небольшого затухания колебаний в оболочке, можно показать, что корни уравнения $M_1(p) = 0$ существуют парами, причем половина корней расположена в верхней полуплоскости комплексной переменной p , половина — в нижней полуплоскости. Из свойства регулярности функций $U_+(p)$ и $F_-(p)$ следует, что в соответствующих нулях функции $M_1(p)$ в верхней и нижней полуплоскостях справедливы уравнения

$$i\omega^2 \rho M_2(\eta_i) \left(1 - \frac{M}{k_0} \eta_i\right) \Phi_+(\eta_i) - P_2(\eta_i) = 0 \quad l = 1, 2, 3 \dots l, \quad (22)$$

$$S(\eta_j) + \left(1 - \frac{M}{k_0} \eta_j\right) P_2(\eta_j) K_-(\eta_j) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \dots l, \quad (23)$$

где η_i — корни уравнения $M_1(p) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости, а η_j — в нижней полуплоскости. Решая систему уравнений (22) и (23), определим l неизвестных коэффициентов C_k полинома $S(p)$ и l коэффициентов $w^{(2l-k)}(0)$ функции $P_2(p)$. Другая половина неизвестных коэффициентов этой функции определяется из граничных условий на конце трубы. Поскольку порядок дифференциального уравнения колебаний оболочки $2l$, то на краю оболочки должны быть заданы условия закрепления в виде l дифференциальных уравнений. Оставшиеся l неизвестных коэффициентов C_k полинома $S(p)$ определим, рассматривая асимптотическое поведение левой и правой частей уравнения (14) при $|p| \rightarrow \infty$ и приравняв коэффициенты в обеих частях уравнения в членах, содержащих одинаковые степени функции p . Неизвестные коэффициенты, таким образом, оказываются определенными полностью, а значит, полностью определена и функция $\Phi_+(p, n)$. Теперь можно вычислить искомый потенциал звукового поля φ . Для этого воспользуемся формулой (5) и теоремой о свертке, в результате чего получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{1 - M^2}{8\pi} \int_{-\infty + ib}^{+\infty + ib} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_+(p, n) v \left\{ \begin{array}{l} J_n(vr) H_n^{(1)'}(va) \\ H_n^{(1)'}(vr) I_n'(va) \end{array} \right\} \times \\ \times \exp[in\psi] \exp[ipx] dp, \quad (24)$$

где верхнюю строчку в фигурных скобках следует брать при $r < a$, а нижнюю — при $r > a$.

Анализ выражения (24) довольно сложен, и в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением одного из членов ряда, соответствующего той части поля, которая связана с осесимметричными колебаниями оболочки. Рассмотрим конкретный случай пологой цилиндрической оболочки. Уравнение, описывающее ее осесимметричные колебания, имеет вид

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_f^4\right) u(x, 0) = \frac{ibk_f^4}{2} \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, 0), \quad (25)$$

где

$$b = \frac{2\rho}{h\rho_1}, \quad k_f^4 = \frac{\omega^2 \rho_1 h}{D} - \frac{1 - \nu^2}{\mu^2 a^4} \approx \frac{\omega^2 \rho_1 h}{D}.$$

Для функций $M_1(p)$, $P_2(p)$, $K(p)$, $K_+(p)$ и $K_-(p)$ имеем на основании общих формул

$$\begin{aligned} M_1(p, 0) &= p^4 - k_f^4, \\ P_2(p) &= w[w''''(0) + (-ip)w'''(0) + (-ip)^2 w''(0) + (-ip)^3 w'(0) + (-ip)^4 w(0)], \\ K(p) &= v^2 \pi a H_0^{(1)}(va) J_0'(va) (p^4 - k_f^4) - \frac{2ibk_f^4 \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right)^2}{1 - M^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$K_+(p) = (p - \eta_1)(p - \eta_2) \exp\left[-\int G(p) dp\right],$$

$$K_-(p) = (p - \eta_3)(p - \eta_4) \exp\left[+\int G(p) dp\right]^{-1},$$

где с точностью до величин порядка $\mu = \frac{k_f^3 \rho}{k^4 h \rho_1} \ll 1$

$$\eta_1 \approx -k_f(1 + i\alpha_1), \quad \eta_2 \approx -ik_f(1 + i\alpha_2),$$

$$\eta_3 \approx k_f(1 + i\alpha_3), \quad \eta_4 \approx ik_f(1 + i\alpha_4),$$

$$\alpha_1 \approx \frac{bk_f[k - M(kM - k_f)]^2}{2k^2 \pi a (1 - 4M^2) \gamma_1^2 H_0^{(1)'}(\gamma_1 a) J_0'(\gamma_1 a)},$$

$$\alpha_2 \approx \frac{bk_f[k + iM(k_f + ikM)]^2}{2k^2 \pi a (1 - 4M^2) \gamma_2^2 H_0^{(1)'}(\gamma_2 a) J_0'(\gamma_2 a)},$$

$$\alpha_3 \approx \frac{bk_f[k - M(kM + k_f)]^2}{2k^2 \pi a (1 - 4M^2) \gamma_3^2 H_0^{(1)'}(\gamma_3 a) J_0'(\gamma_3 a)},$$

$$\alpha_4 \approx \frac{bk_f[k + iM(ikM - k_f)]^2}{2k^2 \pi a (1 - 4M^2) \gamma_4^2 H_0^{(1)'}(\gamma_4 a) J_0'(\gamma_4 a)},$$

$$\gamma_1^2 = (1 - M^2)[k^2 - (-k_f + kM)^2], \quad \gamma_2^2 = (1 - M^2)[k^2 - (-ik_f + kM)^2],$$

$$\gamma_3^2 = (1 - M^2)[k^2 - (k_f + kM)^2], \quad \gamma_4^2 = (1 - M)^2[k^2 - (ik_f + kM)^2].$$

Для функции $\Phi_+(p, n)$ находим выражение

$$\Phi_+(p, 0) = \frac{C_0 + C_1 p + ik_r 2\pi J_0'(k_r a) K_-(k_x) \left[k_x^2 p + k_x^3 - \frac{k_x^4 - k_f^4}{p - k_x} \right]}{\frac{1}{2} K_+(p) (1 - M^2)}.$$

В этом выражении C_0 и C_1 — коэффициенты полинома $S(p)$:

$$S(p) = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + C_3 p^3,$$

причем из анализа асимптотического поведения членов в уравнении (14) при $|p| \rightarrow \infty$ и $n = 0$ получаем

$$C_2 \equiv ik_x k_r 2\pi J_0'(k_r a) K_-(k_x, 0), \quad C_3 \equiv ik_r 2\pi J_0'(k_r a) K_-(k_x, 0).$$

Если края оболочки свободны, то $w'''(0) = w''(0) = 0$. Коэффициенты C_0 и C_1 , а также $w(0)$ и $w'(0)$ должны быть определены в результате решения системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} ibk_f^4 \left(1 - \frac{Mk_f}{k_c} \right) \Phi_+(k_f) - P_2(k_f) &= 0 \\ \frac{1}{2} ibk_f^4 \left(1 - \frac{iMk_f}{k_0} \right) \Phi_+(ik_f) - P_2(ik_f) &= 0 \\ S(-k_f) + \left(1 + \frac{Mk_f}{k_0} \right) P_2(-k_f) K_-(-k_f) &= 0 \\ S(-ik_f) + \left(1 + \frac{iMk_f}{k_0} \right) P_2(-ik_f) K_-(-ik_f) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Для потенциала φ_{0s} части поля рассеянной звуковой волны, связанной с осесимметричными колебаниями оболочки, на основании формулы (24) получаем

$$\varphi_{0s}(r) = \frac{i(1-M^2)}{8\pi} \int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} \Phi_+(p, 0) v J_0'(va) H_0^{(1)}(vr) \exp(ipx) dp.$$

Исследуем поле на больших расстояниях от оболочки. Сделаем замену переменных $p = k(\sin \tau - M)$. Пользуясь асимптотическим представлением функции Ханкеля, напомним

$$\begin{aligned} \varphi_{0s}(r) &= \left[\frac{(1-M^2)^{5/2}}{32\pi^2 R \cos \delta} \right]^{1/2} k \exp(-ikMx) \int_{\Gamma} \Phi_+(\tau, 0) \times \\ &\times J_0(\sqrt{1-M^2} k \cos \tau a) \exp\left(-i\frac{3}{4}\pi\right) \exp[ikR \cos(\delta - \tau) \cos \tau] d\tau, \end{aligned}$$

где

$$R^2 = x^2 + (1-M^2)r^2, \quad x = R \sin \delta, \quad r \sqrt{1-M^2} = k \cos \delta.$$

Путь интегрирования Γ в плоскости τ проходит от $-\pi/2 \approx i(\infty + \beta)$ до $+\pi/2 - i(\infty - \beta)$. Вычисляя интеграл методом перевала, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{0s}(r) &\approx \frac{1-M^2}{4\pi R} [(1-M^2) \cos \delta]^{-1/2} \exp[-ik(Mx - R)] \times \\ &\times \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \Phi_+(\delta, 0) J_0'(\sqrt{1-M^2} ka \cos \delta) + \sum R_s, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\sum R_s$ — сумма вычетов в полюсах функции $\Phi_+(\tau, 0)$, которые могут быть задеты при деформации пути интегрирования Γ в перевальный путь. При этом существенное значение могут иметь два полюса: первый из них находится в точке $\tau = \theta_0$, а второй — в точке $\tau = \delta_1$, как это следует из уравнения $p + k_f(1 + i\alpha_1) = 0$. Вычет в первом из этих полюсов дает часть поля рассеянной (прошедшей) волны в направлении геометрического отражения (прохождения), а вычет во втором соответствует волне, излучаемой свободными осесимметричными колебаниями оболочки. Последние возникают в результате отражения от края оболочки вынужденной волны, возбуждаемой в оболочке падающей звуковой волной.

Излучаемая оболочкой волна наблюдается как незеркальное отражение (рассеяние) звука оболочкой, поскольку ее направление не соответ-

ствуем направлению зеркального отражения, а при $M = 0$ оказывается противоположным направлению падающей на оболочку звуковой волны. Вычет в полюсе $p + ik_f(1 + ia_2)$ соответствует неоднородной волне, быстро затухающей в окрестности оболочки и практически не играющей роли на больших расстояниях от последней.

Заметим, что формула (27) получена в предположении, что точка перевала не совпадает с полюсом подынтегральной функции. В противном случае для вычисления интеграла следует воспользоваться модифицированным методом перевала. Аналогичным образом могут быть исследованы другие члены ряда в выражении (24). Анализ этих членов ряда не дает ничего принципиально нового, за исключением некоторых интересных деталей, связанных с возбуждением в оболочке несимметричных нормальных волн (колебаний). В частности, оказывается, что при возбуждении какого-либо из несимметричных колебаний оболочки незеркальное рассеяние (отражение) возникает в трех различных направлениях, а не в одном направлении, как в рассмотренном случае осесимметричных колебаний. Объясняется это тем, что в оболочке могут распространяться свободные нормальные волны трех типов: типа изгибных волн и продольных волн в такой пластинке и типа крутильных волн в стержне. Поскольку скорость распространения нормальных свободных волн каждого типа различна, направления излучаемых звуковых колебаний, обусловленных этими волнами в оболочке, также отличаются.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Факторизацию функции

$$K(p, n) = v^2 \pi a H_n^{(1)'}(va) J_n'(va) M_1(p, n) - \frac{2i\omega^2 \rho M_2(p, n) \left(1 - \frac{Mp}{k_0}\right)^2}{1 - M^2},$$

регулярной в полосе $-\varepsilon(1 + M) < \text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$, где $v^2 = (1 - M^2) [k^2 - (p + kM)^2]$, выполним, пользуясь известными правилами, см., например, [5 и 6] *.

На основании известных представлений напишем

$$\frac{K_+'(p)}{K_+(p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{K'(\eta) d\eta}{K(\eta)(\eta - p)};$$

$$\frac{K_-'(p)}{K_-(p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{K'(\eta) d\eta}{K(\eta)(\eta - p)};$$

$$-\varepsilon(1 - M) < d < \text{Im } p < c < \varepsilon(1 - M) **,$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу. Контуры интегрирования замкнем в нижней полуплоскости, при этом следует учесть, что точка $\eta = -k(1 + M)$ является точкой ветвления, и линия разреза проводится из этой точки параллельно мнимой оси. Полюсы подынтегральных функций, находящиеся внутри контуров интегрирования, являются корнями уравнения $K(\eta) = 0$, точное решение которого может быть выполнено лишь численно. Для дальнейшего анализа воспользуемся приближенным вычислением корней, ограничившись интересным случаем, когда скорость распространения свободных колебаний (нормальных волн) вдоль оболочки больше скорости звука в движущейся среде. Вычисляя корни уравнения $K(\eta) = 0$ с точностью до величин порядка $\mu = \frac{k_f^3 \rho}{k^4 \rho_1 h} \ll 1$,

* Заметим, что в случае пологих и подъемистых цилиндрических оболочек $M_1(p, n)$ оказывается полиномом четного порядка восьмой степени, а $M_2(p, n)$ — четвертой степени.

** Можно показать, что в полосе регулярности $\frac{\ln K(p)}{p} \rightarrow 0$, $|p| \rightarrow \infty$

можно установить, что внутри контура интегрирования функции $K_+(p)$ расположено l полюсов вида $\eta_i \approx -p_i(1 + \mu\alpha_i)$, а внутри контура интегрирования функции $K_-(p)$, l полюсов вида $\eta_j = p_j(1 + \mu\alpha_j)$ и полюс $\eta = p$, где $-p_i$ и p_j являются корнями уравнения $M_1(p) = 0$. С учетом этого можем написать

$$\frac{K'_+(p)}{K_+(p)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{i=1}^l (\eta - \eta_i)^{-1} \frac{d\eta}{\eta - p} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K'(\eta)}{K(\eta)} \frac{d\eta}{\eta - p},$$

$$\frac{K'_-(p)}{K_-(p)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{j=1}^l (\eta - \eta_j) \frac{d\eta}{\eta - p} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K'(\eta)}{K(\eta)} \frac{d\eta}{\eta - p}.$$

В результате интегрирования и последующего потенцирования получаем

$$K_+(p) = b \left[\prod_{i=1}^l (p - \eta_i) \right] \exp \left[- \int G(p) dp \right],$$

$$K_-(p) = \left\{ b \left[\prod_{j=1}^l (p - \eta_j) \right] \exp \left[+ \int G(p) dp \right] \right\}^{-1},$$

где η_i — полюсы, лежащие в нижней, а η_j — в верхней полуплоскостях,

$$G(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K'(\eta)}{K(\eta)} \frac{d\eta}{\eta - p}, \quad \text{причем можно показать, что интеграл по}$$

берегам разреза Γ по порядку величины равен

$$\mu = \frac{k_f^3 \rho}{k^4 \rho_1 h} \ll 1.$$

Определим вид функции $L_+(p, n)$. Заметим, что функция

$$\Gamma_+(p, n) = \frac{2\pi k_r J_n'(k_r a) i^{n+1}}{p - k_x} \quad \text{регулярна при } \text{Im } p > \varepsilon(\sin \theta_0 - M) \text{ и}$$

$K_-(p)$ при $\text{Im } p < \varepsilon(1 - M)$, а функция $L_+(p)$ должна быть регулярной в верхней полуплоскости при $\text{Im } p > \varepsilon(\sin \theta_0 - M)$. Пользуясь теоремой Коши, напишем

$$L_+(p, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} \Gamma_+(\eta, n) K_-(\eta, n) \frac{d\eta}{\eta - p},$$

$$\varepsilon(1 - M) > \text{Im } p > d > \varepsilon(\sin \theta_0 - M).$$

Замкнем контур интегрирования в нижней полуплоскости, тогда подынтегральное выражение будет иметь лишь один полюс внутри контура интегрирования $\eta = k_x$. Вычет в этом полюсе дает

$$L_+(p, n) = \frac{2\pi k_r J_n'(k_r a) i^{n+1}}{p - k_x} K_-(k_x, n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Лямшев. Излучение звука упругими оболочками, возбуждаемыми турбулентным аэродинамическим потоком. Акуст. ж., 1961, 7, 59.
2. Л. М. Лямшев. Об акустическом излучении турбулентного потока при наличии упругих границ. Докл. АН СССР, 1961, 137, 1343.
3. L. M. Liamshev. Diffraction theory of sound radiation due to turbulent flows and boundary layers. Proc. IV-rd Intern. Acoust. Congr. Copenhagen, 1962.
4. H. S. Ribner. New theory of jet-noise generation, directionality, and spectra. J. Acoust. Soc. America, 1959, 31, 245.
5. Л. А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. М., «Сов. радио», 1963.
6. Б. Нобл. Применение метода Винера — Холфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
24 апреля 1965 г.