мы получим уравнения для B_1 и B_3:

$$\frac{dB_1}{dx} = -j\Delta_1' B_1 + j\nu A (B_1^* + B_3); \qquad \frac{dB_3}{dx} = -j\Delta_3' B_3 + 3j\nu A B_1, \tag{16}$$

где $\Delta_1' = \Delta_1 - \Delta_2 / 2$; $\Delta_3' = \Delta_3 - 3\Delta_2 / 2$. (17)

Представляя решение уравнений (16) в виде

$$B_1 = Ce^{\lambda x} + De^{\lambda^* x}; \qquad B_3 = Ge^{\lambda x} + He^{\lambda^* x}, \tag{18}$$

мы приходим к характеристическому уравнению

$$y^4 + (r^2 + 1 + 5x^2) y^2 + 9x^4 - 6rx^2 - x^2 + r^2 = 0, \tag{19}$$

где $y = \lambda / \Delta_3'$; $x = \nu A / \Delta_3'$; $r = \Delta_1' / \Delta_3'$.

Пусть 3ω отличается от ω_{20} на 10%, тогда $\Delta_3' / \Delta_1' = 30$. При $0{,}03 < x < 0{,}365$ величина y является действительной и, следовательно, существуют нарастающие решения для волны сигнала B_1. Волна суммарной частоты B_3 также увеличивается по амплитуде, но в этой области $B_3 / B_1 \sim 10^{-1}$.

Определим функцию распределения резонансных пузырьков по размерам, которая обеспечила бы усиление волны сигнала.

Пусть имеется некоторое распределение пузырьков по частотам $n(\omega_0)\,d\omega_0$ — концентрация пузырьков, собственные частоты которых изменяются в пределах от ω_0 до $\omega_0 + d\omega_0$; тогда удельный объем, занимаемый пузырьками, является функцией частоты:

$$V_0 n(\omega_0)\,d\omega_0 = f(\omega_0)\,d\omega_0. \tag{20}$$

Введем расстройку по скоростям между волнами аналогично формуле (14), считая $\omega_0 \approx 3\omega$:

$$\Delta_1 = \frac{9\rho_0 c^0 \omega\beta\Phi}{16}; \quad \Delta_2 = \frac{9\rho_0 c^0 \omega\beta\Phi}{5}; \quad \Delta_3 = \frac{3\rho_0 c^0 \omega\beta\Phi}{4}\overline{\frac{1}{1 - 3\omega/\omega_0}}^{f(\omega_0)}. \tag{21}$$

Здесь β — сжимаемость воздуха, $\Phi = \int f(\omega_0)\,d\omega_0$ — полный объем, занимаемый пузырьками, черта означает, что берется величина средняя по распределению. Из выражения (21) можно найти Δ_1' и Δ_3' согласно формуле (17). При $\Delta_3' / \Delta_1' = 30$ имеет место усиление волны сигнала. Чтобы обеспечить $\Delta_3' / \Delta_1' = 30$, распределение пузырьков по частотам (по размерам) должно быть таким, чтобы $\Delta\omega / \omega_0 \approx 0{,}1$.

Относительно затухания волн в среде с пузырьками известно, что основной вклад в затухание вносят резонансные пузыри. В нашем случае это приведет к интенсивному поглощению волны 3ω. Поглощение звука пузырьками нерезонансных размеров составляет обычно менее 5% от поглощения при резонансе [1].

Проведем численные оценки возможного усиления волны, распространяющейся в такой гипотетической среде. Допустим, что концентрация нерезонансных пузырьков обеспечивает содержание воздуха — 10^{-5} частей воздуха на одну часть воды и амплитуда волны накачки равна 0,1 *ат* (мощность 10^{-3} *вт/см²*). Тогда можно ожидать увеличения амплитуды сигнала в e раз на расстояниях, равных примерно 10 длинам волн.

Авторы приносят благодарность Р. В. Хохлову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физические основы подводной акустики, М., ИЛ, 1955, 597—635.

Кафедра волновых процессов
Московского государственного
университета

Поступило в редакцию
23 апреля 1966 г.

УДК 534.222

К ВОПРОСУ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ТРУБЕ

Л. К. Зарембо

В настоящее время вопрос о нелинейных колебаниях акустических резонаторов исследован еще мало. Насколько мне известно, за исключением нескольких работ по стоячим волнам в пространстве, ограниченном абсолютно жесткими параллельными стенками [1—3] и анализа собственных колебаний трубы, нагруженной на концах различными импедансами [4], а также экспериментальной работы по резонансному акустическому детектированию [5], других работ по нелинейным колебаниям распределенных систем нет. В большинстве из указанных работ рассматривались собственные колебания.

Вынужденные нелинейные колебания систем с сосредоточенными параметрами — довольно разработанная область; вопрос о сведении системы с распределенными параметрами при нелинейных колебаниях к системе с сосредоточенными параметрами, по-видимому, может быть разрешен, однако он требует дополнительного анализа. В этой заметке будут рассмотрены вынужденные колебания столба воздуха в открытой трубе при условии, что амплитуда смещения поршня не может считаться малой по сравнению с длиной волны.

Воспользуемся уравнениями в переменных Лагранжа для идеальной среды: $\rho(1+\xi_a)=\rho_0$, $\rho_0\xi_{tt}+p_a=0$, где $\xi(a,t)$ — смещение, ρ_0 — плотность невозмущенной среды, $\rho(a,t)$ и $p(a,t)$ — плотность и давление. Для адиабатических условий распространения звука $p=p_0\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$ и мы получим, как обычно, волновое уравнение в виде

$$\xi_{tt}-\frac{c_0^2}{(1+\xi_a)^{\gamma+1}}\xi_{aa}=0, \tag{1}$$

где $c_0^2=\gamma p_0/\rho_0$. Воспользуемся далее методом последовательных приближений, полагая $\xi=\xi'+\xi''+\ldots$, где штрихи обозначают порядок малости величин. Для величины ξ' из уравнения (1) следует обычное волновое уравнение. Если поршень расположен при $a=0$, а открытый конец трубы при $a=L$, то граничные условия будут иметь вид

$$\xi'\,|_{a=0}=\xi_0\cos\omega t;\ \ \xi_a'\,|_{a=L}=0. \tag{2}$$

Решение волнового уравнения при этом, как известно, будет

$$\xi'=\xi_0\frac{\cos k(L-a)}{\cos kL}\cos\omega t, \tag{3}$$

причем условие резонанса выражается следующим образом:

$$kL=\frac{(2n-1)}{2}\pi \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Уравнение 2-го приближения, получаемое из уравнения (1), имеет вид

$$\xi_{tt}''-c_0^2\xi_{aa}''=-c_0^2(\gamma+1)\xi_{aa}'\xi_a'. \tag{4}$$

Подставляя выражение (3) в правую часть уравнения (4) и, имея в виду граничные условия для смещения второго порядка, а именно

$$\xi''\,|_{a=0}=\xi_a''\,|_{a=L}=0, \tag{5}$$

получим решение уравнения (4) в виде

$$\xi''=\frac{(\gamma+1)}{16}\frac{k\xi_0^2}{\cos^2 kL}\Big\{\sin 2k(L-a)-\sin 2kL+2ka+$$
$$+\left[\frac{\sin 2ka}{2\cos 2kL}-ka\cos 2k(L-a)\right]\cos 2\omega t\Big\}. \tag{6}$$

Применение метода последовательных приближений возможно при условии $\xi''\ll\xi'$. Из решений (3) и (6) видно, что по мере приближения к резонансам это условие может не выполняться, так как величина второго порядка малости при приближении к резонансу нарастает быстрее, чем растет ξ'. Решение перестает быть пригодным тем дальше от резонанса, чем больше $k\xi_0$.

Помимо этих «линейных» резонансов, как видно из выражения (6), есть еще резонансы, удовлетворяющие условию

$$kL=\frac{(2n-1)}{4}\pi, \tag{7}$$

при которых так же не выполняются условия применимости метода последовательных приближений, так как в этих точках $\xi''\to\infty$, в то время как ξ' конечно. В отличие от «линейных» резонансов эти резонансы могли бы быть названы нелинейными. Физический смысл этих нелинейных резонансов довольно прост: одна из возникающих в результате нелинейности частот совпадает с одной из собственных частот резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Эйхенвальд. Акустические волны большой амплитуды. Усп. физ. наук, 1934, 14, 522.
2. Н. Н. Андреев. О стоячих звуковых волнах большой амплитуды. Сб. «Исслед. по эксперимент. и теор. физике. Памяти Г. С. Ландсберга». М., Изд-во АН СССР. 1959, стр. 53.
3. З. А. Гольберг. Плоские акустические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей сред (канд. диссертация). М., Акустический ин-т АН СССР, 1958. 1958.
4. М. А. Исакович. Нелинейные эффекты в некоторых задачах акустики. Акуст. ж., 1960, 6, 3, 321—325.
5. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, В. Н. Служ, О. Ю. Сухаревская. О некоторых явлениях при вынужденных колебаниях акустических резонаторов. Акуст. ж., 1966, 12, 4, 486—487.

Кафедра акустики
Московского государственного
университета

Поступило в редакцию
2 февраля 1966 г.

УДК 534.29+532.528

О ВЛИЯНИИ КОАГУЛЯЦИИ ЗАРОДЫШЕЙ НА КАВИТАЦИОННУЮ ПРОЧНОСТЬ ЖИДКОСТИ

В. И. Ильичев

Кавитационная прочность жидкости, как показали экспериментальные исследования, возрастает при увеличении частоты звука и уменьшении времени облучения объема жидкости звуком; она значительно меньше по величине, чем можно было бы ожидать на основании данных теоретических работ [1—3]. Ниже обсуждается влияние коагуляции газовых зародышей под воздействием сил Бьеркнесса на величину кавитационной прочности жидкости.

Введем ряд предположений, упрощающих рассмотрение. Пусть в жидкости существуют газовые зародыши радиуса r_0, распределенные однородно по пространству с объемной плотностью n. Будем полагать, что кавитационная прочность жидкости измеряется при помощи акустического сферического фокусирующего концентратора с объемом фокального пятна $V=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^3$. Наконец, предположим, что все газовые зародыши в объеме V под действием сил Бьеркнесса коагулируют за время t_1, достаточное для объединения зародышей, расположенных в противоположных точках границы фокальной области.

Очевидно, что кавитация возникает в этом случае на зародыше радиуса большего, чем r_0 и, следовательно, при меньших звуковых давлениях. Размер газового пузырька, на котором произойдет разрыв жидкости, можно определить, предполагая, что общая масса газа до и после коагуляции постоянна.

Действительно, в этом случае

$$nVr_0^3\left(p_0+\frac{2\sigma}{r_0}\right)=r^3\left(p_0+\frac{2\sigma}{r}\right). \tag{1}$$

Отсюда можно найти связь радиуса пузырька с длиной волны и другими параметрами жидкости

$$r=\frac{\lambda^{3/2}r_0}{4}\left(\frac{\pi n}{3}\right)^{1/2},\qquad \frac{2\sigma}{r}\gg p_0, \tag{2}$$

где p_0 — гидростатическое давление, σ — поверхностное натяжение, λ — длина звуковой волны.

Кавитационная прочность жидкости в случае паровой кавитации при наличии газового зародыша с радиусом r, согласно работе [4], определяется соотношением

$$p_{\text{к}}=p_0-p_v+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{\sigma}{r}\frac{1}{\sqrt{1+(p_0-p_v)\frac{r}{2\sigma}}}, \tag{3}$$

где p_v — давление насыщенного пара жидкости.

Используя соотношения (2), (3), определим зависимость кавитационной прочности жидкости от частоты звука, концентрации газовых зародышей и их начального