АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 2

УДК 534.29

ПУЛЬСАЦИИ КАВИТАЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ПОЛЕ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

В. А. Акуличев

Численно решается уравнение Нолтинга — Непайраса; показано, что оно структурно неустойчиво при таких значениях амплитуды давления ультразвукового поля, когда выполняются определенные соотношения для времен роста и захлопывания кавитационного пузырька. Дается анализ устойчивых и неустойчивых решений на фазовой плоскости, формулируются условия неустойчивости. Приводятся приближенные формулы для определения времени и скорости захлопывания кавитационного пузырька в поле ультразвуковой волны.

Как было показано в работах [1, 2], при ультразвуковой кавитации в воде в кавитационной области фокусирующего концентратора наблюдаются четко выраженные экстремумы зависимости от электрического напряжения величины эрозии, характеризующей кавитационную активность, и такого характерного параметра кавитирующей жидкости, как волновое сопротивление. Эти экспериментальные результаты удается качественно объяснить, исходя из высказанного Нолтингом и Непайрасом [3] предположения, что скорость захлопывания кавитационной полости, а следовательно, давление в ударной волне и эффективность кавитации существенно зависят от отношения времени захлопывания полости τ к периоду T ультразвуковой волны, вызывающей в жидкости кавитацию. Однако до сих пор не было детального исследования этого важного для ультразвуковой кавитации положения, а отсутствие аналитических соотношений исключало возможность количественных оценок. Обсуждению и анализу этих вопросов посвящена настоящая работа.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка Нолтинга — Непайраса [3], описывающее радиальные пульсации сферического газового пузырька в идеальной несжимаемой жидкости в поле ультразвуковой волны:

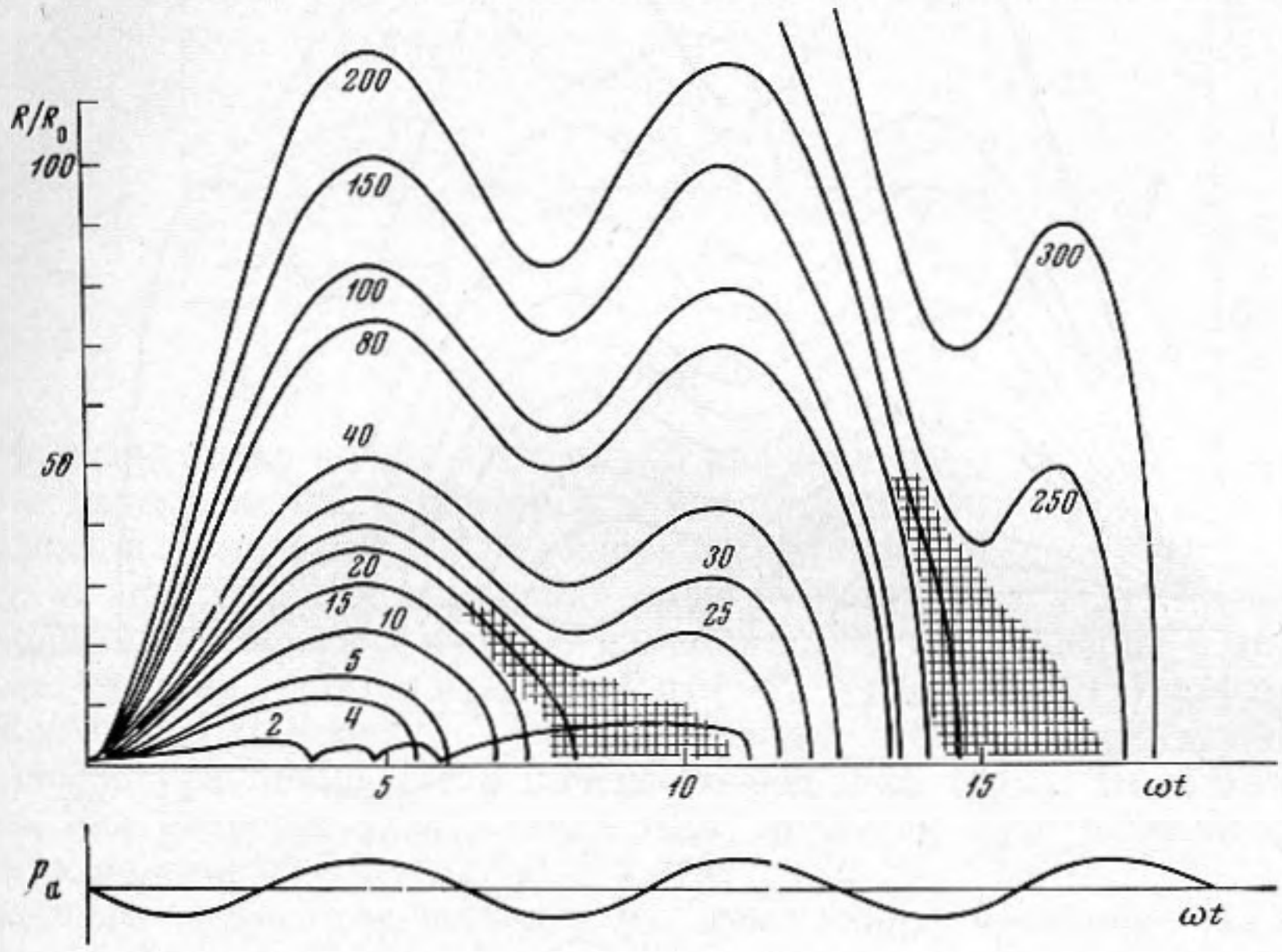
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}+\dfrac{3}{2}\dfrac{u^2}{R}+\dfrac{1}{\rho R}\left[\dfrac{2\sigma}{R}-P_g+P_0-P_m\sin\omega t\right]=0 \\ u=\dfrac{dR}{dt}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $R = R(t)$ — радиус пузырька, ρ и σ — плотность и поверхностное натяжение жидкости, P_0 — величина гидростатического давления, P_m — амплитуда давления ультразвуковой волны с частотой $f = \omega / 2\pi$. Величина P_g определяет давление газа в пузырьке

$$P_g(t)=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n}, \tag{2}$$

где n — показатель политропы, характеризующий уравнение состояния газа, а R_0 — начальный радиус пузырька при $P_m = 0$. Предполагается, что диффузия газа на границе пузырька и жидкости отсутствует.

Несмотря на ряд упрощений и ограничений уравнение (1) в общем виде не решается. Однако важные выводы о явлении кавитации, описываемом этим уравнением, можно сделать на основании ансамбля численных решений при условии, что этот ансамбль достаточно плотный. Уравнение (1) численно решалось нами на ЭЦВМ для адиабатических пульсаций ($n = 4/3$) газового пузырька в воде ($\rho = 1$ *г*, $\sigma = 75$ *дин/см*), при $P_0 = 1{,}0$ *атм*, в поле ультразвуковой волны с частотой $f = 500$ *кгц* при различных амплитудах P_m давления ультразвукового поля и начальных

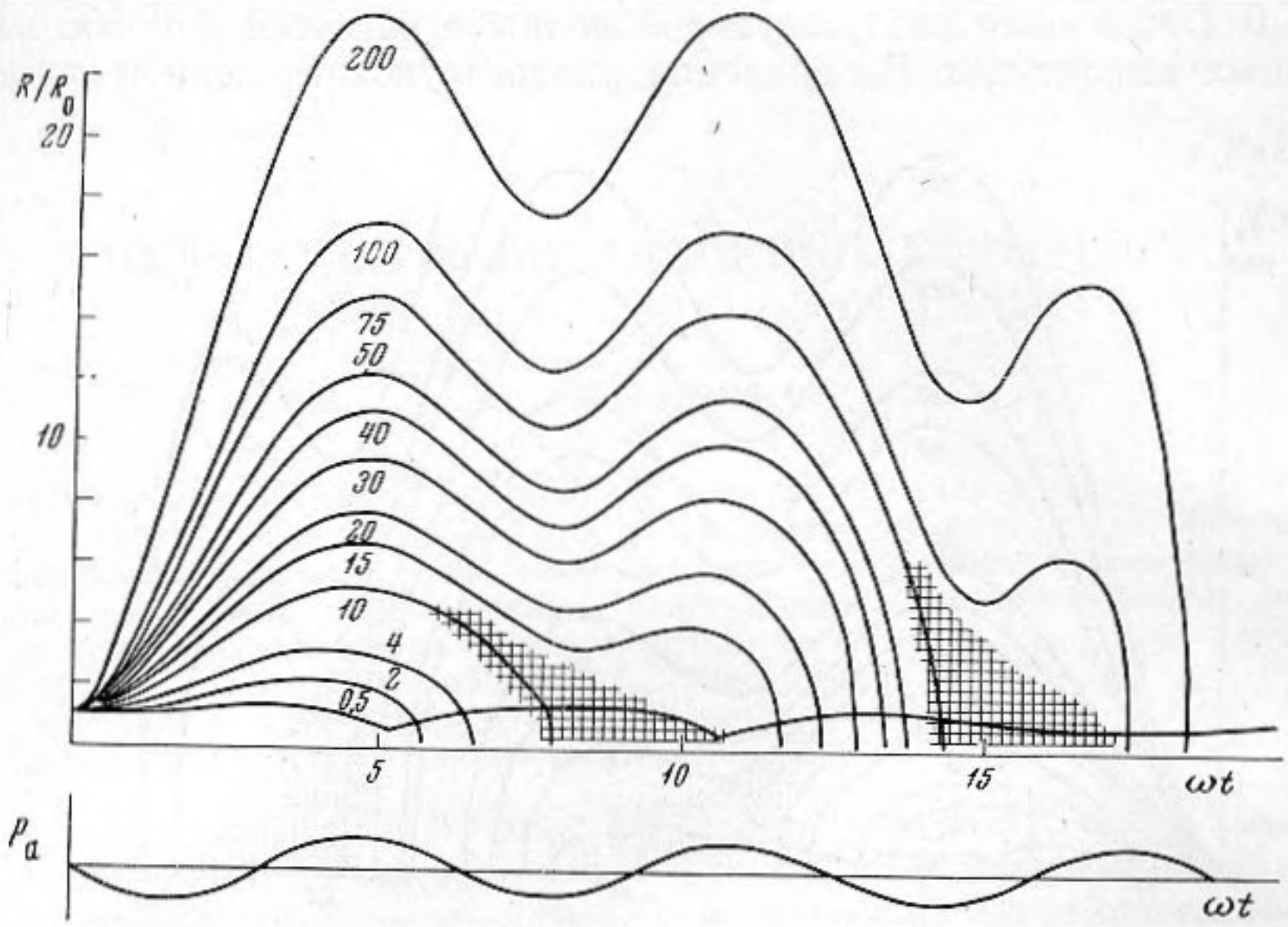


Фиг. 1

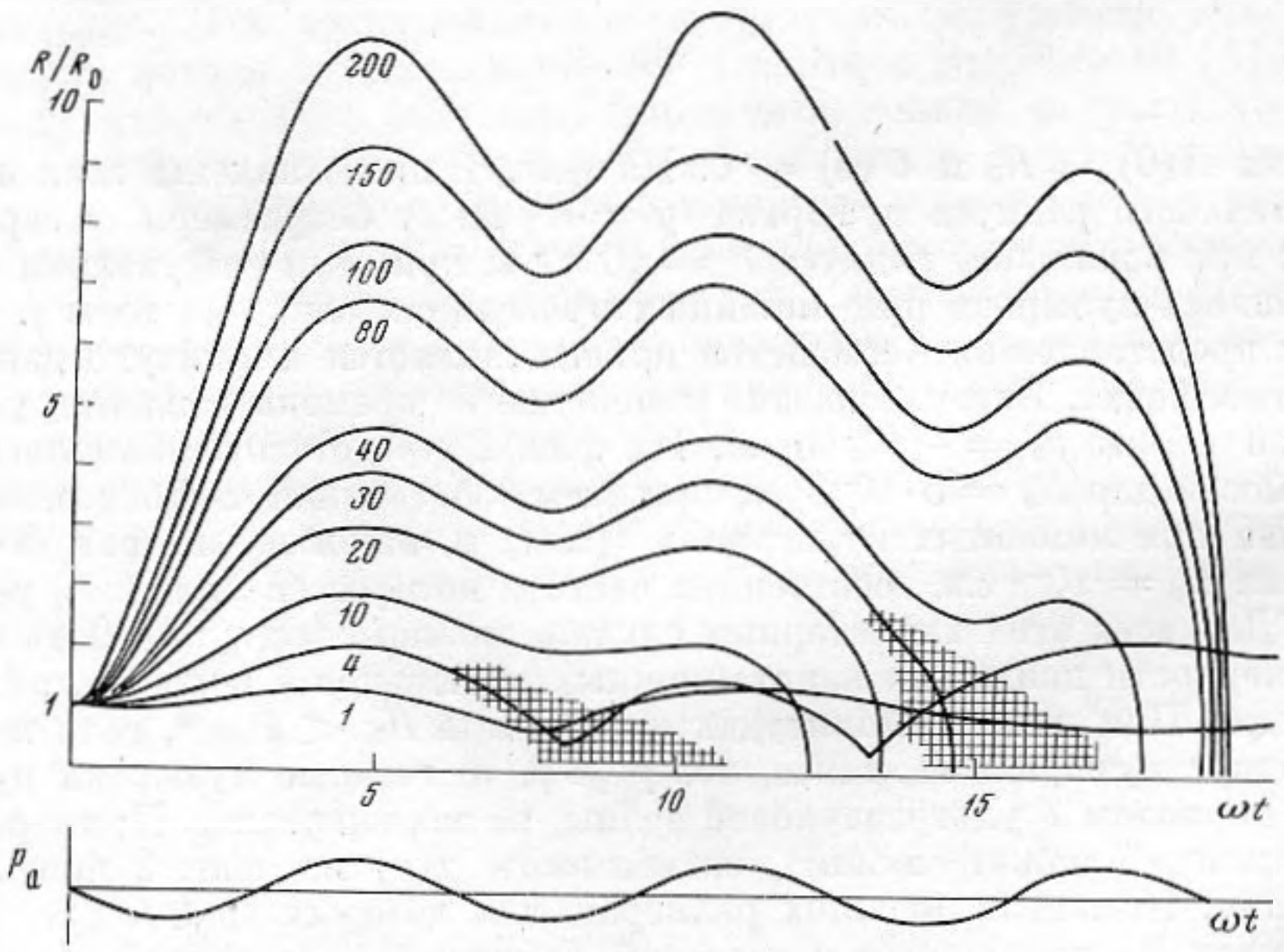
условиях $R(0) = R_0$ и $U(0) = 0$. На фиг. 1 представлены зависимости относительного радиуса пузырька $y = R / R_0$ от безразмерного времени $x = \omega t$ при начальном радиусе $R = 10^{-4}$ *см*; при этом собственная частота резонанса пузырька при линейных пульсациях выше частоты f. Параметром представленного семейства кривых является амплитуда давления P_m в атмосферах. Внизу показано изменение во времени давления ультразвуковой волны $p_a = -P_m \sin \omega t$. На фиг. 2 представлены аналогичные зависимости для $R_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ *см*; при этом собственная частота резонанса пузырька при линейных пульсациях $f_0 \simeq f$; и, наконец, на фиг. 3 — для пузырька $R_0 = 10^{-3}$ *см*, собственная частота которого в линейном режиме $f_0 < f$. Для всех этих характерных случаев можно сформулировать общие закономерности движения кавитационных пузырьков в поле ультразвуковой волны. При малых амплитудах поля, когда $P_m < P_{mк}$ *, если начальный радиус пузырька R_0 таков, что $f_0 \geqslant f$, то газовые пузырьки пульсируют с периодом T ультразвуковой волны, не захлопываясь. Примером таких пульсаций может служить зависимость $y(x)$ на фиг. 2 при $P_m = 0{,}5$ *атм*. Пузырьки больших размеров, для которых $f_0 < f$, при малых амплитудах P_m пульсируют с частотой, близкой к собственной частоте f_0. Для малых пузырьков, у которых $f_0 > f$, при увеличении P_m легко видеть на фиг. 1 и 2 возникновение и развитие кавитации, характеризуемой ростом пузырька в течение всего полупериода отрицательных давлений ультразвукового поля, а также в течение начальной части полупериода положительных давлений. Пузырек вырастает до некоторого максимального размера R_m и захлопывается. Время роста до этого размера мы обозначим через t_m, а время захлопывания — через τ_m. Характерно то, что с увели-

* $P_{mк}$ — пороговое давление, соответствующее возникновению кавитации.

чением P_m растет не только R_m, но и время захлопывания τ_m, при этом захлопывание пузырька может происходить в фазе отрицательных давлений (см. фиг. 1 и 2). При дальнейшем увеличении P_m (см. зависимость $y(x)$ при $P_m = 15$ *атм* на фиг. 2) пузырек, вырастая до некоторого максимального значения R_{m_1}, не захлопывается полностью, а снова растет под



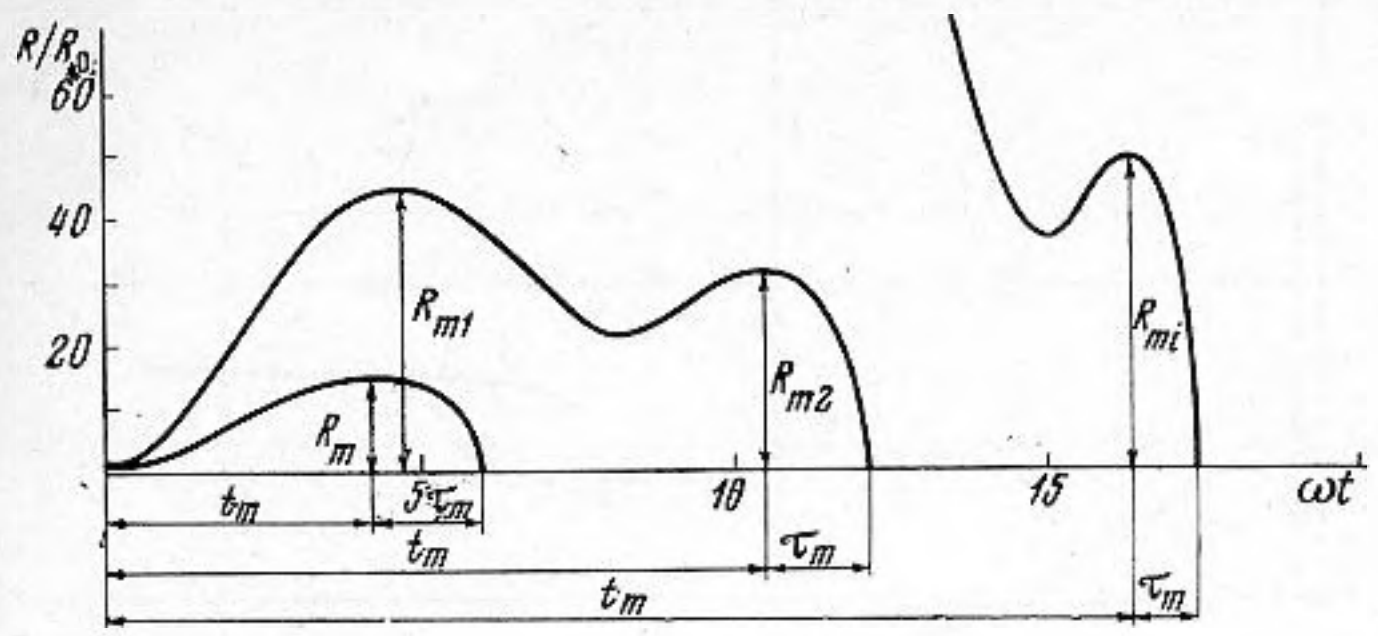
Фиг. 2



Фиг. 3

действием ультразвукового поля до некоторого нового максимального значения R_{m_2}, после чего окончательно захлопывается. При еще большем увеличении P_m возможно формирование третьего и любого i-го экстремума с максимальным значением R_{mi}, после которого происходит захлопывание. На фиг. 4 схематически показаны эти случаи вместе с необходимыми в дальнейшем обозначениями.

Для пузырьков больших размеров (см. фиг. 3) даже при малых амплитудах P_m, соответствующих возникновению кавитации, образуется несколько экстремумов; их наименьшее число определяется тем условием, что время существования пузырька до его захлопывания должно быть не меньше периода собственных резонансных пульсаций.



Фиг. 4

До формирования нового экстремума вид зависимостей $y(x)$ имеет один и тот же качественный характер и изменяется незначительно при малых изменениях параметра P_m. Возникновение каждого последующего экстремума, т. е. значительное изменение вида функции $y = y(x)$, происходит при относительно незначительном изменении P_m. Это говорит о том, что при некоторых значениях коэффициента P_m уравнение (1) структурно неустойчиво [4]. На фиг. 1—3 заштрихованы области структурной неустойчивости уравнения (1) в плоскости решений (y, x). Именно в этих областях вид решений $y(x)$ значительно меняется при незначительном изменении некоторых значений P_m.

Исследуем область тех значений P_m, при которых уравнение (1) структурно неустойчиво. На фиг. 5, *а* показана зависимость отношения t_m / T от параметра P_m для $R_0 = 10^{-4}$ *см*, полученная на основании численных решений. Здесь t_m — время роста кавитационного пузырька до максимального размера R_{mi}, предшествующего окончательному его захлопыванию. Внизу на фиг. 5, *б* сплошной линией показана зависимость отношения τ_m / T от величины P_m. Как видно из фиг. 5, *а*, при увеличении P_m значение t_m / T медленно возрастает и стремится к пределу, равному 0,75. При дальнейшем же незначительном увеличении P_m величина t_m / T скачкообразно увеличивается, что вызвано формированием последующего экстремума зависимости $y(x)$. Таким образом, уравнение (1) структурно неустойчиво при таких значениях P_m, при которых $t_m / T = 0{,}75$. На фиг. 5, *б* можно видеть, что при значениях P_m, соответствующих структурной неустойчивости, для времени захлопывания выполняется соотношение $\tau_m / T \simeq 0{,}5$. Этот вывод представляет интерес с точки зрения обоснования качественных объяснений ряда экспериментальных фактов [1, 2].

На фиг. 5, *б* пунктирной линией показана зависимость τ_m / T от P_m, где время захлопывания τ_m определялось по приближенной формуле

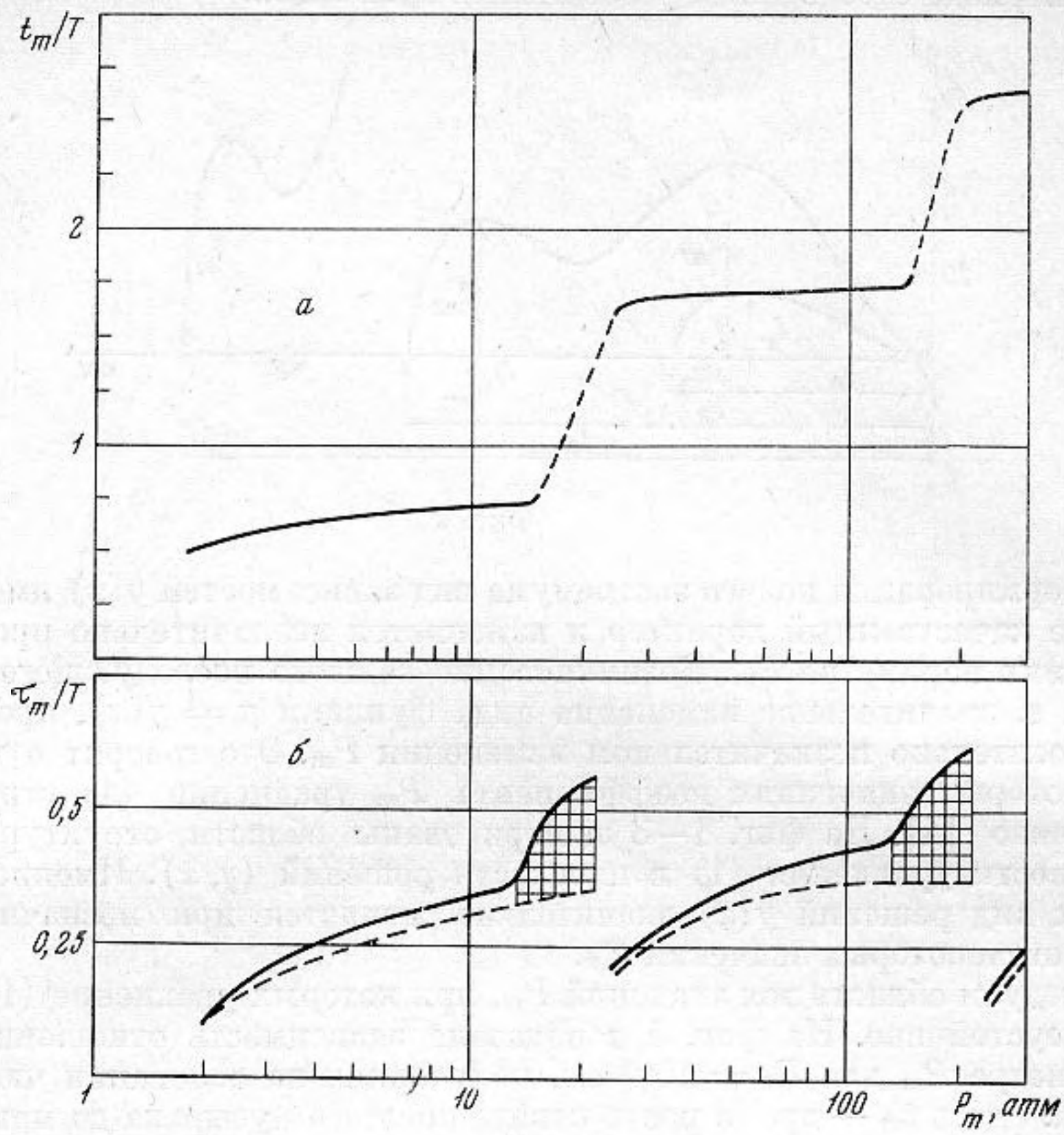
$$\tau_m = F(\delta) \cdot R_{mi} \left(\frac{\rho}{P_0 + P_m} \right)^{1/2}, \tag{3}$$

которая является обобщением формулы Рэлея [5] для времени захлопывания кавитационной полости под влиянием постоянного во времени давления на бесконечности $P_\infty = P_0$

$$\tau_m = 0{,}915 R_m \left(\frac{\rho}{P_0} \right)^{1/2} \tag{3'}$$

на случай воздействия в фазе сжатия кроме гидростатического давления P_0 также давления ультразвуковой волны с амплитудой, равной P_m. Здесь

$F(\delta)$ — функция, введенная Хорошевым [6] и учитывающая газосодержание δ кавитационной полости. При развитой кавитации, когда $R_{mi}/R_0 \gg 1$, влиянием газосодержания можно пренебречь и положить $F(\delta) = 0{,}915$. На фиг. 5, *б* видно, что приближенная формула (3) определяет



Фиг. 5

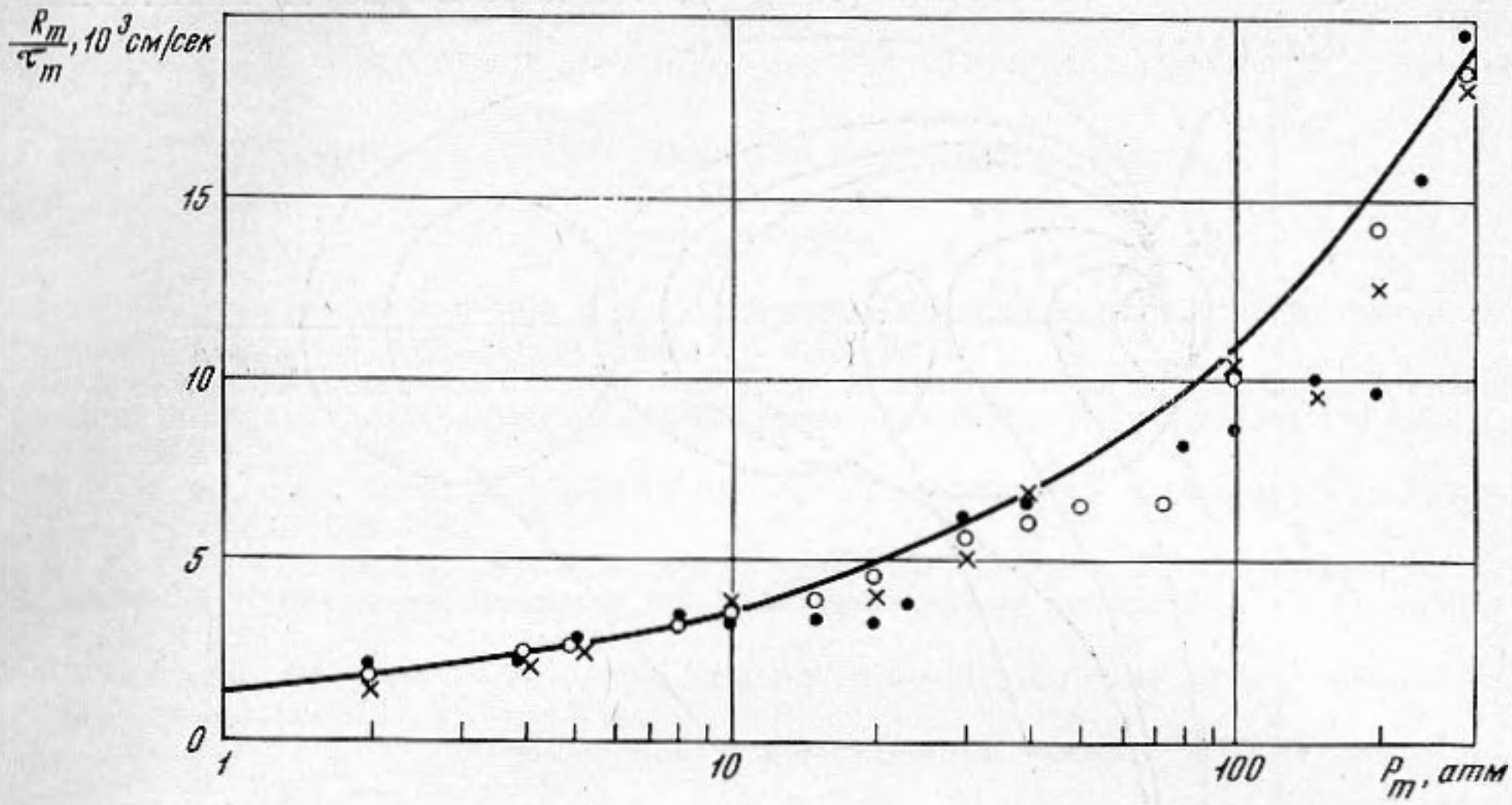
время захлопывания кавитационной полости с достаточной для количественных оценок точностью при значениях P_m, соответствующих структурной устойчивости уравнения (1). В области значений P_m, при которых уравнение структурно неустойчиво, рассчитанное по формуле (3) значение τ_m меньше точного значения, и это различие может достигать 30%. Аналогичные зависимости для t_m/T и τ_m/T от параметра P_m можно построить на основании фиг. 2 и 3 для $R_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ *см* и $R_0 = 10^{-3}$ *см*. При этом структурная неустойчивость также характеризуется соотношениями $t_m/T = 0{,}75$ и $\tau_m/T \simeq 0{,}5$.

Введем понятие средней скорости захлопывания кавитационной полости $U_{\text{ср}} = R_{mi}/\tau_m$. Из формулы (3) легко определить, что

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{F(\delta)}\left(\frac{P_0 + P_m}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Согласно этой формуле, величина $U_{\text{ср}}$ зависит от амплитуды P_m давления ультразвукового поля. На фиг. 6 сплошной линией показана зависимость $U_{\text{ср}}$ от P_m, рассчитанная по формуле (4), а точками, кружками и крестиками показаны точные значения $U_{\text{ср}}^0$, определенные на основании кривых на фиг. 1—3 соответственно для $R_0 = 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-4}$ и 10^{-3} *см*. Оказывается, вычисленные по формуле (4) значения $U_{\text{ср}}$ достаточно хорошо совпадают с точными значениями при тех P_m, при которых уравнение (1)

структурно устойчиво. Характерно то, что в области структурной неустойчивости величина $U_{\text{ср}}^0$ уменьшается с ростом P_m, что говорит о возможном уменьшении эффективности кавитации. Анализ численных решений показал, что в области значений P_m, соответствующих структурной неустой-



Фиг. 6

чивости уравнения (1), скорость захлопывания стенок полости достаточно точно определяется формулой

$$U(t) = \left[\frac{2}{3}\frac{P_0 + P_m}{\rho}\left(\frac{R_{mi}^3}{R^3} - 1\right)\right]^{1/2}, \tag{5}$$

которая является аналогичным обобщением соответственной формулы Рэлея.

Проанализируем более подробно структурную неустойчивость, характерную для уравнения (1), описывающего явление кавитации. Неустойчивость возникает при таких значениях P_m, когда

$$t_m = 0{,}75T + (i-1)T, \tag{6}$$

при этом

$$\tau_m \simeq 0{,}5T. \tag{6'}$$

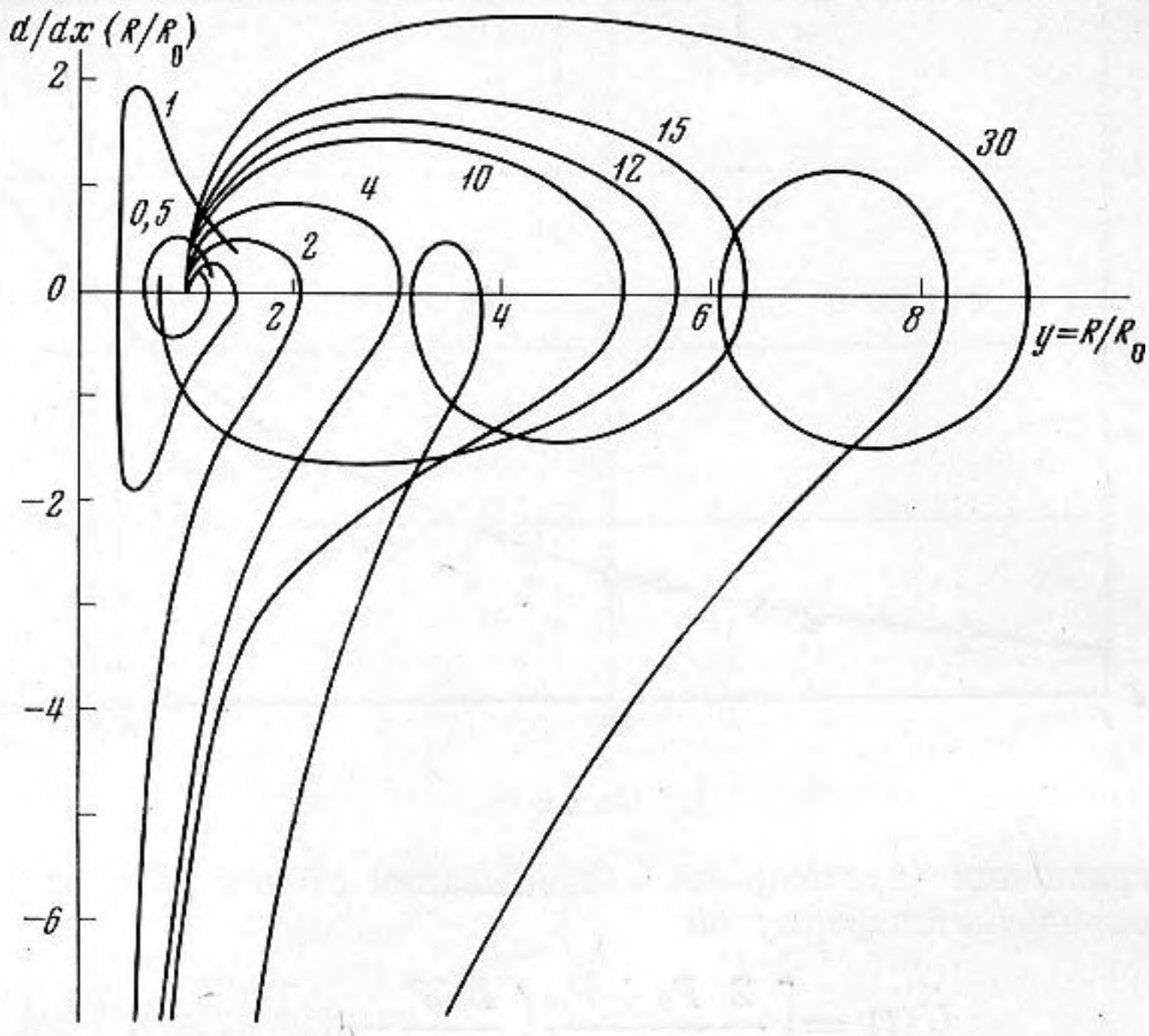
Кроме того, на основании численных решений было выяснено, что уравнение структурно неустойчиво в таком диапазоне значений P_m, где сумма времен роста и захлопывания полости $t_m + \tau_m$ соответствует моментам времени, при которых выполняется соотношение

$$\frac{dp_{\text{а}}}{dt} > 0, \tag{6''}$$

где в нашем случае $p_{\text{а}} = -P_m \sin \omega t$.

Очень удобным и наглядным при анализе устойчивости уравнения (1) оказывается графическое изображение решения на фазовой плоскости. Известно [4], что метод фазовых портретов очень плодотворен при качественном анализе нелинейных дифференциальных уравнений. На фиг. 7 показана зависимость относительной скорости dy / dx от $y = R / R_0$ для случая $R_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ *см*, $f = 500$ *кгц*. Параметром фазовых траекторий является амплитуда P_m в *атм*, фазовый портрет построен для некоторых решений, показанных на фиг. 2. Оказывается, при малых значениях P_m изображающая точка, выйдя из точки с координатами, соответствующими начальным условиям, движется в дальнейшем по замкнутой кривой, близ-

кой к окружности. Следовательно, в этом случае решением являются колебания, близкие к периодическим. С увеличением P_m траектория фазовой кривой изменяется и при $P_m = 2$ *атм*, что соответствует кавитации, изображающая точка, выйдя из начальной точки и двигаясь по часовой стрелке, устремляется в точку $(0, -\infty)$, что характеризует кавитацион-



Фиг. 7

ное захлопывание газового пузырька. При увеличении P_m до 10 *атм* общий вид решений на фазовом портрете остается тем же, что и при 2 *атм*. Однако при $P_m = 12$ *атм* изображающая точка не устремляется в точку $(0, -\infty)$, а движется по некоторой спирали вокруг начальной точки, что говорит об отсутствии кавитационного захлопывания. Поскольку при этом фазовый портрет решения существенно изменился при незначительном изменении P_m, то уравнение (1) при этом значении структурно неустойчиво. При дальнейшем увеличении P_m от 15 до 30 *атм* (и даже до 60 *атм*, что видно из фиг. 2) уравнение (1) становится структурно устойчивым. Как видно на фазовом портрете, для этих значений P_m изображающая точка устремляется в конечном счете в $(0, -\infty)$, но на фазовых траекториях легко проследить появление петли, отражающей тот факт, что при некотором меньшем значении P_m наблюдается структурная неустойчивость. Нетрудно видеть, что при дальнейшем увеличении P_m следующая область структурной неустойчивости оставит на фазовых портретах устойчивых решений след в виде второй петли и т. д.

Фазовые портреты численных решений показывают, что при тех значениях P_m, при которых уравнение (1) структурно неустойчиво, газовый пузырек не захлопывается, а нелинейно пульсирует с большими амплитудами, но небольшими скоростями.

Во всех введенных выше формулах (3)—(5) присутствует некоторое эффективное давление $P_0 + P_m$, определяющее захлопывание кавитационного пузырька. Необходимо отметить, что это давление действует на пузырек в начале его захлопывания только при развитой кавитации, когда амплитуда давления ультразвукового поля P_m превышает пороговое давление и соответствует структурной устойчивости уравнения (1). Как видно из фиг. 1—3, при амплитудах P_m, близких к пороговым, а также соот-

ветствующих структурной неустойчивости, захлопывание пузырька начинается в тот момент, когда давление ультразвукового поля еще не достигло максимальной величины, равной амплитуде P_m. Поэтому в общем случае эффективным давлением, определяющим захлопывание кавитационного пузырька, будет величина $P_0 + \alpha P_m$, где значение α заключено в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и определяется из соответствующих решений уравнения (1).

Автор благодарит Л. Д. Розенберга за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Сиротюк. О поведении кавитационных пузырьков при больших интенсивностях ультразвука. Акуст. ж., 1961, **7**, 4, 499—501.
2. V. A. Acoulitchev, L. D. Rosenberg, M. G. Sirotiouk. Certains relations dans le champ de la cavitation ultra — sonore. 5-e Congrès International d'Acoustique, **E64**, Liège, **1965**.
3. B. E. Noltingk, E. A. Neppiras. Cavitation produced by ultrasonics. Proc. Phys. Soc., 1950, **63B**, 674—685.
4. W. J. Cunningham. Introduction to nonlinear analysis. N. Y., 1958. (Рус. перевод: В. Каннингхэм. Введение в теорию нелинейных систем. М.— Л., Госэнергоиздат, 1962).
5. Rayleigh. On pressure devoloped in a liquid during the collapse of a sperical cavity. Phil. Mag., 1917, **34**, 94—100.
6. Г. А. Хорошев. О захлопывании паровоздушных кавитационных полостей. Акуст. ж., 1963, **9**, 3, 340—346.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
14 июля 1965 г.