АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 4

УДК 534.222:532.528

К ВОПРОСУ О ВОЗНИКНОВЕНИИ И РАЗВИТИИ КАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

Ю. Я. Богуславский

Используя полученную Риманом общую связь между скоростью, плотностью и давлением в бегущей плоской волне конечной амплитуды, рассмотрена задача о развитии кавитационной волны разрежения, вызываемой неравномерно движущимся в жидкости поршнем.

В работе [1] была предложена система уравнений гидродинамики, описывающая движение жидкости с кавитационными пузырьками. При этом впервые учитывалась динамика одиночной кавитационной плоскости. С этой целью использовалось уравнение Рэлея, которое связывает изменение радиуса пузырька с давлением на бесконечности для безграничного объема жидкости. Ниже будет рассмотрена задача о развитии кавитационной области около неравномерно движущегося в жидкости поршня.

Будем считать, как и в работе [2], что поршень ограничивает слева полубесконечную трубу, заполненную сжимаемой жидкостью и в момент $t=0$ начинает двигаться влево по некоторому закону $x \equiv F(t) < 0$, по отношению к начальной координате $x=0$. От поршня вправо по жидкости будет распространяться волна разрежения. Как только в этой волне давление упадет до величины $p_{\text{кр}}$, начнется расширение кавитационных зародышей. После этого мы будем пренебрегать изменением плотности капельной жидкости по сравнению с изменением средней плотности кавитирующей жидкости, обусловленной изменением объема пузырьков. Так как нас интересует развитие кавитационной области, которая заключена между поверхностью поршня и изобарой, на которой давление равно $p_{\text{кр}}$ и которая движется вправо со скоростью звука c_0, то будем считать, что начальное давление в жидкости равно $p_{\text{кр}}$ и кавитация начинается сразу после движения поршня. На основании сделанных предположений будем искать решение системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1\partial p}{\rho_0 \partial \xi}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 + b(R^3 - R_0^3)}, \quad b = \frac{4}{3}\pi n,$$
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad p = p_{\text{кр}} - f(R, \dot{R}, \ddot{R}, a, b) \tag{1}$$

при следующих граничных условиях: при $\xi = 0$, $u = u_{\text{п}}$, $u_{\text{п}} = dF/dt$ при $\varepsilon = c_0 t$, $p_{\text{кр}} = p_{\text{кр}}$, $\rho = \rho_0$, $R = R_0$, $u = 0$.

В этих формулах ξ — лагранжева координата; ρ — плотность смеси жидкости с кавитационными пузырьками; n — число зародышей кавитации в единице объема капельной жидкости; R — радиус кавитационных пузырьков; p, u — соответственно давление и скорость в кавитирующей жидкости; ρ_0 — плотность капельной жидкости; $p_{\text{кр}}$ — давление, начиная с которого зародыши начинают расширяться; a, b — некоторые константы.

Четвертое уравнение система (1) предполагает пока некоторую произвольную функциональную зависимость между давлением в жидкости и изменением радиуса пузырька *.

Общая связь между скоростью, плотностью и давлением в бегущей плоской волне конечной амплитуды, как известно, имеет вид [4]

$$U = \int \frac{c d\rho}{\rho} = \int \frac{dp}{\rho c}. \tag{2}$$

Соотношение (2) было получено Риманом из требования, что в общем случае распространения волны произвольной амплитуды скорость и плотность должны быть связаны однозначной функциональной зависимостью. Положим $\dot{R} = \Psi(R)$. Тогда из уравнения неразрывности системы (1) следует

$$t - \frac{\xi}{c_0} = \int\limits_{R_0}^{R} \frac{dR}{\Psi(R)}, \quad \frac{\partial u}{\partial\left(t - \frac{\xi}{c_0}\right)} \left[\frac{1}{c_0\rho_0} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial u}\right] = 0, \tag{3}$$

откуда, используя граничные условия,

$$u = \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_0\rho_0}{\rho^2} d\rho = -bc_0(R^3 - R_0^3). \tag{4}$$

Из выражения (2) и (4) мы имеем

$$c = \frac{c_0\rho_0}{\rho}; \quad p = p_{\text{кр}} - \rho_0 b c_0^2 (R^3 - R_0^3). \tag{5}$$

Наконец, из выражения (5) и третьего уравнения системы (1) следует, что

$$p_{\text{кр}} - p = \frac{c_0^2\rho_0^2}{\rho} - \rho_0 c_0^2, \tag{6}$$

как и в случае, рассмотренном в работе [2]. Уравнение (6) соответствует газу Чаплыгина и, следовательно, профиль кавитационной волны в данном случае не искажается.

Из изложенного видно, что основные соотношения (4), (5), (6) для скорости, давления и уравнения состояния для кавитационной волны разрежения могут быть получены непосредственно из решения Римана без задания конкретной формы связи между давлением и изменением радиуса пузырька во времени, при условии, что можно пренебречь сжимаемостью капельной жидкости.

Подставляя формулу (5) в четвертое уравнение системы (1) и используя то обстоятельство, что $\dot{R} = \Psi(R)$, $\ddot{R} = \frac{1}{2}\frac{d\Psi^2(R)}{dR}$, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка для определения $\Psi(R)$:

$$f\left(R, \Psi(R), \frac{d\Psi^2(R)}{dR}\right) = b\rho_0 c_0^2 (R^3 - R_0^3). \tag{7}$$

Зная $\Psi(R)$, из выражений (3), (4), (5), мы получаем зависимость скорости и давления в кавитационной волне разрежения от координат и вре-

* Задача о развитии кавитационной области вблизи неравномерно движущегося поршня, когда в качестве четвертого уравнения системы (1) использовалось уравнение Рэлея для безграничного объема жидкости, другим методом была решена в работах [2, 3].

мени. Используем теперь в качестве четвертого уравнения системы (1) следующее выражение:

$$p = p_{\text{кр}} - {}^3/_2\rho_0\dot{R}^2\left(1-\frac{4}{3}\frac{R}{a}\right) - \rho_0 R\ddot{R}\left(1-\frac{R}{a}\right) - \frac{1}{2}\rho_0\frac{R^4}{a^4}\dot{R}^2, \tag{8}$$

которое было впервые получено Рэлеем [5].

В формуле (8) параметр a есть среднее расстояние между зародышем кавитации и точкой, в которой определяют значения давления и скорости, характеризующие лагранжеву частицу ξ в момент t. Опуская в этой формуле член старшего порядка малости $\frac{1}{2}\rho_0\frac{R^4}{a^4}\dot{R}^2$, получим

$$p = p_{\text{кр}} - {}^3/_2\rho_0\dot{R}^2\left(1-\frac{4}{3}\frac{R}{a}\right) - \rho_0 R\ddot{R}\left(1-\frac{R}{a}\right). \tag{9}$$

Тогда, вместо уравнения (8) можно написать

$$\frac{1}{2}R\left(1-\frac{R}{a}\right)\frac{d\Psi^2(R)}{dR} + {}^3/_2\Psi^2(R)\left(1-\frac{4}{3}\frac{R}{a}\right) = bc_0^2(R^3-R_0^3). \tag{10}$$

Поскольку в момент $t = 0$ ускорение поршня совпадает с ускорением частиц жидкости, прилегающих к поршню, решение уравнения (10) будет

$$\Psi^2(R) = \frac{1}{3}\frac{bc_0^2R^3\left[1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]^2}{1-\frac{R}{a}} + \frac{\varkappa R^{-3}}{1-\frac{R}{a}},$$

где

$$\varkappa = \frac{\dot{u}_0^2\left(1-\frac{R_0}{a}\right)}{9b^2R_0c_0^2}, \tag{11}$$

$\dot{u}_0$ — начальное ускорение поршня. Следовательно,

$$t - \frac{\xi}{c_0} = \int\limits_{R_0}^{R}\frac{\sqrt{1-R/a}\,dR}{\sqrt{\frac{1}{3}bc_0^2R^3\left[1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]^2+\varkappa R^{-3}}} \tag{12}$$

Уравнение движения поршня можно определить из выражения:

$$x = \int\limits_0^t u(t, \xi=0)\,dt = -bc_0\int\limits_0^t (R_n{}^3 - R_0{}^3)\,dt. \tag{13}$$

Функция $R_n(t)$ определяется из выражения (12) при $\xi = 0$. При $a\to\infty$ мы получим решение, имеющееся в работе [2].

В заключение автор выражает благодарность Л. Д. Розенбергу и К. А. Наугольных за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Когарко. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, 137, 6, 1331—1333.
2. Б. С. Когарко. Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации. Докл. АН СССР, 1964, 155, 4, 779—782.
3. Б. С. Когарко. Вопросы движения смеси жидкости с кавитационными пузырьками (канд. диссертация). М., 1964.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1954.
5. Rayleich. On pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Phil. Mag., 1917, 34, 94.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
26 июля 1966 г.