АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 4

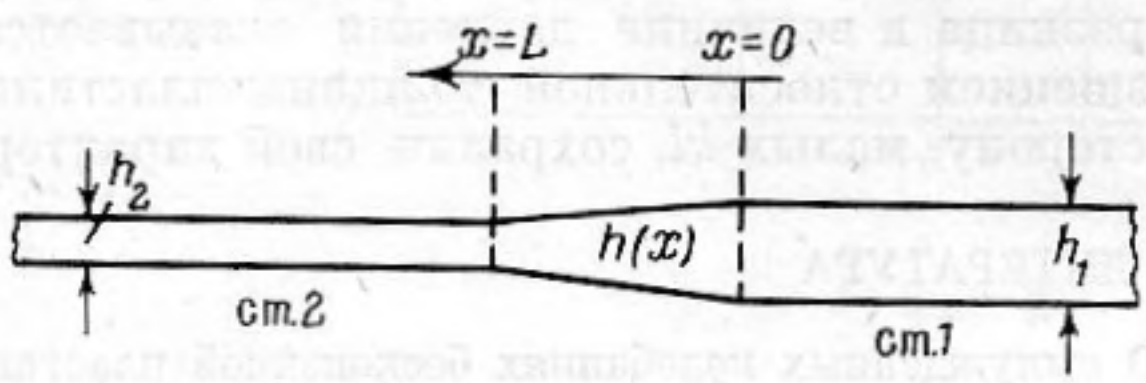
УДК 534.24

ОТРАЖЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ОТ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В. В. Тютекин, А. П. Шкварников

В статье обобщенным методом ВКБ решается задача об отражении (прохождении) изгибных волн от промежуточного стержня переменной толщины, соединяющего между собой два стержня различной толщины. Получены значения коэффициентов отражения и прохождения как для синусоидальных, так и для неоднородных изгибных волн. Приведены результаты численных расчетов для случая линейного изменения толщины промежуточного стержня. Проведено сравнение полученных результатов с точной теорией и с экспериментальными данными.

В ряде работ ([1, 2] и др.) рассматривалась задача о прохождении изгибной волны через промежуточный стержень постоянного сечения, соединяющий между собой два полубесконечных стержня, имеющих, вообще говоря, различные параметры. В настоящей работе рассматривается отражение (прохождение) изгибной волны от стержня переменной толщины, «согласующего» такие стержни между собой (фиг. 1). При этом предполагается, что все три стержня имеют прямоугольное сечение, причем толщина полубесконечных стержней постоянна, а толщина промежуточного стержня достаточно плавно изменяется от значения h_1 до значения h_2; предполагается также, что средняя плоскость стержней одна и та же, и изменение толщины промежуточного стержня симметрично относительно этой плоскости. Ширина стержней предполагается малой по сравнению с длиной изгибной волны, так что волноводными свойствами стержней можно пренебречь [3].



Фиг. 1

Пусть в области $x < 0$ по стержню *1* распространяется изгибная волна единичной амплитуды, задаваемая величиной поперечного смещения $w_1^0 = e^{i(k_1x-\omega t)}$. Если толщины стержней малы по сравнению с длиной волны, поперечные смещения стержней w должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^4w_1}{dx^4} - k_1^4w_1 = 0, \qquad -\infty < x \leqslant 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{B(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left[B(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right] - k^4(x)\,w = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{2}$$

$$\frac{d^4w_2}{dx^4} - k_2^4w_2 = 0, \qquad L \leqslant x \leqslant \infty, \tag{3}$$

где

$$k_{1,2}^4 = \frac{12\rho\omega^2}{Eh_{1,2}^2}, \quad k^4(x) = \frac{12\rho\omega^2}{Eh^2(x)}, \quad B(x) = \frac{Eh^3(x)}{12},$$

ρ, E — плотность и модуль Юнга материала стержней, L — длина промежуточного стержня.

В качестве граничных условий необходимо взять условия жесткого соединения концов соответствующих стержней друг с другом, т. е. равенство перерезывающих сил, изгибающих моментов, поперечных перемещений и наклонов при $x = 0$ и $x = L$; кроме того, при $x \to \pm\infty$ должны выполняться условия погашаемости. Поскольку условия при $x = 0$, L очевидны и известным образом [4] выражаются через параметры стержней и решения уравнений (1), (2) и (3), то приводить их здесь мы не будем.

Решения уравнений (1), (2) и (3), удовлетворяющие условиям погашаемости, можно искать в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x} + Fe^{k_1x}, \quad -\infty \leqslant x \leqslant 0, \\ w_2 &= (Qe^{ik_2x} + Ge^{-k_1x})(h_1/h_2)^{3/4}, \quad \infty > x \geqslant L, \\ w &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь R, F, Q и G — некоторые постоянные величины, подлежащие определению из граничных условий, а $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ и $P_4(x)$ — функции, удовлетворяющие следующей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка [5], эквивалентных уравнению (2):

$$P_m' = a_{mm}P_m + \sum_{g=1}^{4}{}' a_{mg}P_g \qquad m = 1, 2, 3, 4. \tag{5}$$

Знак Σ' означает суммирование по всем индексам, кроме $g = m$. Переменные коэффициенты a_{mm} и a_{mg} в нашем случае имеют значения:

$$a_{mm} = \delta_m k(x) - \frac{3}{4}\frac{h'(x)}{h(x)},$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = -\frac{1}{4}\frac{h'(x)}{h(x)},$$

$$a_{13} = a_{24} = a_{32} = a_{41} = (1-i)\frac{h'(x)}{2h(x)},$$

$$a_{14} = a_{23} = a_{31} = a_{42} = (1+i)\frac{h'(x)}{2h(x)}.$$

Здесь

$$\delta_m = \begin{cases} i & \text{при} \quad m = 1 \\ -i & \text{при} \quad m = 2 \\ 1 & \text{при} \quad m = 3 \\ -1 & \text{при} \quad m = 4. \end{cases}$$

Для получения приближенного решения системы (5) с использованием обобщенного метода ВКБ [5], будем предполагать, что изменение толщины промежуточного стержня происходит достаточно плавно, т. е. ее относительное изменение на длине изгибной волны λ мало́, что можно выразить соотношением

$$\left| \frac{h'}{hk(x)} \right| \ll 1. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) решение системы (5) и связанные с этим решением посредством граничных условий коэффициенты отражения и

прохождения R, F, Q и G можно искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра ε:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_m^{(k)}(x)\,\varepsilon^k, \qquad R = \sum_{k=0}^{\infty} R^{(k)}\varepsilon^k \quad \text{и т. д.}$$

Для определения k-го приближения в работе [5] получена следующая рекуррентная формула:

$$\varepsilon^k P_m^{(k)}(x) = e^{\int_0^x a_{mm}(z)\,dz} \left[\int_0^x \sum_{g=1}^{4} a_{mg}(t)\, P_g^{(k-1)}(t)\, e^{-\int_0^x a_{mm}(z)\,dz}\, dt + B_m^{(k)}\right], \qquad (7)$$

где $B_m^{(k)}$ — постоянные, подлежащие определению из граничных условий. Граничные условия при $x = 0$ и $x = L$ дают систему из восьми алгебраических уравнений для определения всех постоянных коэффициентов.

Решение уравнений (1), (2) и (3) в нулевом приближении имеет вид

$$w_1 = e^{ik_1x}, \; -\infty < x < 0, \qquad (8)$$

$$W = P_1^{(0)}(x) = \left(\frac{h_1}{h(x)}\right)^{\frac{3}{4}} e^{i\int_0^x h(z)\,dz}, \; 0 \leqslant x \leqslant L,$$

$$w_2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{3}{4}} e^{i\int_0^L h(z)\,dz + ik_2(x-L)}, \; \infty > x > 0. \qquad (9)$$

Используя формулы (4) и (7), а также граничные условия, можно аналогичным образом получить первое, второе и более высокие приближения. Опуская промежуточные выкладки, приведем величины первой поправки к нулевому приближению:

$$\varepsilon P_1^{(1)} = 0; \quad \varepsilon P_2^{(1)} = -\left(\frac{h_1}{h(x)}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-i\int_0^x h(z)\,dz} \int_L^x \frac{h'(t)}{4h(t)} e^{2i\int_0^t h(z)\,dz}\, dt;$$

$$\varepsilon P_{3,4}^{(1)} = \left(\frac{h_1}{h(x)}\right)^{\frac{3}{4}} e^{\pm\int_0^x k(z)\,dz} \int_L^x (1 \pm i)\, \frac{h'(t)}{2h(t)} e^{(i\pm 1)\int_0^t k(z)\,dz}\, dt;$$

$$\varepsilon R^{(1)} = -\int_0^L \frac{h'(t)}{4h(t)} e^{2i\int_0^t k(z)\,dz}\, dt; \quad \varepsilon Q^{(1)} = 0; \qquad (10)$$

$$\varepsilon F^{(1)} = \int_0^L (i-1)\, \frac{h'(t)}{2h(t)} e^{(i-1)\int_0^t k(z)\,dz}\, dt;$$

$$\varepsilon G^{(1)} = \left(\frac{h_1}{h(x)}\right)^{\frac{3}{4}} e^{k_2L - \int_0^L k(z)\,dz} \int_0^L (1+i)\, \frac{h'(t)}{2h(t)} e^{(1+i)\int_0^t k(z)\,dz}\, dt.$$

Здесь в выражении для $P_{3,4}$ знак плюс соответствует P_3, а знак минус — P_4.

Из выражений (10) следует, что первое приближение для прямой синусоидальной волны P_1 и коэффициента прохождения Q равны нулю. Вместе с тем, в этом приближении в промежуточном стержне появляется обратная синусоидальная волна P_2 и две волны гиперболического типа (P_3 и P_4), в стержне *1* коэффициент отражения R синусоидальной волны уже не равен нулю. Существенно, что в этом приближении коэффициент отражения R зависит только от характера изменения величины $k(x)$ в промежуточном

стержне и не зависит от изменения цилиндрической жесткости; это эквивалентно тому, что волны гиперболического типа P_3 и P_4 в первом приближении существуют независимо и не переходят ни в волны синусоидального типа P_1 и P_2, ни друг в друга. Этот случай, с точки зрения величины коэффициента отражения R, полностью совпадает со случаем отражения звуковых волн от неоднородного слоя [6].

Поправки второго приближения для коэффициентов отражения и прохождения могут быть написаны в таком виде:

$$\varepsilon^2 R^{(2)} = -\int_0^L (a_{23}P_3^{(1)} + a_{24}P_4^{(1)})\, e^{-\int_0^t a_{22}dz}\, dt,$$

$$\varepsilon^2 F^{(2)} = -\int_0^L (a_{32}P_3^{(1)} + a_{34}P_4^{(1)})\, e^{-\int_0^t a_{33}dz}\, dt, \tag{11}$$

$$\varepsilon^2 Q^{(2)} = e^{-ik_1L + \int_0^L a_{11}dz} \int_0^L (a_{12}P_2^{(1)} + a_{13}P_3^{(1)} + a_{14}P_4^{(1)})\, e^{-\int_0^t a_{11}dz}\, dt,$$

$$\varepsilon^2 G^{(2)} = e^{k_1L + \int_0^L a_{44}dz} \int_0^L [a_{42}P_2^{(1)} + a_{43}P_3^{(1)}] e^{-\int_0^t a_{44}dz}\, dt.$$

Интересно отметить, что второе приближение для коэффициента отражения R полностью определяется количеством энергии, перешедшей из волн гиперболического типа $P_3^{(1)}$ и $P_4^{(1)}$ в синусоидальную волну.

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим задачу об отражении изгибной волны от промежуточного стержня линейного профиля. Пусть толщина стержня $h(x)$ на отрезке $0 \leqslant x < L$ изменяется по линейному закону:

$$h(x) = h_1 - \frac{\Delta h}{L} x, \tag{12}$$

где $\Delta h = h_1 - h_2$. Условие (6) применимости приближенного метода расчета может быть записано в виде двух неравенств:

$$k_1L \gg \Delta h/h_1 \quad \text{и} \quad k_2L \gg \Delta h/h_2.$$

Полагая для определенности $h_1 > h_2$ и учитывая соотношение $k_2 = k_1\sqrt{h_1/h_2}$, можно легко показать, что второе из этих неравенств является более «сильным» и поэтому является единственным условием применимости рассматриваемого метода. Это условие мы напишем в другом виде, а именно:

$$k_1L \gg \frac{\Delta h}{\sqrt{h_1h_2}}. \tag{13}$$

Вычисляя по формулам (10) и (11) значения коэффициентов отражения F* в первом приближении и R — в первом и втором приближениях, получим

$$\varepsilon R^{(1)} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{e^{i(r_1-r_0)}}{r_1}\right), \qquad \varepsilon F^{(1)} = 2i\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right], \tag{14}$$

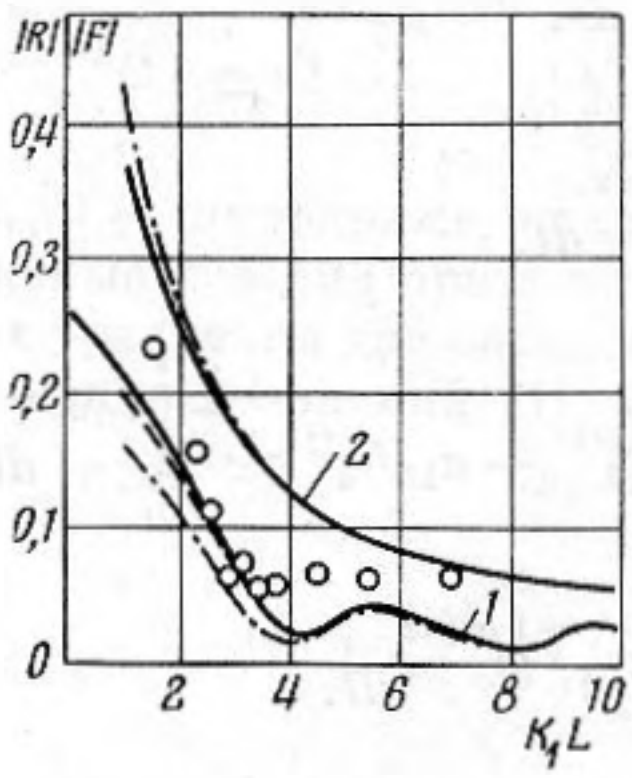
$$\varepsilon^2 R^{(2)} = 4\left(-\frac{(1+i)}{r_0^2} + \frac{(1-i)}{r_1^2} e^{i(r_1-r_0)} + \frac{2i}{r_1r_0} e^{-\frac{1-i}{2}(r_1-r_0)}\right).$$

* Величина $|F|$ представляет собой, по существу, амплитуду неоднородной волны в точке $x = 0$.

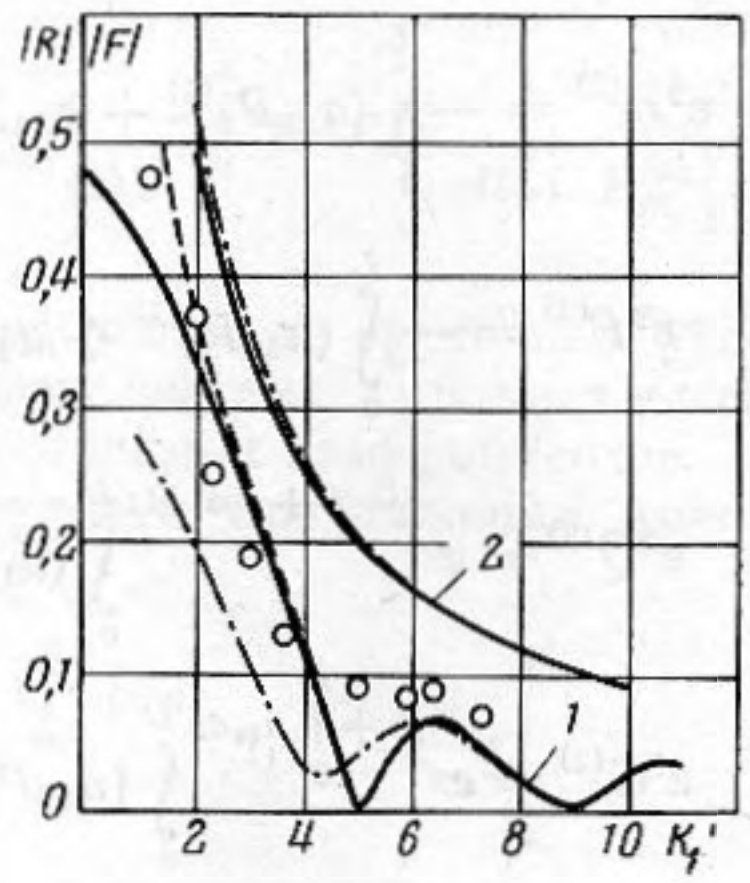
Здесь

$$r_1 = 4k_1L\frac{\sqrt{h_1h_2}}{\Delta h} \gg 1 \text{ и } r_0 = 4k_1L\frac{h_1}{\Delta h} \gg 1.$$

При выводе формул (14) была произведена замена интегральных тригонометрических функций их асимптотическими величинами при больших значениях аргументов (r_1 и r_0).



Фиг. 2



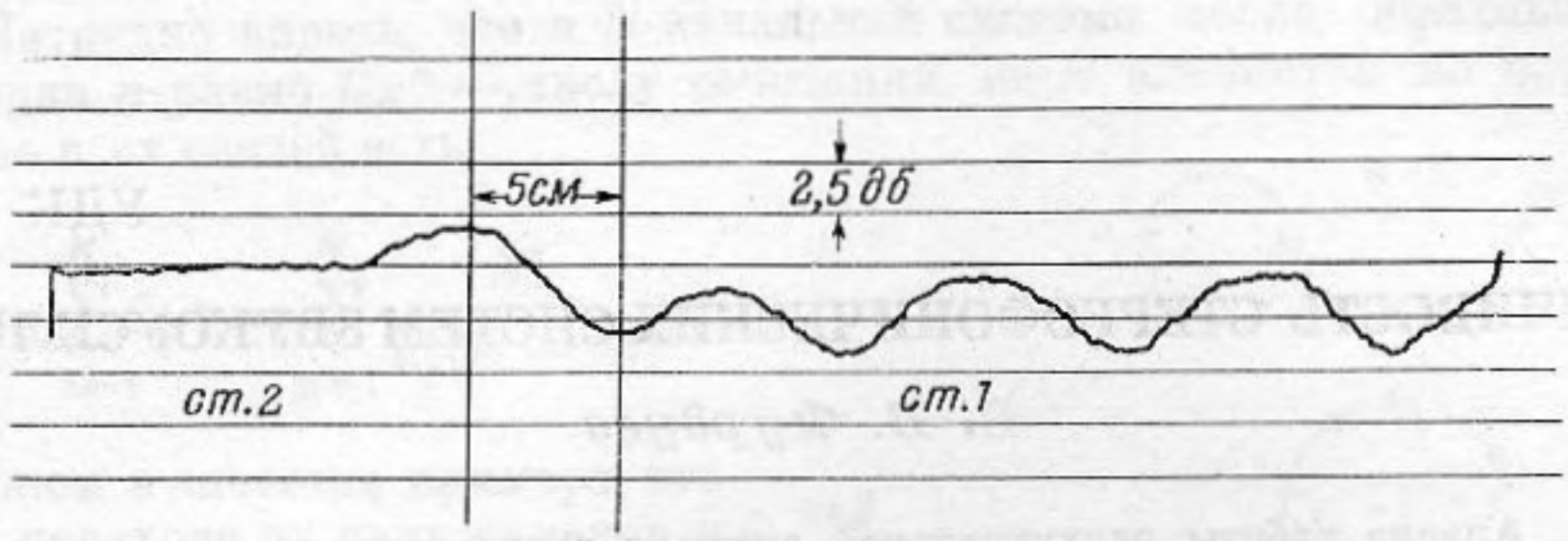
Фиг. 3

На фиг. 2 и 3 представлены результаты расчетов, произведенных по формулам (14) для значений $\frac{h_1}{h_2} = 2$, $\frac{\Delta h}{\sqrt{h_1h_2}} = 0{,}71$ и $\frac{h_1}{h_2} = 3$, $\frac{\Delta h}{\sqrt{h_1h_2}} = 1{,}15$, соответственно. На этих фигурах приведены значения $|R|$ (кривая *1*) и $|F|$ (кривая *2*) в первом (штрих-пунктир) и втором (пунктир) приближениях в зависимости от безразмерного параметра k_1L. Здесь же нанесены (сплошными линиями) значения, рассчитанные по точной теории (уравнение (2) для величины $h(x)$, задаваемой формулой (12), имеет простое решение, выражаемое линейной комбинацией цилиндрических функций [7]). Из графиков видно, что величины $|R|$ и $|F|$ с увеличением волновой длины переходного стержня убывают; при этом спадание величины R имеет осциллирующий характер, обусловленный интерференционными явлениями внутри стержня, а величина F спадает монотонно. Из фигур видно, что значения $|R|$, рассчитанные с учетом второго приближения, а значения $|F|$, рассчитанные в первом приближении, начиная с величин параметра $k_1L \approx 2$—4, практически совпадают с точным решением.

Экспериментальная проверка полученных результатов производилась на установке, подобной описанной в работе [8]. Составные прямоугольные стержни шириной 3 *см*, состоящие из двух однородных стержней и одного неоднородного (переходного) стержня, изготавливались из цельной заготовки на фрезерном станке. При измерениях распространения изгибных колебаний по таким составным стержням, последние подвешивались в горизонтальном положении на тонких нитях; стационарные изгибные колебания возбуждались электромагнитным вибратором на свободном конце стержня большей толщины. В качестве бесконтактного виброприемника использовался микрофон, автоматически перемещавшийся вдоль составного стержня и воспринимавший колебания воздуха вблизи его колеблющейся поверхности; диаметр приемной мембраны микрофона составлял 1 *см*. Свободный конец стержня меньшей толщины для устранения отражений от него помещался в песок. Измерения производились в диапазоне частот от 400 до 1500 *гц* на стержнях толщиной $h_1 = 3$, $h_2 = 1$ и $h_1 = 3$, $h_2 =$

= 1,5 *мм*, длина переходного стержня для разных стержней имела значения 4, 5, 6, 8 и 12 *см*.

Пример изменения амплитуды изгибной волны вдоль составного стержня приведен на фиг. 4, представляющей собой запись амплитуды на ленте самописца (в логарифмическом масштабе ординат). Из фиг. 4 видно, что в стержне *1* устанавливается изгибная стоячая волна, по параметрам которой легко может быть определен коэффициент отражения $|R|$; в стерж-



Фиг. 4

не *2* вблизи левой границы промежуточного стержня видна неоднородная изгибная волна, а далее — бегущая волна с постоянной вдоль стержня амплитудой. Неоднородная волна видна и в стержне *1* вблизи правой границы промежуточного стержня; здесь эта волна несколько искажает стоячую волну. В неоднородном стержне амплитуда колебаний возрастает в направлении уменьшения его толщины.

Экспериментальные значения $|R|$ показаны на фиг. 2 и 3 кружочками. Как видно, экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретическую кривую, за исключением области малых значений $|R|$, где более высокие экспериментальные значения объясняются влиянием отражения колебаний от свободного конца стержня *2* (фиг. 1), которые поглощаются песком не полностью.

Проведенная работа показала, что применение промежуточных стержней с плавным изменением толщины может существенно снизить коэффициент отражения изгибной волны на стыке двух стержней разной толщины и, соответственно, повысить коэффициент прохождения в широком диапазоне частот. Приближенный расчет коэффициента отражения (прохождения) обобщенным методом ВКБ для достаточно плавного изменения толщины промежуточного стержня дает результаты, близкие к вычисленным по точной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Маслов, Б. Д. Тартаковский. Переход изгибных волн через произвольный промежуточный стержень. Акуст. ж., 1961, 7, 1, 67—72.
2. В. П. Маслов, Б. Д. Тартаковский. О распространении изгибных колебаний в некоторых неоднородных стержнях. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 194—198.
3. Ю. К. Коненков, Н. И. Наумкина, Б. Д. Тартаковский. Исследование вынужденных изгибных колебаний упругой полосы. Акуст. ж., 1965, 11, 3, 341—350.
4. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки, М., ГТТИ, 1948.
5. В. В. Тютекин, А. П. Шкварников. Распространение изгибных волн по неоднородной пластине с плавно изменяющимися параметрами. Акуст. ж., 1964, 10, 4, 470—475.
6. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
7. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
8. В. И. Кашина, В. В. Тютекин. Установка для измерения модуля Юнга и коэффициента потерь резиноподобных и твердых материалов. Сб. «Приборы и машины для испытания металлов и пластмасс», М., Машгиз, 1965.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
6 мая 1966 г.