АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 2

УДК 534.231.1

ПОЛЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ТОЧЕЧНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С ПОГЛОЩАЮЩИМИ ГРАНИЦАМИ

В. Ю. Завадский, В. Д. Крупин

Рассмотрено суммарное неусредненное поле затухающих нормальных волн точечного гармонического излучателя в волноводе с поглощающими границами. Получено приближенное выражение для поля в виде разности двух эллиптических тэта-функций Якоби. Найдены асимптотические представления поля на разных расстояниях. Приведены численные результаты, полученные на ЭЦВМ.

В работе [1] было исследовано суммарное поле нормальных волн точечного гармонического излучателя, расположенного в плоскопараллельном однородном волноводе с поглощающими границами, для которых коэффициенты отражения по модулю меньше единицы.

Было показано, что при определении характера убывания поля потери на границах могут учитываться методом нормальных волн, и были найдены законы спадания поля при увеличении расстояния от излучателя. При нахождении законов спадания поля вертикальные координаты излучателя и точки наблюдения исключались путем усреднения поля по толщине волновода, что и дало возможность определить зависимость неусредненного квадрата модуля звукового давления от расстояния между излучателем и точкой наблюдения.

В настоящей работе показано, что законы спадания поля, представленного суммой нормальных волн, могут быть найдены без такого усреднения. Получено приближенное выражение для поля в виде разности двух эллиптических тэта-функций Якоби [2] и приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующих интерференцию волн в волноводе и асимптотическое спадание поля.

Рассмотрим в качестве волновода жидкую среду, заполняющую в декартовой системе координат $OXYZ$ область в виде слоя: $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \leqslant z \leqslant H$. Будем считать, что скорость звука в жидкости $c = \text{const}$, плотность $\rho = \text{const}$, граница $z = 0$ характеризуется коэффициентом отражения $V_1(\vartheta)$, а граница $z = H$ — коэффициентом отражения $V_2(\vartheta)$, где ϑ — угол падения плоской гармонической волны. В точке $(0, 0, z_0)$ находится гармонический излучатель: $R^{-1}\exp(ikR - i\omega t)$, где $k = \omega / c$; $R^2 = (z - z_0)^2 + r^2$; $r^2 = x^2 + y^2$, ω — круговая частота. Тогда, воспользовавшись результатами работы [1], можно выражение для потенциала звукового поля Φ (множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем) в волноводе представить в виде *

$$\Phi = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l, \tag{1}$$

* Поле боковых волн мы не рассматриваем.

$$\Phi_l = \pi k \frac{[e^{-ik\cos\vartheta_l z} + V_1(\vartheta_l)e^{ik\cos\vartheta_l z}][e^{-ik\cos\vartheta_l z_0} + V_1(\vartheta_l)e^{ik\cos\vartheta_l z_0}]}{V_1(\vartheta_l)\frac{d}{d\vartheta}(V_1V_2e^{2ikh\cos\vartheta})|_{\vartheta=\vartheta_l}} \times$$
$$\times H_0^{(1)}(kr\sin\vartheta_l)\sin\vartheta_l, \tag{2}$$

где ϑ_l — комплексные корни ($\operatorname{Im}\vartheta_l \geqslant 0$) уравнения:

$$V_1(\vartheta)V_2(\vartheta)e^{2ikH\cos\vartheta} = 1 \tag{3}$$

Для высоких частот ($\omega \to \infty$, $kH \to \infty$) производная знаменателя, как показано в работе [1], приближенно равна

$$\frac{d}{d\vartheta}[V_1(\vartheta)V_2(\vartheta)e^{2ikH\cos\vartheta}]|_{\vartheta=\vartheta_l} \simeq 2ikH\cos\vartheta_l. \tag{4}$$

Исследуем бесконечную последовательность корней ϑ_l дисперсионного уравнения (3) для двух случаев

$$\text{а)}\quad V_1(\vartheta) = \frac{m_1\cos\vartheta - \sqrt{n_1^2 - \sin^2\vartheta}}{m_1\cos\vartheta + \sqrt{n_1^2 - \sin^2\vartheta}},$$

$$V_2(\vartheta) = \frac{mF(\vartheta)\cos\vartheta - \nu^4\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}}{mF(\vartheta)\cos\vartheta + \nu^4\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}}, \tag{5а}$$

$$F(\vartheta) = (2\sin^2\vartheta - \nu^2)^2 + 4\sin^2\vartheta\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}\sqrt{\nu^2 - \sin^2\vartheta};$$

$$\text{б)}\quad V_1(\vartheta) = \frac{\cos\vartheta - g_1}{\cos\vartheta + g_1}, \quad V_2(\vartheta) = \frac{\cos\vartheta - g_2}{\cos\vartheta + g_2} \quad (\operatorname{Re} g_1, \operatorname{Re} g_2 > 0) \tag{5б}$$

В первом случае полупространство $z < 0$ заполнено жидкой средой, характеризующейся плотностью $\rho_1 = m_1\rho$ и скоростью звука $c_1 = nc$, а полупространство $z > H$ — твердой средой, плотность которой $\rho_2 = m\rho$, скорость продольных волн $c_l = nc$, скорость поперечных волн $c_t = \nu c$.

Во втором случае потенциал звукового поля Φ удовлетворяет на границах третьим краевым условиям:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} + ig_1k\Phi|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + ig_2k\Phi|_{z=H} = 0. \tag{6}$$

Вводя обозначения $\xi = kH\cos\vartheta$, $\varkappa = kH$, $\varkappa_1 = kH\sqrt{1-n^2}$, $\varkappa_2 = kH\sqrt{1-\nu^2}$, $\varkappa_3 = kH\sqrt{1-n_1^2}$ и подставляя выражения (5а), (5б) в уравнение (3), получаем

$$\operatorname{tg}\xi = \xi\frac{\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}}{mm_1\xi^2F(\xi) - \varkappa^4\nu^4\sqrt{\varkappa_1^2 - \xi^2}\sqrt{\varkappa_3^2 - \xi^2}} \tag{7а}$$

$$\operatorname{tg}\xi = -i\xi\varkappa\frac{g_1 + g_2}{g_1g_2\varkappa^2 + \xi^2}. \tag{7б}$$

Трансцендентные уравнения (7а) и (7б) имеют бесконечную последовательность комплексных корней $\{\xi_l\}$ [3]. Определение корней в явном виде невозможно. Численные методы нахождения комплексных корней дисперсионного уравнения рассматривались в работах [4, 5]. Однако при больших значениях параметра $\varkappa = kH$, соответствующих области высоких частот ω, из последовательности ξ_l ($l = 1, 2, 3\ldots$) можно выделить упорядоченную конечную подпоследовательность ξ_l ($l = 1, 2, 3\ldots L$), в которой величины ξ_l и соответствующие им углы ϑ_l определяются из

уравнения (7а), (7б) приближенно в виде [6]

$$\xi_l = \pi l\left(1-\frac{p}{kH}\right)+O\left[\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^2\right],$$
$$\sin\vartheta_l = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^2+\frac{p}{2}\frac{(\pi l)^2}{(kH)^3}+O\left[\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^4\right], \tag{8}$$

где

$$p=\begin{cases}[F(1)\sqrt{1-n_1^2}m+m_1\nu^4\sqrt{1-n^2}]\,\nu^{-4}(1-n^2)^{1/2}(1-n_1^2)^{-1/2} & \text{(случай а)}\\ i(g_1^{-1}+g_2^{-1}) & \text{(случай б)}\end{cases}$$

При этом должно выполняться соотношение: $L < kH\pi^{-1}$. Выражения (8) справедливы при любых значениях параметра p. Если физические постоянные волновода (плотность и скорость звука) и прилегающих к нему сред, таковы, что $\operatorname{Im} p = 0$, то для всех $l < L$ имеет место $\operatorname{Im}\xi_l = 0$, $\operatorname{Im}\vartheta_l = 0$. В этом случае порядок убывания членов Φ_l суммы (1) в зависимости от r определяется из асимптотического разложения функции $H_0^{(1)}(kr\sin\vartheta_l)$, причем $|\Phi|_l = O(r^{-1/2})\ (r\to\infty)$, и не зависит от номера l.

В другом случае, когда $\operatorname{Im} p > 0$, все корни $\vartheta_l (l < L)$ имеют отличную от нуля мнимую часть

$$\operatorname{Im}\vartheta_l = \frac{\operatorname{Im} p}{2}\frac{(\pi l)^2}{(kH)^3}+O\left[\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^4\right]. \tag{9}$$

При этом порядок убывания членов суммы (1) зависит от $l (l < L)$ $|\Phi_i| = O(r^{-1/2}e^{-\alpha r l^2})$, где $\alpha = \frac{\operatorname{Im} p}{2H}\left(\frac{\pi}{kH}\right)^2$. Это обстоятельство, как было показано в работе [1], приводит к упрощению при вычислении среднего квадрата модуля суммы (1). В этой же работе были получены приближенные выражения для коэффициентов отражения $V_1(\vartheta_l)$, $V_2(\vartheta_l)$, для комплексных аргументов ϑ_l в виде

$$V_1(\vartheta_l) = -e^{2ip_1(\pi l/kH)}+O\left[\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^2\right],$$
$$V_2(\vartheta_l) = -e^{2ip_2(\pi l/kH)}+O\left[\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^2\right], \tag{10}$$

где

$$p_1=\begin{cases}m_1(1-n_1^2)^{-1/2} & \text{(случай а)}\\ ig_1^{-1} & \text{(случай б)}\end{cases}$$
$$p_2=\begin{cases}mF(1)\nu^{-4}(1-n^2)^{-1/2} & \text{(случай а)}\\ ig_2^{-1} & \text{(случай б)}\end{cases}$$
$$p = p_1+p_2.$$

Подставим в формулу (2) приближенные выражения (4), (8), (10). При этом используем асимптотическое разложение функции $H_0^{(1)}(kr\sin\vartheta_l)$ $(kr \gg 1)$, и удерживая в показателе экспоненты члены $O\left[\left(\frac{\pi l}{kH}\right)^2\right]$, получаем для Φ_l $(l < L)$ приближенное выражение

$$\Phi_l = C(\omega, H)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}e^{i\pi\tau l^2}(\cos 2u_- l-\cos 2u_+ l) \quad (\operatorname{Im}\tau > 0), \tag{11}$$

где введены обозначения

$$\tau = -\pi(rk)\frac{1}{2}(kH)^{-2}[1-p(kH)^{-1}]^2,$$

$$u_+ = \pi \frac{z+z_0}{2H}[1 - p(kH)^{-1}] + p_1(kH)^{-1}, \tag{11a}$$

$$u_- = \pi \frac{z-z_0}{2H}[1 - p(kH)^{-1}], \quad C(\omega, H) = H^{-1}\sqrt{2\pi\omega^{-1}c}\, e^{i\pi/4}.$$

Предположим, что выполняется соотношение $\operatorname{Im} p \frac{r}{H} \gg 1$. На расстояниях r, удовлетворяющих этому условию, в сумме (1) будут существенны только члены с номерами $1 < l < L$. Покажем, что при этом предположении суммирование можно распространить до $l = \infty$. Обозначим $u = \max\{|\operatorname{Im} u_-|, |\operatorname{Im} u_+|\} = \left| \frac{z+z_0}{2H} \operatorname{Im} p \frac{\pi}{kH} - \frac{\operatorname{Im} p_1}{kH} \right|$ и, учитывая, что $\pi(L+1)(kH)^{-1} \simeq 1$ и $\operatorname{Im}\tau = \frac{\pi}{(kH)^2} \operatorname{Im} p \frac{r}{H}$, оценим остаток суммы (1) от $l = L+1$ до $l = \infty$.

$$\left| \sum_{l=L+1}^{\infty} e^{i\pi\tau l^2}(\cos 2u_- l - \cos 2u_+ l) \right| < 2 \sum_{l=L+1}^{\infty} e^{-\operatorname{Im}\tau\pi l^2 + 2ul} <$$

$$< 2 \sum_{l=L+1}^{\infty} e^{-(\pi l/kH)\operatorname{Im} p \left[\frac{r}{H} - \left|\frac{z+z_0}{H} - \frac{2\operatorname{Im} p_1}{\pi \operatorname{Im} p}\right|\right]} =$$

$$= 2e^{-\frac{\pi(L+1)}{kH}\operatorname{Im} p \left[\frac{r}{H} - \left|\frac{z+z_0}{H} - \frac{2\operatorname{Im} p_1}{\pi \operatorname{Im} p}\right|\right]} \times$$

$$\times \left\{1 - e^{-\frac{\pi(L+1)}{kH}\operatorname{Im} p \left[\frac{r}{H} - \left|\frac{z+z_0}{H} - \frac{2\operatorname{Im} p_1}{\pi \operatorname{Im} p}\right|\right]}\right\}^{-1}.$$

Так как $r \gg z + z_0$, то имеет место оценка

$$\sum_{l=L+1}^{\infty} e^{i\pi\tau l^2}(\cos 2u_- l - \cos 2u_+ l) = 0(e^{-\operatorname{Im} p(r/H)}).$$

Тогда приближенно получим

$$\Phi = C(\omega, H) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{i\pi\tau l^2}(\cos 2u_- l - \cos 2u_+ l). \tag{12}$$

Используя одно из представлений эллиптической тэта-функции Якоби $\vartheta_3(u|\tau)$ [2]

$$\vartheta_3(u|\tau) = 1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} e^{i\pi\tau l^2} \cos 2ul \qquad (\operatorname{Im}\tau > 0), \tag{12a}$$

выражение (12) напишем в виде

$$\Phi = \frac{C(\omega, H)}{2} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} U(r, z, z_0), \tag{13}$$

где $U(r, z, z_0) = \vartheta_3(u_-|\tau) - \vartheta_3(u_+|\tau)$. Приведем некоторые полезные для рассматриваемой задачи свойства функции $\vartheta_3(u|\tau)$.

1. Как функция двух переменных (u, τ), $\vartheta_3(u|\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных параболического типа

$$\pi i \frac{\partial^2 F(u, \tau)}{\partial^2 u} + 4 \frac{\partial F(u, \tau)}{\partial \tau} = 0.$$

2. Функция $\vartheta_3(u|\tau)$ является квази-двояко-периодической функцией u. Это означает, что $\vartheta_3(u + \pi|\tau) = \vartheta_3(u|\tau)$, $\vartheta_3(u + \pi\tau|\tau) = e^{-i\pi\tau - 2iu}\vartheta_3(u|\tau)$.

Единица и множитель $e^{-i\pi\tau-2iu}$ называются множителями периодичности, соответствующими периодам π и $\pi\tau$.

3. При замене τ на $-1/\tau$ и u на u/τ (мнимое преобразование Якоби) функция $\vartheta_3(u|\tau)$ преобразуется согласно формуле $\vartheta_3(u|\tau) = (-i\tau)^{-1/2}$, $\exp\left(\frac{u^2}{i\pi\tau}\right)\cdot\vartheta_3\left(\frac{u}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)$, причем значение $(-i\tau)^{-1/2}$ определяется условием $|\arg(-i\tau)| < \pi/2$. Это соотношение является частным случаем результата, известного из теории дифференциальных уравнений параболического типа [7]. Этот результат заключается в том, что если $F(u,\tau)$ является решением уравнения 1, то функция $(-i\tau)^{-1/2}\exp\left(\frac{u^2}{i\pi\tau}\right)F\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ также будет решением этого уравнения.

Как следствие, из формулы преобразования $\vartheta_3(u|\tau)$ получается другое представление для $\vartheta_3(u|\tau)$

$$\vartheta_3(u|\tau) = (-i\tau)^{-1/2}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}\exp\frac{(u-l\pi)^2}{i\pi\tau}.$$

Из свойства 1 следует, что функция $U(r,z,z_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению диффузии [8] $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial U}{\partial r} = 0$, а из свойства 3 для Φ следует выражение вида

$$\Phi = \frac{e^{ikr}}{r}\left[\exp\left(\frac{u_-^2}{i\pi\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{u_-}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{u_+^2}{i\pi\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{u_+}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)\right]. \tag{14}$$

Принятое выше предположение $\operatorname{Im} p\frac{r}{H} \gg 1$ не накладывает никаких ограничений на $\operatorname{Im}\tau$. Очевидно, что при выполнении соотношения $\operatorname{Im} p\frac{r}{H} \gg 1$ может реализоваться как случай $\operatorname{Im}\tau \ll 1$, так и случай $\operatorname{Im}\tau \gg 1$.

Оценим величину $|\Phi|$ в предположении, что $\operatorname{Im}\tau \ll 1$. Воспользовавшись формулой (13) и свойством 3, имеем

$$|\Phi| < r^{-1/2}\frac{|C(\omega,H)|}{2}[\vartheta_3(i\operatorname{Im}\tau|i\operatorname{Im}u_-) + \vartheta_3(i\operatorname{Im}\tau|i\operatorname{Im}u_+)] =$$

$$= \sqrt{\frac{kH}{2\operatorname{Im}p}}\cdot\frac{1}{r}\left\{\exp\left[\frac{(\operatorname{Im}u_-)^2}{\pi\operatorname{Im}\tau}\right]\vartheta_3\left(\frac{\operatorname{Im}u_-}{\operatorname{Im}\tau}\middle|\frac{i}{\operatorname{Im}\tau}\right) + \right.$$

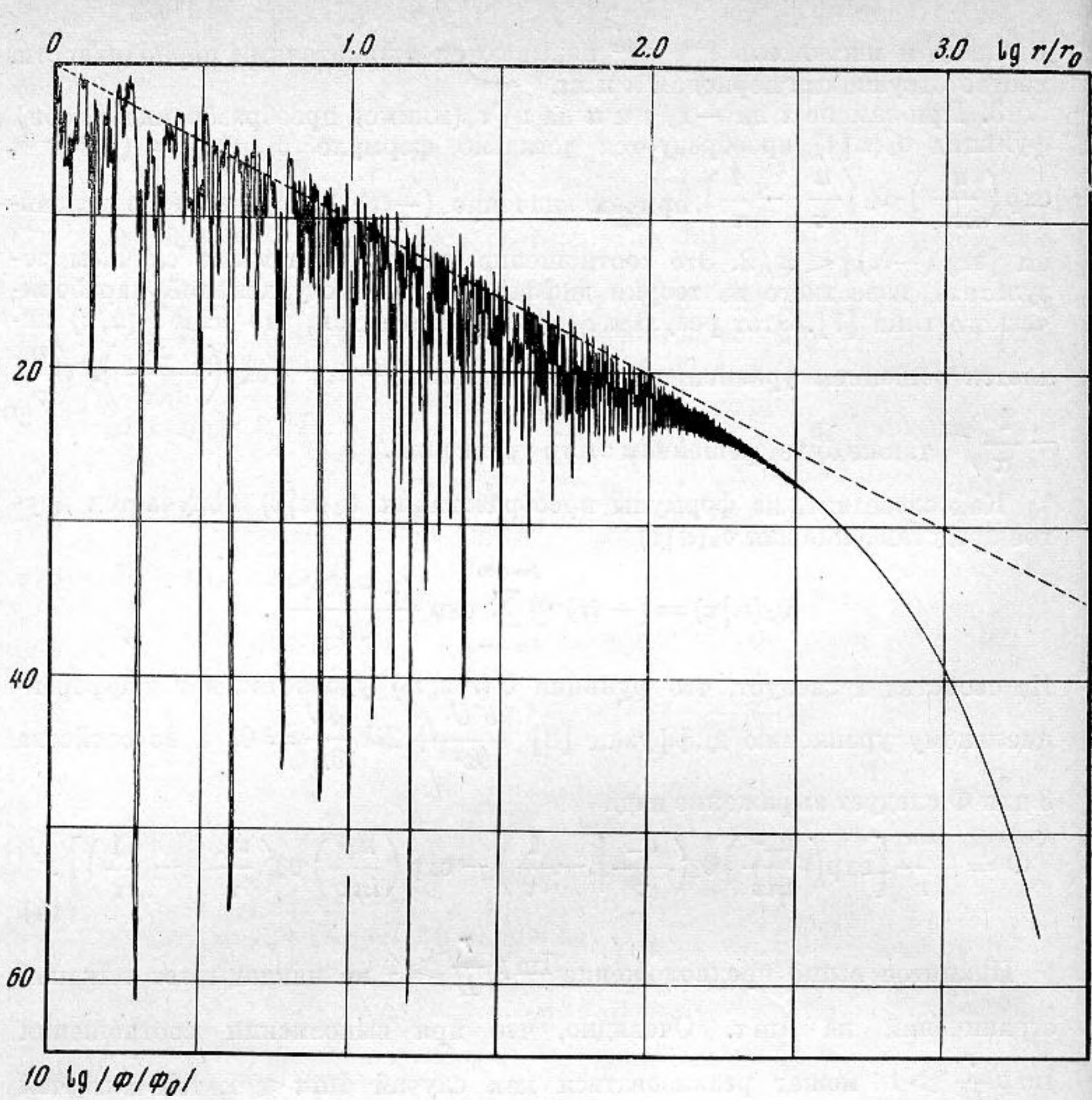
$$\left. + \exp\left[\frac{(\operatorname{Im}u_+)^2}{\pi\operatorname{Im}\tau}\right]\vartheta_3\left(\frac{\operatorname{Im}u_+}{\operatorname{Im}\tau}\middle|\frac{i}{\operatorname{Im}\tau}\right)\right\} <$$

$$< \sqrt{\frac{kH}{2\operatorname{Im}p}}\cdot\frac{1}{r}\vartheta_3\left(0\middle|\frac{i}{\operatorname{Im}\tau}\right)\left\{\exp\left[\frac{(z+z_0)^2}{4Hr}\cdot\operatorname{Im}p\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[\operatorname{Im}p\frac{(z-z_0)^2}{4Hr}\right]\right\}.$$

Учитывая, что $r \gg z + z_0$ и что $\vartheta_3\left(0\middle|\frac{i}{\operatorname{Im}\tau}\right) \simeq 1$ при $\operatorname{Im}\tau \to 0$, получаем оценку

$$|\Phi| = O(1/r) \qquad (\operatorname{Im}\tau \ll 1). \tag{15}$$



Фиг. 1

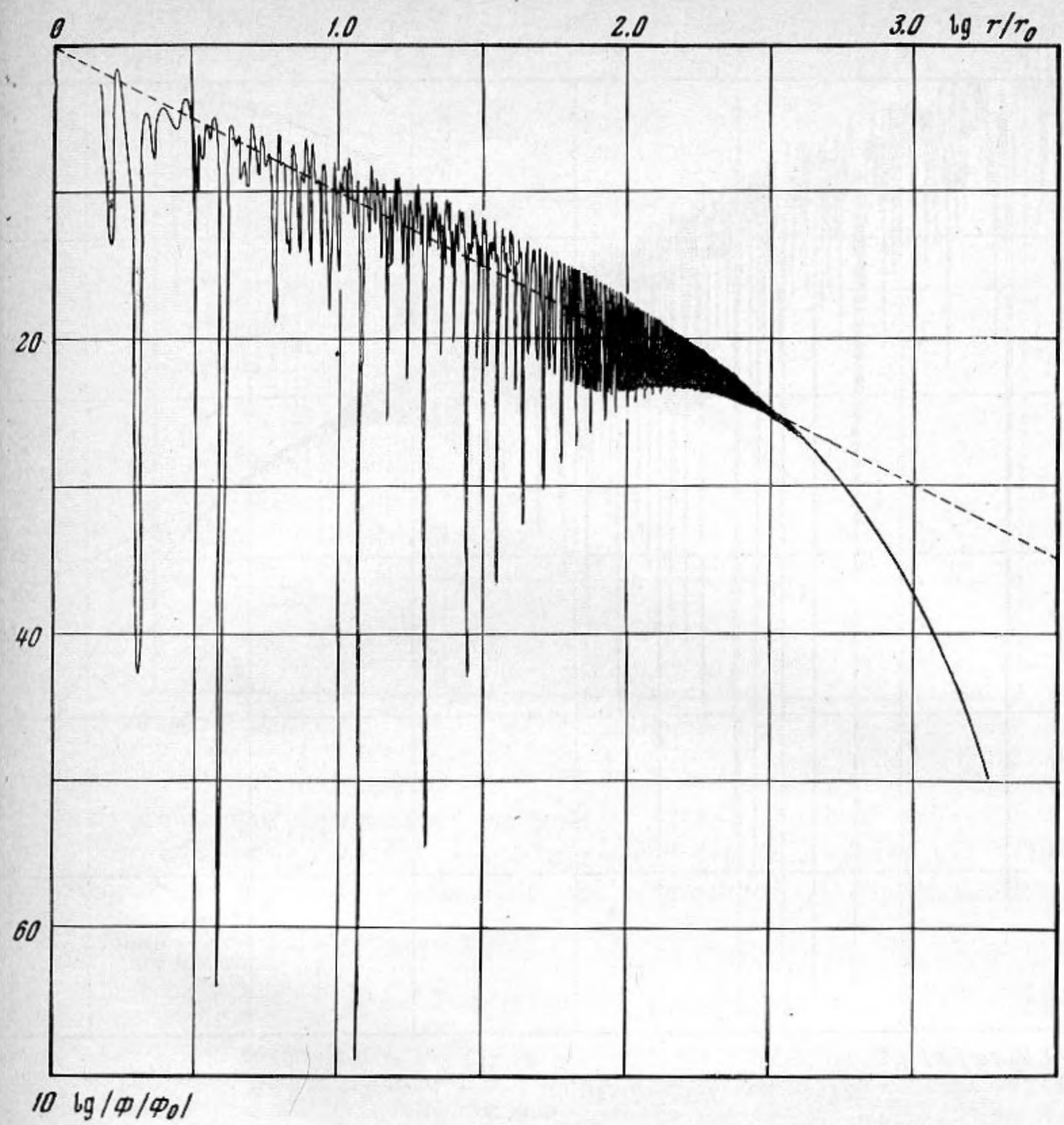
В другом предельном случае ($\operatorname{Im}\tau \gg 1$) имеет место оценка

$$|\Phi| = O(r^{-1/2} e^{-\pi \operatorname{Im}\tau}) \qquad (\operatorname{Im}\tau \gg 1) \tag{16}$$

Формула (16) описывает поле на больших расстояниях — поле первой наименее затухающей нормальной волны, а выражение (15) соответствует неусредненному полю на «средних расстояниях». Известно, что усреднение квадрата модуля Ф по положениям излучателя и приемника на этих же расстояниях дает закон $O(r^{-3/2})$ [1]. Из приведенного выражения (13) также следует закон «трех вторых» для усредненного квадрата модуля Ф, если воспользоваться свойством 3° для функции $\vartheta_3(u|\tau)$ и способом усреднения поля, примененным в работе [1].

Переход от закона (15) к закону (16) трудно проследить аналитическими методами. Поэтому были проделаны численные расчеты поля на ЭЦВМ. Вычисления основывались на представлении ϑ_3 — функции рядом (12а). Была составлена программа вычисления функции Якоби для комплексных значений τ.

На фиг. (1—3) приведены результаты расчетов $|\Phi|$, согласно выражению (13). По оси абсцисс отложена величина $\lg r/r_0$ (r_0 удовлетворяет условию $\operatorname{Im} p \frac{r_0}{H} \gg 1$, и соответствует значению $\operatorname{Im}\tau = 10^{-3}$), по оси ор-

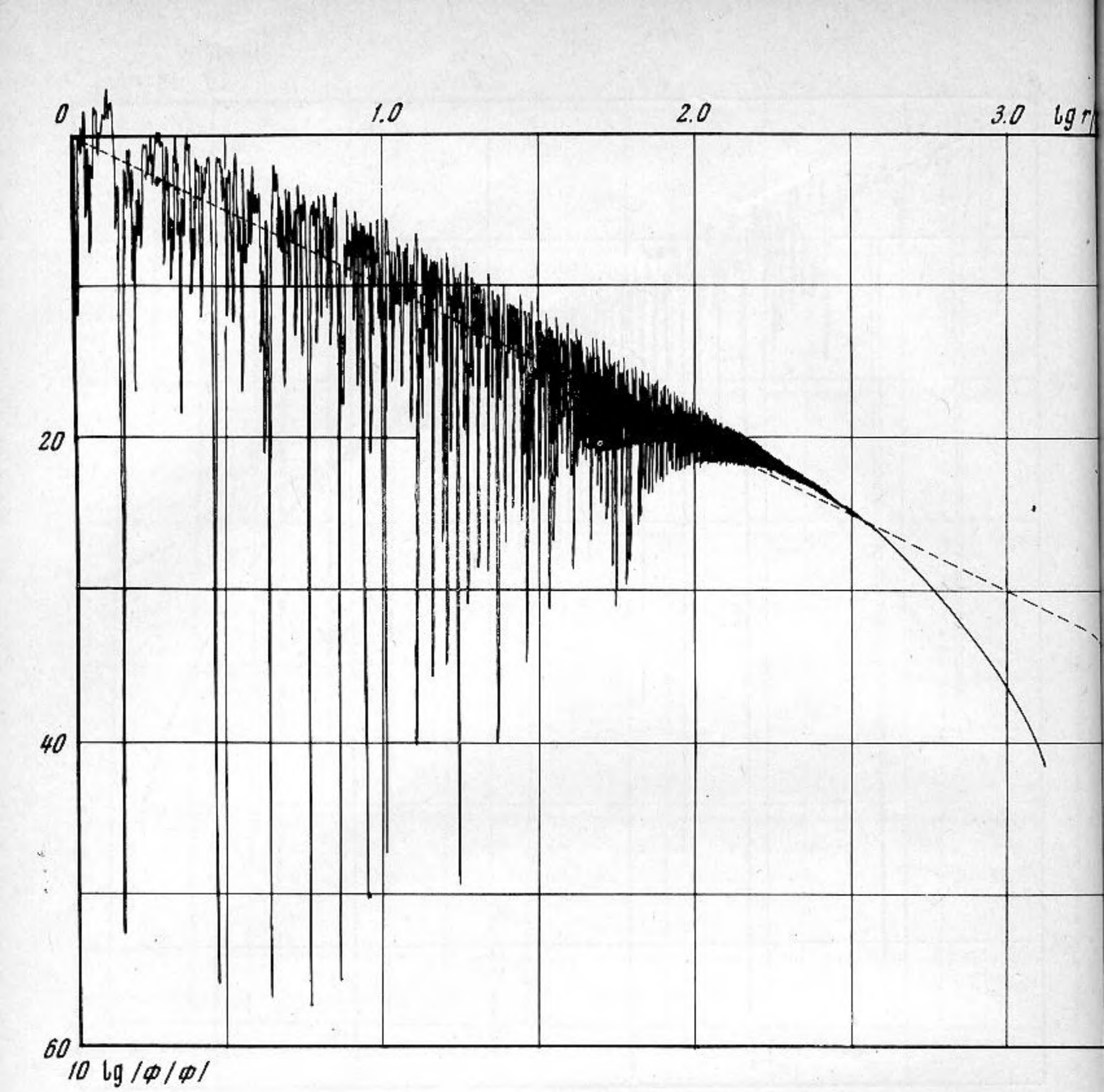


Фиг. 2

динат — $10 \lg |\Phi / \Phi_0|$, где $\Phi_0 = \Phi(r_0)$. Фиг. 1—3 соответствуют трем группам параметров: 1) $kH / \operatorname{Im} p = 500$, $u_- = 0{,}75$; 2) $kH / \operatorname{Im} p = 500$, $u_- = 0$, $u_+ = 0{,}75$; 3) $kH / \operatorname{Im} p = 700$, $u_- = 0{,}75$, $u_+ = 1{,}00$. При расчетах предполагалось, что величины u_- и u_+ вещественны, так как величины $\operatorname{Im} u_-$ и $\operatorname{Im} u_+$ имеют порядок $O(1 / kH)$. Пунктирными прямыми на фигурах показан сферический закон спадания поля. Перейдем к обсуждению полученных численных результатов.

Из приведенных фигур видно, что в начальной области «средних расстояний» ($\operatorname{Im} \tau \ll 1$) интерференционная картина имеет сложный осциллирующий характер, так как в формировании поля участвует большое число нормальных волн. Затем, в средней и правой частях области значений $\operatorname{Im} \tau$, соответствующей «средним расстояниям», интерференционная картина приобретает более простой характер, что указывает на резкое уменьшение числа затухающих нормальных волн, формирующих поле Ф.

Характер интерференционных явлений проявляется в виде гладкой кривой, являющейся огибающей минимумов модуля Ф. Эта огибающая, как видно из фигур, плавно переходит к экспоненту (16), образуя максимум, являющийся вершиной своеобразного «купола». Представляет интерес выяснить, какое количество нормальных волн играет основную роль в окрестности вершины купола. Численный расчет (фиг. 4) показы-



Фиг. 3

вает, что в рассматриваемой области значений $\operatorname{Im}\tau$ основной вклад в поле дают только две первые нормальные волны. На фиг. 4 по оси ординат отложена величина отношения модуля суммы двух нормальных волн к величине $|\Phi_0|$ в децибельном масштабе. Из сопоставления фиг. 2 и фиг. 4, рассчитанных при одинаковых значениях параметров, видно, что в окрестности вершины купола фигуры совпадают. Для нахождения вершины купола исследуем интерференцию двух первых нормальных волн. Модуль суммы двух нормальных волн равен

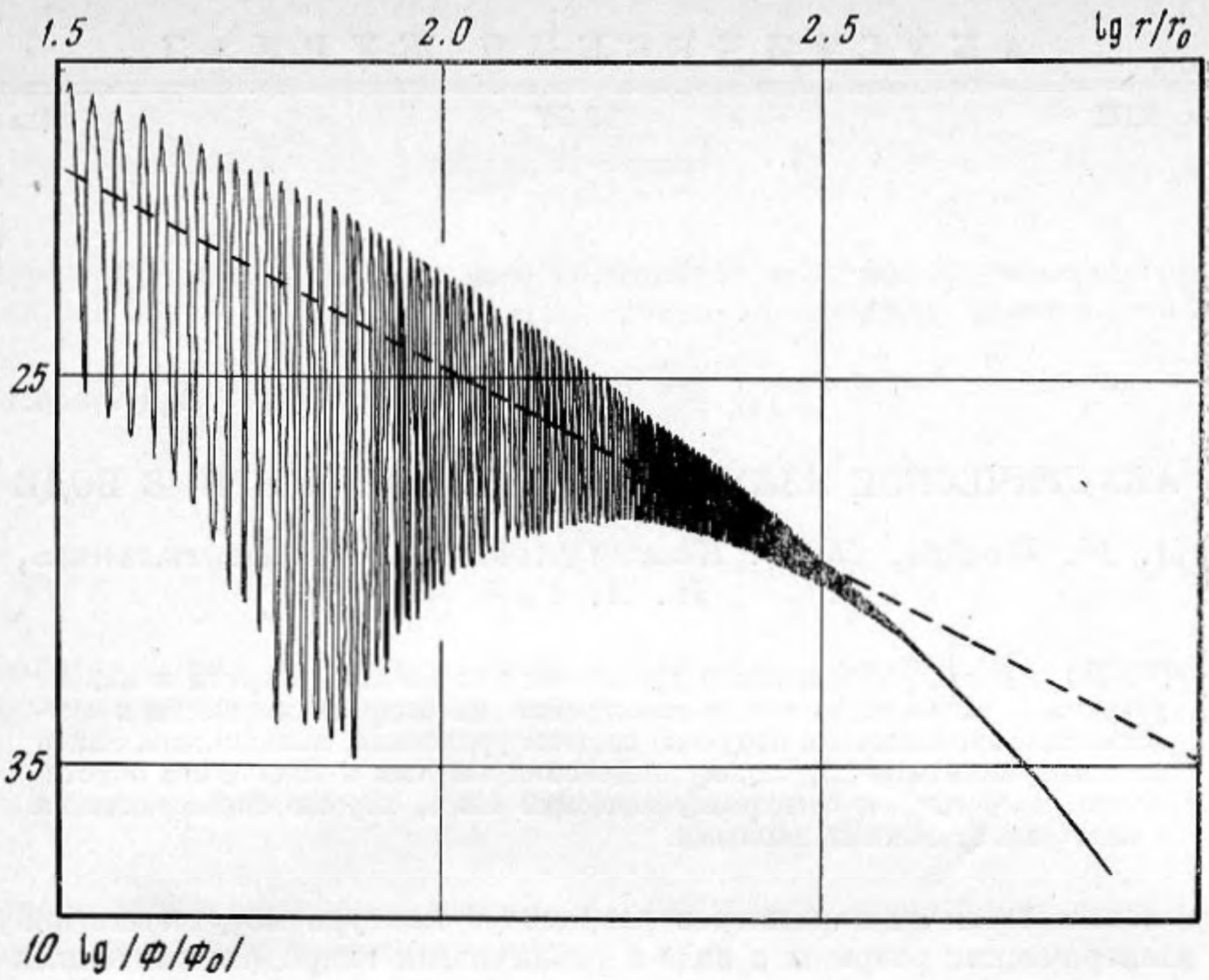
$$|\Phi| = |C(\omega, H)|\, r^{-1/2} f(x), \tag{17}$$

где

$$f(x) = [e^{-2\pi x}(\cos 2u_- - \cos 2u_+)^2 + 2e^{-3\pi x}(\cos 2u_- - \cos 2u_+) \times$$
$$\times (\cos 4u_- - \cos 4u_+)\cos 3\pi \operatorname{Re}\tau + e^{-8\pi x}(\cos 4u_- - \cos 4u_+)^2]^{1/2},$$
$$x = \operatorname{Im}\tau,$$
$$\operatorname{Re}\tau = -\frac{kH}{2\operatorname{Im} p}\cdot \operatorname{Im}\tau.$$

Функция $f(x)$ достигает минимумов в тех точках x, где

$$\cos 3\pi \operatorname{Re}\tau = -\operatorname{sign}(\cos 2u_- - \cos 2u_+)(\cos 4u_- - \cos 4u_+), \tag{18}$$



Фиг. 4

а их огибающая выражается функцией:

$$\varphi(x) = |e^{-\pi x}|\cos 2u_- - \cos 2u_+| - e^{-4\pi x}|\cos 4u_- - \cos 4u_+||. \quad (19)$$

Координата вершины купола x_k (и соответственное r_k) определяется из условия $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ и выражается так:

$$x_k = \frac{1}{3\pi}\ln[8|\cos 2u_- + \cos 2u_+|], \quad (20)$$

$$\operatorname{Im} p\frac{r_k}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{kH}{\pi}\right)^2 \ln[8|\cos 2u_- + \cos 2u_+|]. \quad (21)$$

Заметим, что на фиг. 3 отчетливо видны три купола, формирование которых обусловлено интерференцией уже четырех нормальных волн. С ростом $\operatorname{Im}\tau$ верхние два купола сближаются, образуя клиновидную область сгущения, что свидетельствует о сильном затухании третьей и четвертой нормальных волн. Остальные две нормальные волны образуют нижний купол. Вершины указанных куполов могут быть найдены аналитическим методом, рассмотренным выше.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. С. Григорьеву за полезные обсуждения и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. II. ОНТИ, 1934.
3. Д. И. Шерман. О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом основании. Тр. Сейсмологического института АН СССР, 1945, **115**, 3—31.
4. Ю. Л. Газарян. Распространение звука в слое, лежащем на полупространстве. Первая нормальная волна. Отчет Акустического ин-та АН СССР, 1958.
5. В. Ю. Завадский. Численный расчет полюсов нормальных волн в двухслойной среде с потерями. Отчет Акустического ин-та АН СССР, 1958.
6. E. T. Kornhauser, W. P. Raney. Attenuation in shallow — water propagation due to an absorbing bottom. J. Acoust. Soc. America, **27**, 689—692, 1955.
7. Г. Бейтмен. Математическая теория распространения электромагнитных волн. М., Физматгиз, 1958.
8. Г. Д. Малюжинец. Развитие представлений о явлении дифракции. Усп. физ. наук, 1959, **69**, 2, 321—334.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
1 июля 1965 г.