АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 2

УДК 534.232

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ТЕЛАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ ПО ВИНТОВЫМ ЛИНИЯМ

В. П. Докучаев

Рассматривается излучение звука твердыми телами, движущимися по винтовым линиям в газообразных средах. Определены поле давления в волновой зоне, распределение интенсивности излучения по углам (диаграмма направленности) и полная энергия излучения.

В работе [1] было рассмотрено излучение звуковых волн твердыми телами, движущимися по окружности в газообразной среде. Здесь будет проведено обобщение результатов работы [1] на тот случай, когда тело и система из нескольких тел движутся по винтовым линиям. Мы будем предполагать, что размеры тел значительно меньше радиусов винтовых линий, по которым происходит движение. В этом случае движущиеся тела можно считать точечными и представлять плотности сил, действующих на газ со стороны указанных тел в виде δ-функций [1, 2]. Предполагается также, что тела хорошо обтекаемы и движутся с дозвуковыми скоростями. При этом с большой степенью точности можно пользоваться линейным приближением при анализе взаимодействия твердых тел со средой [3] *.

Решение задачи об излучении звука телами, движущимися по винтовым линиям в этой постановке, позволяет лучше понять некоторые особенности сложного механизма излучения звука воздушными и гребными винтами. Действительно, из полученных ниже соотношений как частный случай следуют результаты не только работы [1], но и ряда работ, касающихся излучения звука винтами [5, 6].

Так как подход к решению указанной задачи полностью аналогичен использованному в работе [1], то все промежуточные вычисления опущены и приводятся только конечные результаты с подробным обсуждением.

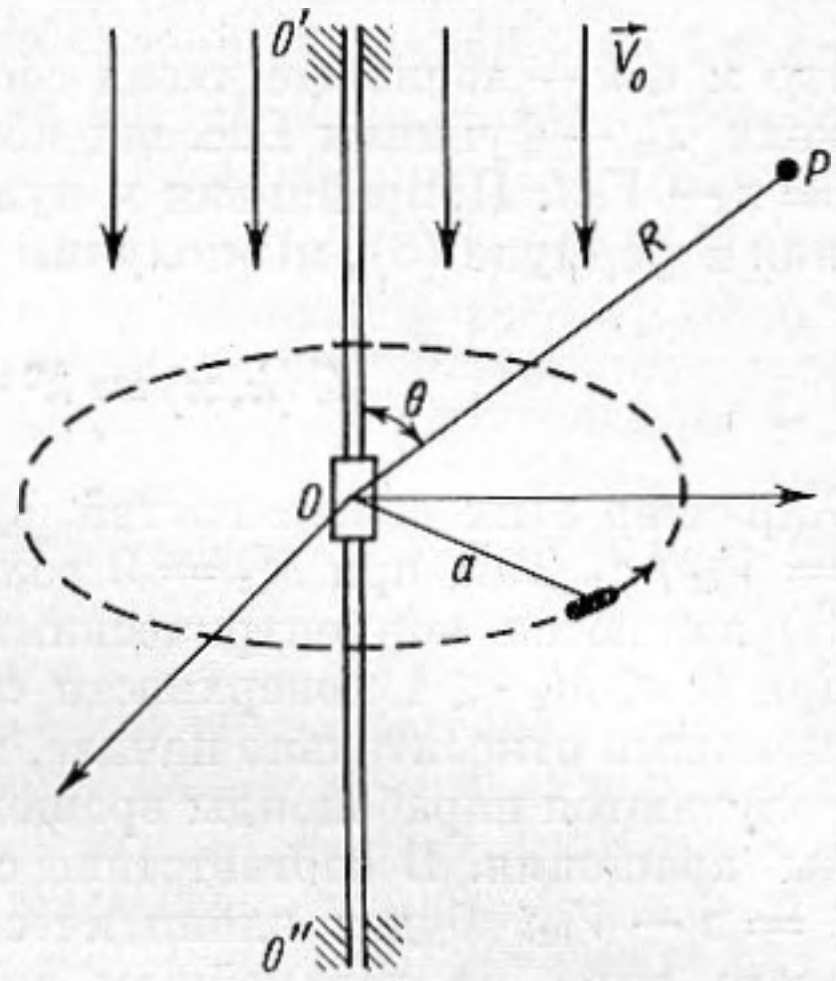
Основное уравнение для возмущений давления при наличии движущегося тела имеет вид [1, 2]

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2}\frac{d^2p}{dt^2} = \operatorname{div}\mathbf{f}, \tag{1}$$

где p — возмущения давления, c_s — скорость звука в среде, $\mathbf{f}$ — плотность сил, действующих со стороны тела на газ. Определим вид функции плотности силы $\mathbf{f}$ для следующего частного случая движения тела по винтовой линии. Будем считать, что тело с характерным размером поперечного сечения r_0 участвует в двух простых движениях. Во-первых, оно равномерно движется по окружности радиуса a со скоростью $V_{0\varphi} = a\omega_0$, где ω_0 — круговая частота вращения. Во-вторых, одновременно с этим, тело движется с постоянной скоростью V_{0z} в направлении оси вращения. Результирующее

* Б. П. Константинов отмечал трудности, возникающие при теоретическом анализе излучения звука винтами и обусловленные влиянием нелинейных эффектов при обтекании [4].

полное движение тела будет происходить по винтовой линии. На фиг. 1 показано, как можно практически осуществить это движение: тело с характерным размером r_0 жестко соединено горизонтальным стержнем длины a ($a \gg r_0$) с вертикальной осью $O'OO''$, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_0. Вся среда, как указано на фиг. 1, движется с постоянной скоростью V_{0z} параллельно оси вращения. Введем цилиндрическую систему координат (r, z, φ), направив ось z вдоль оси вращения $O'OO''$.



Фиг. 1

Предположим, что по винтовой линии движется хорошо обтекаемое тело вращения так, что его ось симметрии лежит в плоскости, касательной к цилиндрической поверхности, содержащей винтовую линию. При этом на движущееся тело будут действовать как сила лобового сопротивления, которую обычно записывают в виде [3, 7]

$$F = CS\rho_0 V_0^2, \tag{2}$$

так и подъемная сила. В формуле (2) C — коэффициент лобового сопротивления, S — площадь сечения тела, ρ_0 — плотность окружающей среды, V_0 — скорость движения тела. Подъемная сила выражается аналогичным образом, но с другим значением коэффициента подъемной силы $C_П$. В большом интервале дозвуковых скоростей C и $C_П$, слабо зависят от скорости V_0. Если ось симметрии тела вращения направлена строго по касательной к винтовой линии, то подъемная сила вообще отсутствует. В предлагаемой здесь постановке задачи сила, действующая на твердое тело, имеет только две составляющих: F_z и F_φ. Тело будет действовать на окружающую среду с силами, равными по величине и противоположными по направлению этим составляющим полной силы, действующей на тело

$$\mathbf{F} = F_\varphi \mathbf{e}_\varphi + F_z \mathbf{e}_z, \tag{3}$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы. Если считать, что по винтовой линии движется тело вращения и его ось симметри касательна к траектории, то

$$F_\varphi = FV_{0\varphi} / V_0, \quad F_z = FV_{0z} / V_0, \quad V_0 = (V_{0z}^2 + V_{0\varphi}^2)^{1/2}, \tag{4}$$

где F определяется соотношением (2). В дальнейшем мы будем считать, что все силы F_φ, F_z и F известны либо как результат решения гидродинамической задачи об обтекании тела, либо в результате экспериментального определения вращательного момента оси $L = aF_\varphi$ и тягового усилия F_z для модели, изображенной на фиг. 1 (в связи с этим см. также работы [5, 6]). Плотность силы, действующей со стороны точечного тела на газ, можно представить в рассматриваемом случае в виде следующей обобщенной функции:

$$\mathbf{f} = (F_\varphi \mathbf{e}_\varphi + F_z \mathbf{e}_z) \frac{\delta(r-a)}{r} \delta(z - V_{0z}t)\, \delta(\varphi - \omega_0 t), \tag{5}$$

т. е. плотность силы отлична от нуля только в малой окрестности точки с координатами $r = a$, $z = V_{0z}t$, $\varphi = \omega_0 t$, где находится тело, и равна нулю в остальном пространстве. Следует указать (фиг. 1), что если сделать горизонтальный стержень настолько тонким, что создаваемые им возмущения значительно меньше возмущений, порождаемых телом, то функция источника (5) будет приближенно описывать плотность силы для этой модели.

Решение уравнения (1) при подстановке в правую часть функции из соотношения (5) можно провести при помощи преобразований Фурье — Ханкеля, как это сделано в работе [1]. Таким образом, мы получим

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{ie^{in(\varphi-\omega_0 t)}}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{k(a\varkappa F_z - nF_\varphi) J_n(ka) J_n(kr) e^{-i\varkappa\xi}}{k^2+\varkappa^2-\left(\frac{n\omega_0-\varkappa V_{0z}}{c_s}\right)^2} d\varkappa\, dk, \quad (6)$$

где $\varkappa$ и k — волновые числа соответственно в разложениях Фурье и Ханкеля, J_n — функция Бесселя порядка n, и введена новая координата $\xi = z - V_{0z}t$. Приравнивая к нулю знаменатель подынтегрального выражения в формуле (6), мы получим уравнение волновых поверхностей:

$$G(k, \varkappa) \equiv k^2 + \varkappa^2 - \left(\frac{n\omega_0 - \varkappa V_{0z}}{c_s}\right)^2. \quad (7)$$

Характер этих поверхностей существенно зависит от числа Маха $M = V_{0z} / c_s$. Так, при $M_z = 0$ волновые поверхности в пространстве (k_x, k_y, k_z) являются концентрическими сферами с центром в начале координат, при $0 < M_z < 1$ поверхности становятся эллипсоидами вращения, смещенными относительно начала, вследствие эффекта Допплера. При $M_z = 1$ получаются параболоиды вращения и, наконец, при $M_z > 1$ — гиперболоиды вращения. В соответствие с этим уравнение (1) с учетом того, что $\xi = z - V_{0z}t$ будет эллиптического, параболического или гиперболического типа. В дальнейшем мы будем интересоваться только случаем $M_z < 1$. Из уравнения (7) непосредственно следует условие излучения

$$\left(\frac{n\omega_0 - \varkappa V_{0z}}{c_s}\right)^2 - \varkappa^2 \geqslant 0, \quad (8)$$

когда действительным волновым числам $\varkappa$ соответствуют, в силу формулы (7), действительные k. При $M_z < 1$ (8) имеет особенно простой вид:

$$-\frac{n\omega_0}{c_s(1-M_z)} \leqslant \varkappa \leqslant +\frac{n\omega_0}{c_s(1+M_z)}. \quad (9)$$

Это определяет область излучаемых длин волн. Если неравенство (8) имеет обратный знак, то оно будет определять область квазистатических возмущений, которые не представляют интереса для вопросов излучения. Проведя интегрирование в выражении (6) с учетом этих замечаний, получим

$$p = \frac{F_\varphi + \frac{M_\varphi}{1-M_z^2}\left(M_z + \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}\right)F_z}{2\pi a\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n\left(\frac{nM_\varphi \sin\theta}{\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}\right)\frac{\sin n\gamma}{R}, \quad (10)$$

где $M_\varphi = V_{0\varphi} / c_s$ и для удобства введено обозначение фазы

$$\gamma = \varphi - \omega_0 t + \frac{\omega_0 R}{c_s}\frac{M_z\cos\theta + \sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}{1-M_z^2} - \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

В этих выражениях использованы сферические координаты $\xi = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$. Заметим, что можно было бы выбрать в качестве координат $\xi = \sqrt{1-M_z^2}R_*\cos\theta_*$, $r = R_*\sin\theta_*$ [8], однако никаких существенных

упрощений при этом не получается и поэтому указанные координаты здесь не используются.

Из соотношения (10), как частный случай при $F_z = 0$ и $M_z = 0$, следует выражение для давления, полученное в работе [1]. Более того, если положить только $M_z = 0$, то получается соотношение, приведенное в работе Гутина [3]. Это означает, что при анализе излучения звука винтами в этой работе фактически оказался рассмотренным лишь частный случай сформулированной здесь задачи.

Выражение (10) несколько упрощается, если тело вращения движется по винтовой линии так, что его ось симметрии всюду касательна к траектории движения; тогда вследствие соотношений (4) можно написать

$$F_\varphi + \frac{M_\varphi}{1 - M_z^2}\left(M_z + \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - M_z^2 \sin^2\theta}}\right) F_z = \frac{M_z \cos\theta + \sqrt{1 - M_z^2 \sin^2\theta}}{(1 - M_z^2)\sqrt{1 - M_z^2 \sin^2\theta}} F. \tag{12}$$

Как видно из формулы (10), излучение содержит целый спектр волн с частотами

$$\omega_n = n\omega_0. \tag{13}$$

Аналогично случаю излучения волн телом, движущимся по окружности [1], при дозвуковом движении по винтовой линии тело излучает в основном первые гармоники ряда (10), т. к. с ростом номера гармоники при M_z и $M_\varphi < 1$ их амплитуды быстро уменьшаются.

Тем же приемом, что и в работе [1], определим интенсивность излучения звуковых волн в единицу телесного угла

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{(1 - M_z^2)\left[F_\varphi + \frac{M_\varphi}{1 - M_z^2}\left(M_z + \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - M_z^2 \sin^2\theta}}\right)\right]^2}{8\pi^2 \rho_0 c_s a^2 (1 - M_z^2 \sin^2\theta)\,(M_z \cos\theta + \sqrt{1 - M_z^2 \sin^2\theta})} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2 \left[\frac{n M_\varphi \sin\theta}{\sqrt{1 - M_z^2 \sin^2\theta}}\right]. \tag{14}$$

Суммирование ряда в этой формуле можно провести, воспользовавшись известной формулой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(nx) = \frac{x^2(4 + x^2)}{16(1 - x^2)^{7/2}}. \tag{15}$$

Таким образом, вопрос о распределении по углу θ интенсивности излучения звука телом, движущимся по винтовой линии, решается полностью.

Представляет определенный интерес интенсивность излучения звука на гармонике номера n. Для этого необходимо проинтегрировать в выражении (14) общий член ряда по телесному углу θ. К сожалению, в общем случае это сделать не удается, так же как и определить полную интенсивность излучения. Вследствие этого приходится использовать некоторые упрощающие предположения. Так, при выполнении условий (4), (12) и $M_z^2 \ll 1$ из формулы (14) мы имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{(1 + M_z \cos\theta) F_\varphi^2}{8\pi^2 \rho_0 c_s a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2 (n M_\varphi \sin\theta). \tag{16}$$

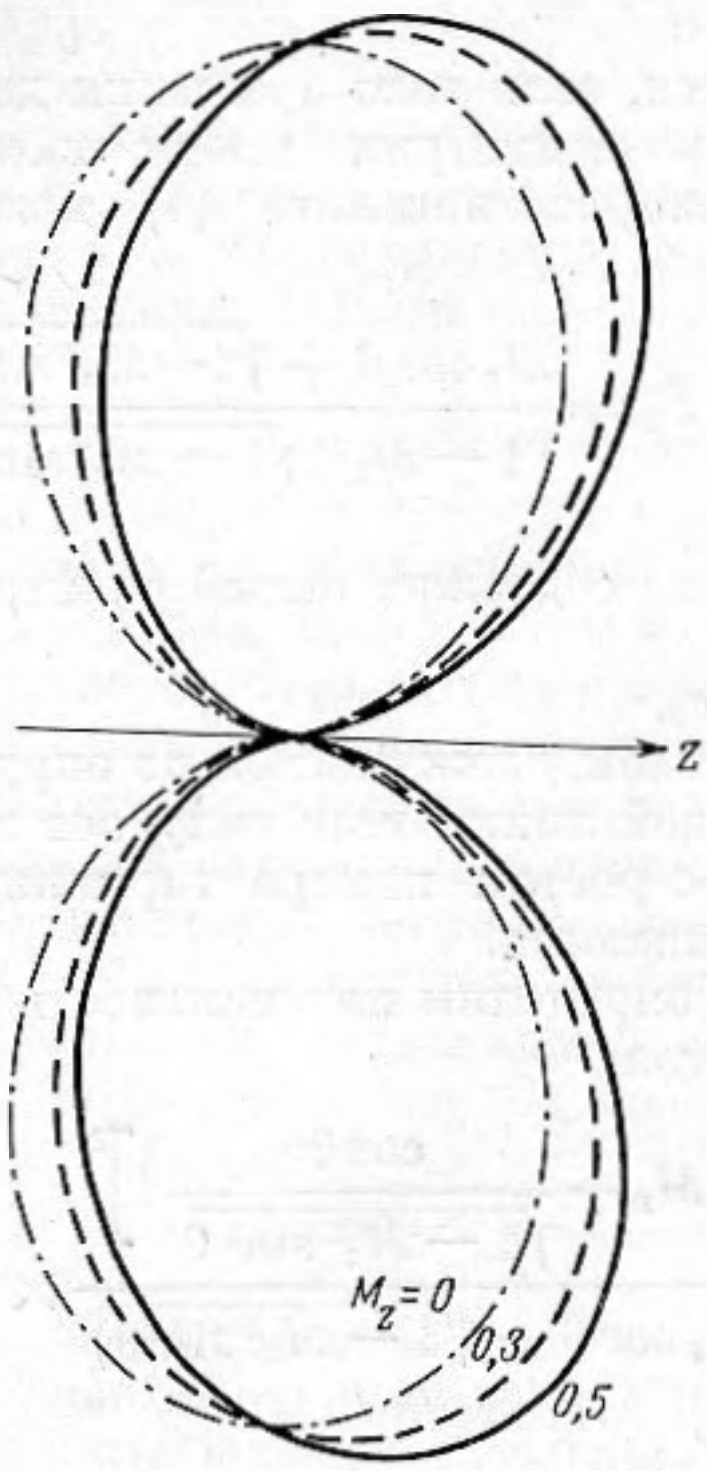
Суммируя по n при помощи соотношения (15), получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{M_\varphi^2 F_\varphi^2 (1 + M_z \cos\theta)(4 + M_\varphi^2 \sin^2\theta)}{128\pi^2 a^2 \rho_0 c_s (1 - M_\varphi^2 \sin^2\theta)^{7/2}} \sin^2\theta. \tag{17}$$

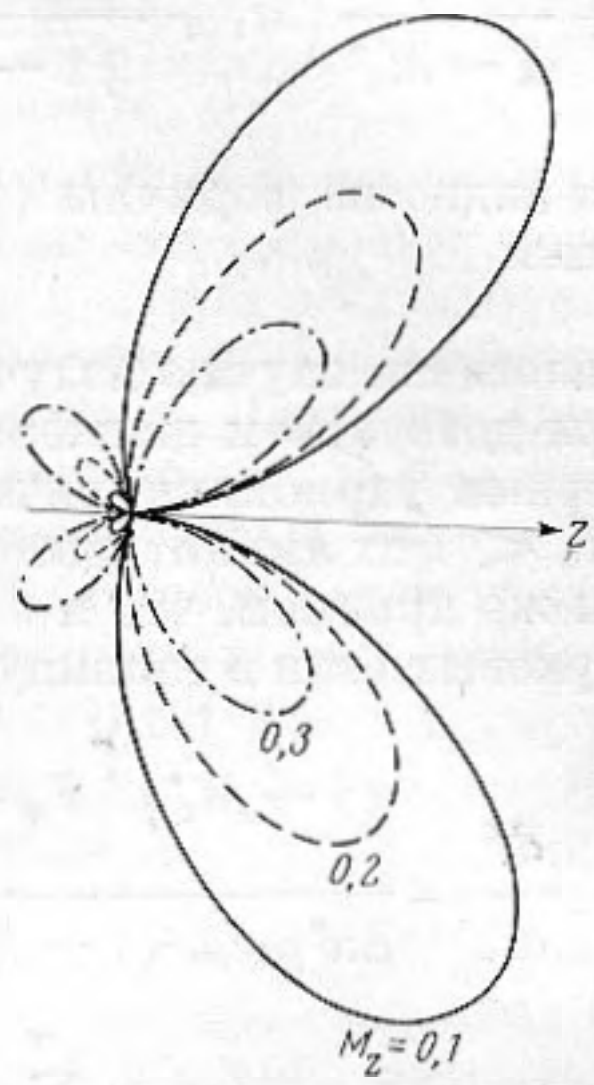
На фиг. 2 представлены диаграммы направленности излучения при $M_\varphi = 0{,}1$ и нескольких различных значениях M_z. Как видно, при $M_z = 0$ излучение имеет дипольный характер, максимум диаграммы направленности лежит в плоскости окружности, по которой движется тело. Далее с ростом M_z диаграмма деформируется вследствие сноса звука потоком. Интегрируя по телесному углу θ, получим полную интенсивность излучения

$$I = \frac{M_\varphi^2 F_\varphi^2}{12\pi a^2 \rho_0 c_s (1 - M_\varphi^2)^3} \qquad (18)$$

которая совпадает с полученной ранее в работе [1]. Таким образом,



Фиг. 2



Фиг. 3

в рассматриваемом случае снос звука потоком в направлении оси не влияет на полную интенсивность излучения, хотя вносит искажение в диаграмму направленности.

Рассмотрим другой частный случай общей формулы (14), когда

$$F_\varphi = 0 \quad \text{и} \quad M_z^2 \ll 1.$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{M_\varphi^2 F_\varphi^2 (M_z + \cos\theta)^2}{8\pi^2 a^2 \rho_0 c_s (1 + M_z \cos\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} n_2 J_n^2 (n M_\varphi \sin\theta). \qquad (19)$$

Вновь пользуясь зависимостью (15), получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{M_\varphi^4 F_z^2 (M_z + \cos\theta)^2 (4 + M_\varphi^2 \sin^2\theta)}{128\pi^2 a^2 \rho_0 c_s (1 + M_z \cos\theta)(1 - M_\varphi^2 \sin^2\theta)^{7/2}} \sin^2\theta. \qquad (20)$$

На фиг. 3 представлены диаграммы направленности излучения при $M_\varphi = 0{,}1$ и при трех различных значениях M_z. Видно, что диаграммы искажены не только сносом в потоке, движущимся по оси, но и хорошо заметным квадрупольным членом, присутствующим в излучении. Полная интенсивность излучения при M_z^2 и $M_\varphi^2 \ll 1$ будет

$$I = \frac{M_\varphi^4 F_z^2}{60\pi a^2 \rho_0 c_s}. \qquad (21)$$

Результаты предыдущего рассмотрения легко обобщаются на случай, когда по винтовым линиям перемещаются одновременно N тел. По-прежнему будем считать, что выполнено условие

$$a_m \gg r_{m0}, \tag{22}$$

где a_m — радиус винтовой линии, по которой движется тело с размером r_{m0}. При движении N тел с начальными фазами φ_m, угловыми скоростями ω_{0m} и продольными скоростями V_{0zm}, функция плотности силы в (1) запишется в виде суммы

$$\mathbf{f} = \sum_{m=1}^{N} (F_{\varphi m}\mathbf{e}_\varphi + F_{zm}\mathbf{e}_z)\frac{\delta(r-a_m)}{r}\,\delta(z - V_{z0m}t)\,\delta(\varphi - \varphi_m - \omega_{0m}t)\,. \tag{23}$$

Решение уравнения (1) в волновой зоне для каждого члена суммы (23) имеет вид (6), (10). Пользуясь принципом суперпозиции для частных решений линейного уравнения (1), легко получить его решение, когда плотность силы $\mathbf{f}$ задана в виде (23).

Здесь будет рассмотрен один простой частный случай излучения звука при движении N тел с тем, чтобы избавиться от ряда несущественных усложнений задачи. Допустим, что N совершенно тождественных тел движется с одинаковыми скоростями по винтовым линиям одинакового радиуса, т. е. $V_{0zm} = V_0$, $\omega_{0m} = \omega_0$ и $a_m = a$. Положим, что начальные фазы распределены равномерно $\varphi_m = 2\pi m / N$ и $F_{mz} = F_z$, $F_{m\varphi} = F_\varphi$. Если такая вращающаяся система тел обтекается газом, движущимся в направлении оси вращения, то силовая функция этой системы имеет вид

$$\mathbf{f} = (F_\varphi \mathbf{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z)\frac{\delta(r-a)}{r}\,\delta(r - V_0 t)\sum_{m=1}^{N}\delta(\varphi - \omega_0 t - 2\pi m/N)\,. \tag{24}$$

Подставив функцию (24) в уравнение (1) и пользуясь принципом суперпозиции частных решений, мы получим решение (1) в волновой зоне:

$$p = N^2 \frac{F_\varphi + \dfrac{M_\varphi}{1-M_z^2}\left(M_z + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}\right)F_z}{2\pi a\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}} \times$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu J_{\nu N}\left(\frac{\nu N M_\varphi \sin\theta}{\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}\right)\frac{\sin(\nu N\gamma)}{R}\,. \tag{25}$$

Таким образом, в результате интерференции звуковых волн, излучаемых каждым из N тел, существенно изменяется характер волновых полей возмущений. Действительно, как видно из формулы (25), в спектральном разложении содержатся только те гармоники, частоты которых кратны основной частоте системы из N тел $\omega = N\omega_0$. Амплитуды этих гармоник уменьшаются с ростом N, а при $N \to \infty$ они стремятся к нулю при дозвуковом движении, когда M_z и $M_\varphi < 1$.

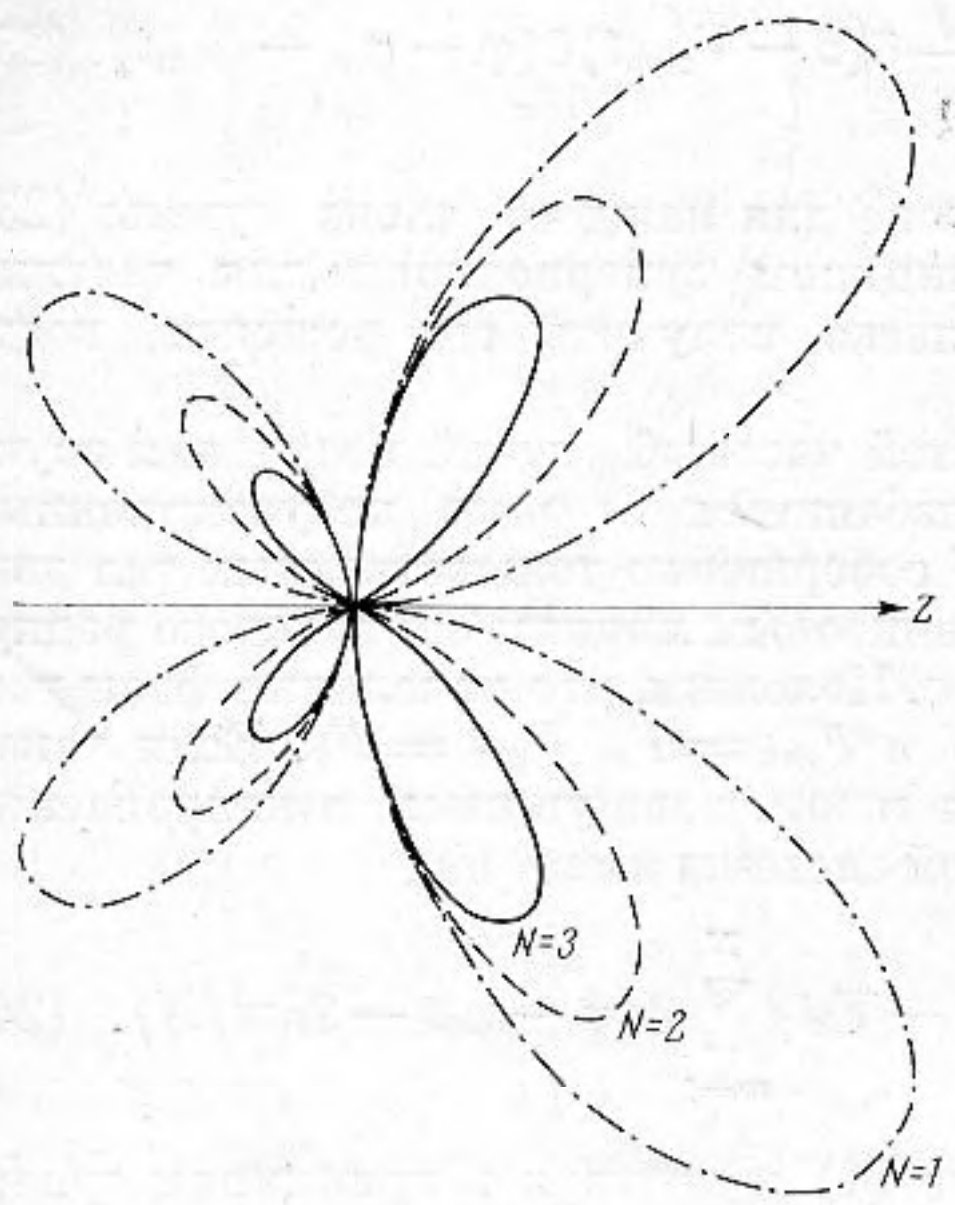
Выражение для интенсивности излучения звука N телами, обобщающее формулу (14), имеет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{(1-M_z^2)\left[F_\varphi + \dfrac{M_\varphi}{1-M_z^2}\left(M_z + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}\right)F_z\right]^2 N^4}{8\pi^2 a^2 \rho_0 c_s (1-M_z^2\sin^2\theta)\,(M_z\cos\theta + \sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta})} \times$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 J_{\nu N}^2\left(\frac{\nu N M_\varphi \sin\theta}{\sqrt{1-M_z^2\sin^2\theta}}\right). \tag{26}$$

Ряд по индексу ν в этом выражении является фактически разложением интенсивности излучения на мультиполи. Если для случая $N = 1$, рассмотренного выше, при дозвуковом движении основную роль играло дипольное излучение, то при $N > 1$ основную роль играет излучение мультиполя порядка $2N$. Интенсивность излучения 1-й гармоники при $M_\varphi < 1$ и $M_z^2 \ll 1$ будет

$$\frac{dI_1}{d\Omega} = \frac{[F_\varphi + M_\varphi (M_z + \cos\theta) F_z]^2}{8\pi^2 a^2 \rho_0 c_s} \frac{N^{2(N+2)} M_\varphi^{2N}}{2^{2N} (N!)^2} \sin^{2N}\theta. \qquad (27)$$



Фиг. 4

На фиг. 4 изображена функция $y(\theta) = (M_z + \cos\theta)^2 \sin^{2N}\theta$, (28) которая дает представление о том, как изменяется диаграмма направленности, когда $F_\varphi = 0$, а число N возрастает. Из этой фигуры видно, что с ростом N лепестки диаграммы сужаются, а интенсивность в максимуме каждого лепестка уменьшается. Более подробный анализ выражения (26) можно провести аналогично тому, как это было сделано выше для одного тела.

Формально можно было бы рассмотреть и случай околозвукового и сверхзвукового движения тел по винтовым линиям. Однако неясно, насколько справедливо будет линейное приближение, в особенности при околозвуковых скоростях движения тел конечных размеров. Кроме того, обтекание тел при больших числах Рейнольда сопровождается образованием турбулентного следа, который является дополнительным источником излучения звуковых волн, особенно интенсивным при околозвуковых скоростях движения тела [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Докучаев. Излучение звуковых волн телом, движущимся по окружности и вращающимся флюгером простой формы. Акуст. ж., 1965, **11**, 3, 324—333.
2. Б. П. Докучаев. К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах. Ж. эксп. и теор. физ., 1962, 959—604.
3. G. N. Ward. Linearized theory of steady high-speed flow. Cambridge Univ. Press, 1955.
4. Б. П. Константинов. «О звуке вращения» воздушного винта (к статье Л. Я. Гутина того же названия). Ж. техн. физ., 1942, **12**, 86—87.
5. Л. Я. Гутин. О звуковом поле вращающегося воздушного винта. Ж. техн. физ., 1936, **6**, 899—909.
6. Л. Я. Гутин. О звуке вращения воздушного винта. Ж. техн. физ., 1942, **12**, 76.
7. Н. Ф. Краснов. Аэродинамика тел вращения. М., Оборонгиз, 1958.
8. Д. И. Блохинцев. Акустика неоднородной движущейся среды. М., ГТТИ, 1946.
9. M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc., 1952, **211**, 564—587.

Н.-и. радиофизический институт
при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию
29 октября 1965 г.