

УДК 534.26

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ МАКДОНАЛЬДА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА ПРИ РАСЧЕТЕ ПОЛЯ СЛАБОВЫПУКЛОГО СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Т. С. Белле

В работе рассматривается метод, позволяющий без каких-либо первоначальных пренебрежений выносить переменные интегрирования из-под знака радикала в интегралах типа $\int\int_s \exp(ikr) / r \cdot ds$, где

$$r = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0[\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha \cos (\varphi - \varphi_0)]}.$$

Основная идея этого метода заключается в использовании такого представления $\exp(ikr) / r$, которое зависит в явном виде только от r^2 . При помощи этого метода находятся выражения для поля на конечных расстояниях от сферического излучателя.

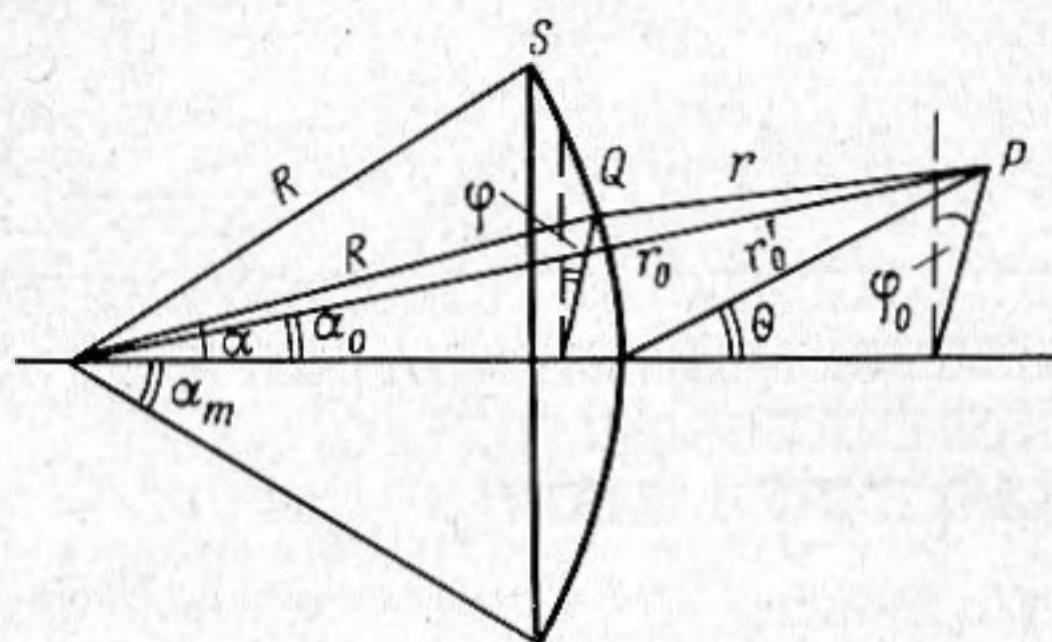
В работе [1] в приближении Кирхгофа было получено выражение для потенциала поля (с точностью до фазового множителя $\exp(-i\omega t)$), создаваемого слабовыпуклым сферическим излучателем с большим по сравнению с длиной волны радиусом кривизны:

$$\varphi(r_0\alpha_0) = \frac{U_0 R^2}{2\pi r_0} \int_0^{\alpha_m} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr_0 \sqrt{1+(R/r_0)^2-2R/r_0[\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha \cos (\varphi-\varphi_0)]}} \times}{\sqrt{1+(R/r_0)^2-2R/r_0[\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha \cos (\varphi-\varphi_0)]} \times \sin \alpha d\alpha d\varphi} \times \frac{1}{\sqrt{1+(R/r_0)^2-2R/r_0[\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha \cos (\varphi-\varphi_0)]}} \quad (1)$$

где (см. фиг. 1) R — радиус кривизны излучателя, α_m — угол раскрытия излучателя; r_0, α_0, φ_0 — координаты точки наблюдения (для осесимметричного излучателя $\varphi_0 = 0$); α, φ, R — координаты произвольной точки интегрирования на поверхности излучателя; $k = 2\pi/\lambda, \lambda$ — длина волны; U_0 — амплитуда нормальной скорости точек поверхности излучателя (все точки поверхности колеблются синфазно с нормальной скоростью $U_n|_s = U_0 \exp(-i\omega t)$).

Получение различных представлений выражения (1), необходимых для проведения качественных и количественных оценок поля, обычно осложняется тем, что, во-первых, переменные интегрирования в формуле (1) находятся под знаком радикала, что делает невозможным получение простых аналитических выражений без каких-либо первоначальных пренебрежений в выражении (1); во-вторых, подынтегральная функция очень быстро осциллирует, что затрудняет проведение численного счета этого выражения на ЭВМ. В работе [1] проводилось вычисление интеграла (1) для частных случаев, когда при некоторых пренебрежениях удавалось извлечь переменные интегрирования из-под знака радикала и получить для поля сравнительно простые аналитические выражения (поле на оси излучателя, поле при малых α_m на конечных расстояниях от излучателя и поле при произвольных α_m на больших расстояниях от поверхности излучателя).

Для исследования поля на конечных расстояниях от поверхности излучателя при произвольных углах раскрытия α_m была предпринята попытка проведения численного счета интеграла в выражении (1) по методу Симпсона на ЭВМ «Минск-2». Однако этот метод оказался не эффективным. Так, при $kR = 50$; $\alpha_0 = 2^\circ$ и $R/r_0 = 0,5$ на вычисление одной точки требуется около 38 мин, а с ростом α_0 время счета увеличивается в геометрической прогрессии.



Фиг. 1

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий получить выражение для поля на конечных расстояниях от излучателя при произвольных углах раскрытия α_m . Основная идея этого метода заключается в использовании такого представления сферической функции $\exp(ikr)/r$, где $r =$

$= \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0[\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha \cos \varphi]}$, которое зависит в явном виде только от r^2 .

Для получения такого представления сферической функции воспользуемся интегральным представлением функции Макдональда в виде [2]

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-\tau - \frac{z^2}{4\tau}} \tau^{-\nu-1} d\tau. \quad (2)$$

Если в формуле (2) положить $\nu = 1/2$ и учесть, что

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z} e^{-iz}, \quad (3)$$

то функцию e^{-mr}/r при $\text{Re } m^2 > 0$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{e^{-mr}}{r} = \frac{m}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau^{-3/2} e^{-\tau - \frac{m^2 r^2}{4\tau}} d\tau. \quad (4)$$

Обозначим в формуле (1) $kr_0 = im$; ввиду аналитичности функции $\varphi(r_0, \alpha_0)$ по k можно временно считать $m > 0$. Воспользовавшись формулой (4) и учитывая, что [3]

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{m^2 R}{2\tau r_0} \sin \alpha \sin \alpha_0 \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0\left(i \frac{m^2 R}{2\tau r_0} \sin \alpha \sin \alpha_0\right), \quad (5)$$

получим для $\varphi(r_0, \alpha_0)$ выражение:

$$\varphi(r_0, \alpha_0) = \frac{U_0 R^2 m}{2\sqrt{\pi} r_0} \int_0^\infty \tau^{-3/2} e^{-\tau - \frac{m^2}{4\tau} \left(1 + \frac{R^2}{r_0^2}\right)} d\tau \int_0^{\alpha_m} J_0(d \sin \alpha_0 \sin \alpha) e^{-d \cos \alpha_0 \cos \alpha} \sin \alpha d\alpha, \quad (6)$$

где $d = im^2 R / 2\tau r_0$. Полученное выражение (6) справедливо для любых углов раскрытия и произвольных расстояний от поверхности излучателя. Вычисление интегралов в формуле (6) уже не представляет трудностей: интеграл по α полностью исследован в работе [1], а интеграл по τ приводит к известным и табулированным функциям.

Так же, как и в работе [1], найдем два разложения $\varphi(r_0, \alpha_0)$ по прямым и обратным степеням $d \sin \alpha_0$. Первое разложение позволяет при $kR \gg 1$ провести исследование поля в окрестности оси излучателя, вто-

рое — для точек вне окрестности оси на конечных расстояниях от излучателя.

Для получения разложения интеграла в $\varphi(r_0, \alpha_0)$ по прямым степеням $d \sin \alpha_0$ воспользуемся разложением функции Бесселя $J_0(d \sin \alpha_0 \sin \alpha)$ в степенной ряд [2]. Проведя в формуле (6) почленное интегрирование и используя следующее соотношение [2]

$$K_\nu(iz) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi \nu i}{2}} H_\nu^{(1)}(z),$$

получаем выражение для $\varphi(r_0, \alpha_0)$ в окрестности оси в виде

$$\varphi(r_0, \alpha_0) = \Phi_1(r_0, \alpha_0) + \Phi_2(r_0, \alpha_0), \quad (7)$$

где

$$\Phi_1(r_0, \alpha_0) = \frac{U_0 S}{2\pi} e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\pi l_1}}{r_0 h \cos \alpha_0 \sqrt{2k}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \\ \times \left(\frac{k r_0 R \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{l_1} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{2^k k! (n-k)!} \frac{H_{n-k-1/2}^{(1)}(k l_1)}{\left(\frac{k R r_0}{l_1} \cos \alpha_0 \right)^k}, \quad (8)$$

$$\Phi_2(r_0, \alpha_0) = \frac{U_0 S}{2\pi} e^{-i\pi/2} \frac{\sqrt{\pi l_2}}{r_0 h \cos \alpha_0 \sqrt{2k}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{k r_0 R \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{l_2} \right)^n \times \\ \times \sum_{k=0}^{2n} P_n^{k-n}(\cos \alpha_m) \frac{H_{2n-k-1/2}^{(1)}(k l_2)}{\left(\frac{k R r_0}{l_2} \cos \alpha_0 \sin \alpha_m \right)^k}, \quad (9)$$

причем $l_1 = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \alpha_0}$ есть расстояние от точки наблюдения до центра поверхности излучателя, $l_2 = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \alpha_0 \cos \alpha_m}$ — расстояние от точки наблюдения до точки C на краю излучателя (см. фиг. 2). При условии $\sin \alpha_0 \ll \ll \sqrt{l_1 / k R r_0}$ (а следовательно и $\sin \alpha_0 \ll \sqrt{l_2 / k R r_0}$) можно ограничиться первыми членами разложений функции $\Phi_1(r_0, \alpha_0)$ и $\Phi_2(r_0, \alpha_0)$.

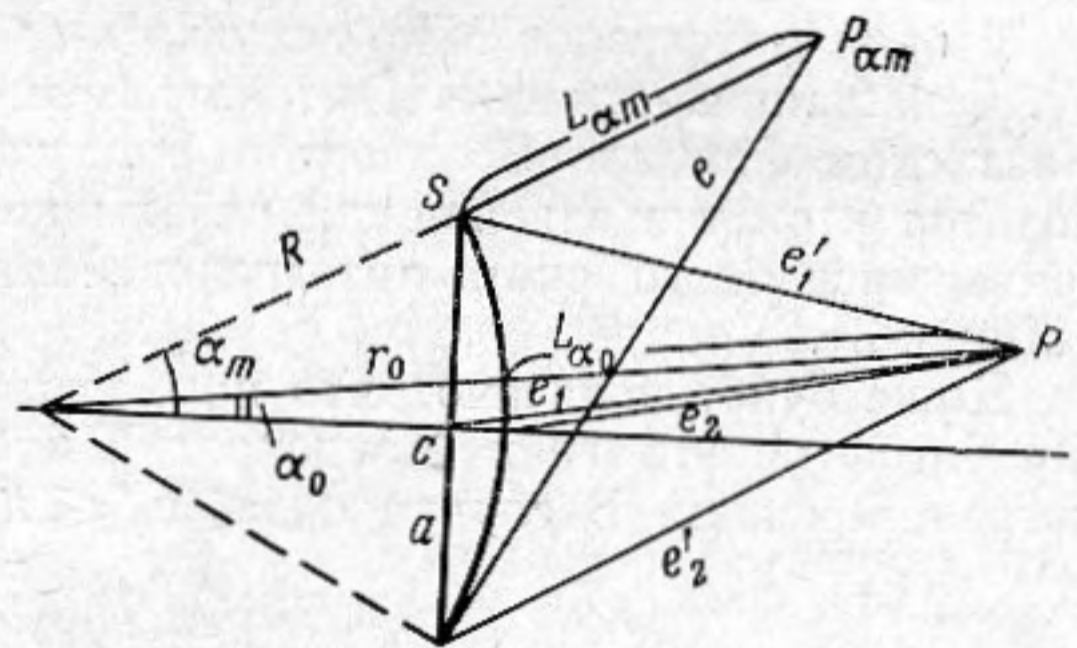
Так как kR предполагается достаточно большим, в окрестности оси излучателя поле представимо в следующем виде:

$$\varphi(r_0, \alpha_0) \sim \\ \sim \frac{U_0 S}{2\pi} \frac{e^{i k M}}{r_0} \frac{\sin k \delta / 2}{k h / 2 \times \cos \alpha_0}, \quad (10)$$

где $\delta = l_2 - l_1$; $S = \pi R h$ — площадь поверхности излучателя, $M = (l_2 + l_1) / 2$; h — высота сферического излучателя. При $\alpha_0 = 0$ выражение (10) переходит в точную формулу для поля на оси системы (см. выражение (2) работы [1]), а при $R / r_0 \ll 1$, если в (10) пренебречь членами, квадратичными по R / r_0 , в формулу, полученную для поля в окрестности оси на больших расстояниях от излучателя (см. выражение (15) работы [1]).

Из выражения (10) видно, что при

$$n\pi \leq \frac{k\delta}{2} < (2n+1)\pi/2 \quad (11)$$



Фиг. 2

при удалении от оси $|\varphi(r_0, \alpha_0)|$ возрастает, а при

$$(2n + 1)\pi/2 \leq \frac{k\delta}{2} < (n + 1)\pi \quad (12)$$

при удалении от оси $|\varphi(r_0, \alpha_0)|$ падает с ростом α_0 (n в (11) и (12) — любое целое число).

Для получения разложения $\varphi(r_0, \alpha_0)$ в ряд по степеням $1/k, d \sin \alpha_0$ воспользуемся результатами работы [1], положив $kR = d$. Тогда, при условии $kR \sin^2 \alpha_0 \gg 1$ и $k(r_0 - R) \gg 1$ для случая $0 < \alpha_0 \leq \alpha_m$ получим

$$\begin{aligned} \varphi(r_0, \alpha_0) \sim & \frac{iU_0R}{kr_0} e^{ih(r_0-R)} + \frac{U_0Rl_1 H_1^{(1)}(kl_1)}{2kr_0 \sin(\alpha_m + \alpha_0)} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{Rr_0 \sin \alpha_0}} + \frac{U_0R}{2kr_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{\sin \alpha_0 \cos(\alpha_m - \alpha_0)}} \cdot e^{-i\pi/2} k\eta M_0(X, Y), \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$l_1 = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos(\alpha_m + \alpha_0)};$$

$$\eta = \sqrt{[r_0 - R / \cos(\alpha_m - \alpha_0)][r_0 - R \cos(\alpha_m - \alpha_0)]};$$

$$X = \frac{\sqrt{Rr_0} \sin(\alpha_m - \alpha_0)}{\eta \sqrt{\cos(\alpha_m - \alpha_0)}}; \quad Y = k\eta;$$

$$\operatorname{arcsch}\left(\frac{\sin(\alpha_m - \alpha_0)}{\eta} \sqrt{\frac{Rr_0}{\cos(\alpha_m - \alpha_0)}}\right)$$

$$M_0(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k\eta \operatorname{ch} \psi) \operatorname{ch} \psi d\psi$$

— интеграл Макдональда нулевого порядка, учитывающий поведение поля при переходе из зоны света в зону тени в случае, когда точка наблюдения лежит на конечных расстояниях от источника.

Теория интегралов Макдональда n -го порядка развита в работах [4—6]. В настоящее время в Центральном н.-и. горноразведочном институте и Казахском филиале Всесоюзного института разведочной геофизики находятся в стадии завершения работы по разработке и составлению программ численного счета интегралов Макдональда n -го порядка на ЭВМ «Минск-2».

Ниже будет показано, что при удалении точки наблюдения в зону Фраунгофера интеграл Макдональда нулевого порядка переходит в интеграл Френеля. В случае $\alpha_m \leq \alpha_0 \leq \pi - \alpha_m$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi(r_0, \alpha_0) \sim & \frac{U_0Rl_1 H_1^{(1)}(kl_1)}{2kr_0 \sin(\alpha_m + \alpha_0)} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{Rr_0 \sin \alpha_0}} - \\ & - \frac{U_0R}{2kr_0} e^{-i\pi/2} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{\sin \alpha_0 \cos(\alpha_m - \alpha_0)}} k\eta M_0(X, Y). \quad (14) \end{aligned}$$

Легко показать, что выражения (13) и (14) при соответствующих пренебрежениях переходят в выражения (18) и (19) работы [1]. Действительно, при $R/r_0 \ll 1$ и $kl_1 \gg 1$ в (13) и (14) можно ограничиться первым членом асимптотического разложения функции Ханкеля $H_1^{(1)}(kl_1)$, положив $kl_1 \sim k[r_0 - R \cos(\alpha_m + \alpha_0)]$ и можно воспользоваться асимптотическим представлением интеграла Макдональда нулевого порядка [6]:

$$M_0(X, Y) \sim \sqrt{\frac{2}{Y}} \cdot H_{-1/2}^{(1)}(Y) e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\operatorname{sign}(X) \sqrt{Y \sqrt{1+X^2}-1}} e^{iu^2} du, \quad (15)$$

положив $k\eta \sim k \left(r_0 - \frac{R}{2} \frac{1 + \cos^2(\alpha_m - \alpha_0)}{\cos(\alpha_m - \alpha_0)} \right)$ Таким образом, как вид-

но из формулы (15), интеграл Макдональда нулевого порядка переходит в интеграл Френеля (с точностью до коэффициента) и выражения (13) и (14) переходят в формулы (18) и (19) работы [1].

Выражения (13) и (14) для углов наблюдения $\alpha_0 = \alpha_m$ или $\alpha_0 < \alpha_m$ и $\alpha_0 > \alpha_m$ можно упростить. Для этого надо воспользоваться соответствующими асимптотическими представлениями интеграла Макдональда, а именно при $\alpha_0 = \alpha_m$ [6]

$$M_0(0, Y) = \frac{e^{iY}}{Y}, \quad (16)$$

а вне границы света и тени, например для $\alpha_0 < \alpha_m$ [6],

$$M_0(X, Y) \sim X \left(1 + \frac{1}{X^2} \right) \frac{H_1^1(Y \sqrt{1+X^2})}{Y \sqrt{1+X^2}}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (16) и (17) в формулы (13) и (14), получаем при $0 < \alpha_0 < \alpha_m$

$$\begin{aligned} \varphi(r_0, \alpha_0) \sim & i \frac{U_0 R}{kr_0} e^{ik(r_0-R)} + \frac{U_0 R}{2kr_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{Rr_0 \sin \alpha_0}} \times \\ & \times \left(\frac{l_2 H_1^1(kl_2)}{\sin(\alpha_m + \alpha_0)} + i \frac{l_1 H_1^1(kl_1)}{\sin(\alpha_m - \alpha_0)} \right); \end{aligned} \quad (18)$$

при $\alpha_m < \alpha_0 < \pi - \alpha_m$

$$\begin{aligned} \varphi(r_0, \alpha_0) \sim & i \frac{U_0 R}{2kr_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{Rr_0 \sin \alpha_0}} \left(\frac{l_2 H_1^1(kl_2)}{\sin(\alpha_m + \alpha_0)} - \right. \\ & \left. - i \frac{l_1 H_1^1(kl_1)}{\sin(\alpha_m - \alpha_0)} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

при $\alpha_0 = \alpha_m$

$$\varphi(r_0, \alpha_0) \sim i \frac{U_0 R}{2kr_0} e^{ik(r_0-R)} + \frac{U_0 R l H_1^1(kl)}{2kr_0 \sin 2\alpha_m \sqrt{Rr_0}}, \quad (20)$$

где

$$l_1 = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos(\alpha_m - \alpha_0)}, \quad l_2 = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos(\alpha_m + \alpha_0)},$$

$$l = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos 2\alpha_m}.$$

Из полученных выражений видно, что на конечных расстояниях от излучателя (так же, как и в зоне Фраунгофера — см. работу [1]) потенциал поля в зоне света складывается из трех членов (см. формулу [18]): первый член соответствует расходящейся сферической волне и дает геометрическое приближение; два других члена соответствуют двум краевым дифракционным волнам, выходящим из наиболее и наименее удаленных от точки наблюдения краевых точек на поверхности излучателя. На границе света и тени, т. е. при $\alpha = \alpha_m$, член соответствующий дифракционной волне, выходящий из наименее удаленной от точки наблюдения краевой точки на поверхности излучателя, достигает величины, равной с обратным знаком половине члена, дающего геометрическое приближение. В зоне тени член, соответствующий геометрическому приближению, пропадает и остаются только две дифракционные волны, которые при больших kR быстро затухают.

Выражения (18), (19) и (20) еще более упрощаются, если положить $kl_1 \gg 1$ (а следовательно и $kl_2 \gg 1$) и заменить функции Ханкеля первы-

ми членами их асимптотических разложений. Тогда мы получим при $0 < \alpha_0 < \alpha_m$:

$$\varphi(r_0, \alpha_0) \sim i \frac{U_0 R}{kr_0} e^{ik(r_0-R)} + \frac{U_0 R}{kr_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{2\pi k R \sin \alpha_0}} e^{-i\pi/4} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{ihl_1} \sqrt{l_1}}{\sin(\alpha_m - \alpha_0)} - i \frac{e^{ihl_2} \sqrt{l_2}}{\sin(\alpha_m + \alpha_0)} \right); \quad (21)$$

при $\alpha_0 = \alpha_m$

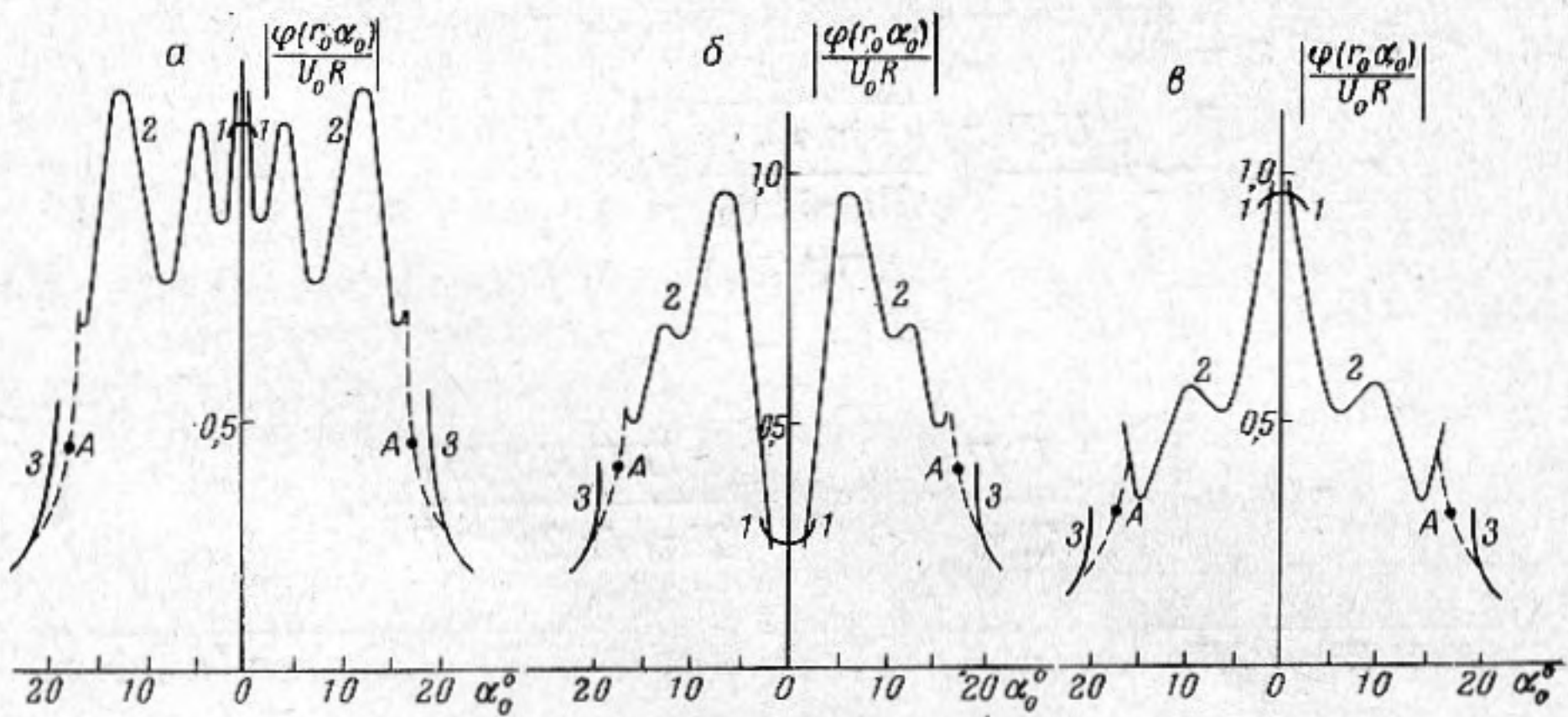
$$\varphi(r_0, \alpha_0) \sim i \frac{U_0 R}{2kr_0} e^{ik(r_0-R)} - \frac{U_0 R}{kr_0} \sqrt{\frac{l}{2\pi k R r_0}} \frac{e^{ihl+i\pi/4}}{\sin 2\alpha_m}; \quad (22)$$

при $\alpha_m < \alpha_0 < \pi - \alpha_m$

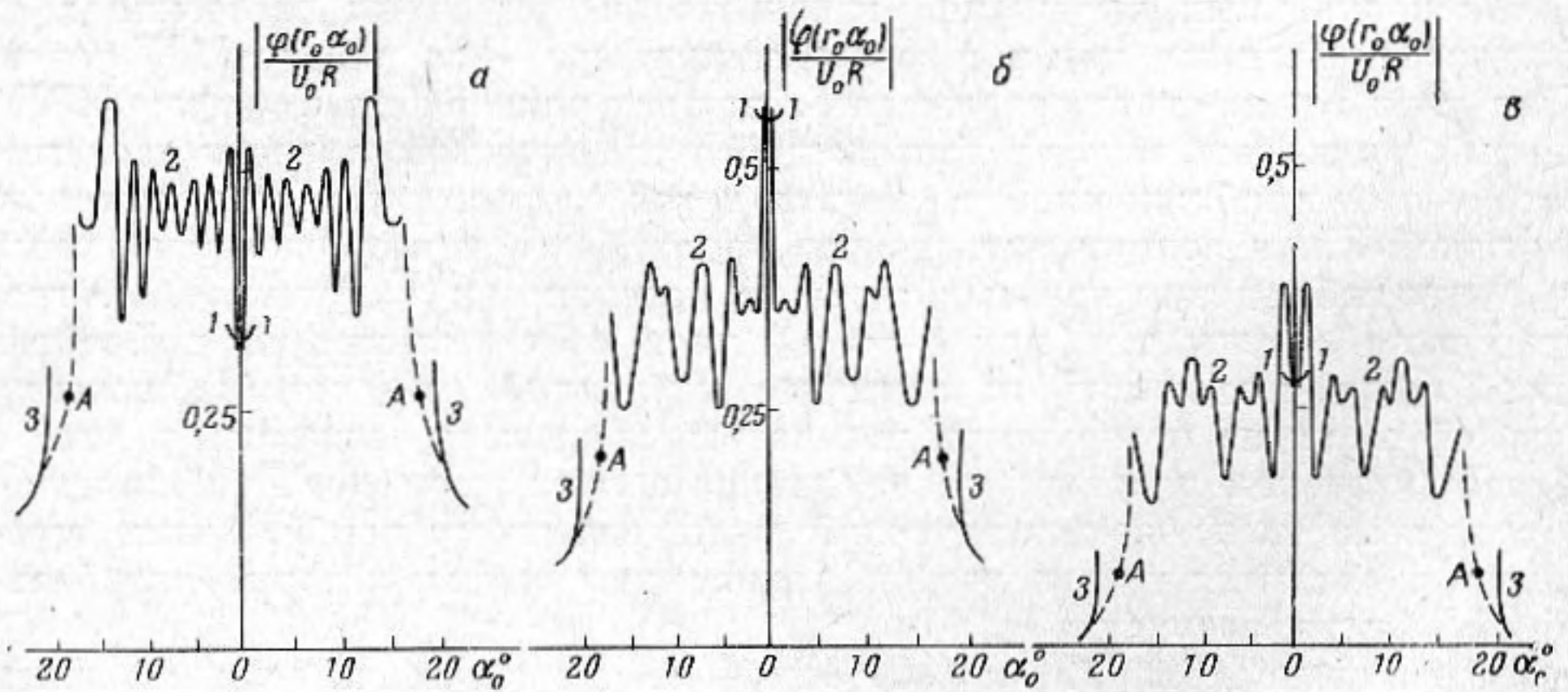
$$\varphi(r_0, \alpha_0) \sim -\frac{U_0 R}{kr_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_m}{2\pi k R r_0 \sin \alpha_0}} e^{-i\pi/4} \left(\frac{e^{ihl_1} \sqrt{l_1}}{\sin(\alpha_m - \alpha_0)} + i \right.$$

$$\left. + i \frac{e^{ihl_2} \sqrt{l_2}}{\sin(\alpha_m + \alpha_0)} \right). \quad (23)$$

На фиг. 3, а, б, в приведена зависимость $|\varphi(r_0, \alpha_0) / U_0 R|$ от угла наблюдения α_0 для $kR = 50$; $\alpha_m = 17^\circ$ при $r_0/R = 1,2$; 1,5 и 2,1 соответственно. На фиг. 4 приведена зависимость $|\varphi(r_0, \alpha_0) / U_0 R|$ от α_0 для $kR =$



Фиг. 3



Фиг. 4

$= 200$ и $\alpha_m = 17^\circ$ на тех же расстояниях от излучателя ($r_0/R = 1,2; 1,5; 2,1$ — кривые *a, б, в* соответственно). На фиг. 3, б треугольничками отмечены точки, полученные при непосредственном счете интеграла в (1) по методу Симпсона на ЭВМ «Минск-2». Кривые 1, 2 и 3 построены по формулам для $|\varphi(r_0, \alpha_0)|$, полученным из выражений (10), (21) и (23), а точка А — по формуле для $|\varphi(r_0, \alpha_0)|$, полученной из выражения (22). Пунктирными линиями отмечены места, для которых нельзя провести счет по простым аналитическим выражениям и необходимо учитывать вклад, вносимый интегралом Макдональда.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

а) поле на конечных расстояниях от поверхности сферического излучателя в зоне света при $kR \gg 1$ вносит сложный осциллирующий характер в зависимости от α_0 ;

б) при фиксированном α_0 характер поведения функции $|\varphi(r_0, \alpha_0 = \text{const})|$ вдоль r_0 аналогичен характеру поведения $|\varphi(r_0, 0)|$ на оси излучателя. Однако в то время, как на оси излучателя $|\varphi(r_0, 0)|$ осциллирует вокруг нуля, вдоль других лучей $\alpha_0 = \text{const}$, $|\varphi(r_0, \alpha_0)|$ осциллирует вокруг некоторой конечной величины, не равной нулю и достигающей при $\alpha_0 = \alpha_m$ значения 0,5;

в) при фиксированном α_0 вдоль r_0 укладывается конечное число осцилляций $|\varphi(r_0, \alpha_0)|$, причем расстояние от поверхности излучателя до последнего макс или min определяется выражением:

$$L_{\alpha_0} = \frac{R^2 \sin^2(\alpha_m - \alpha_0)}{\lambda} - R[1 - \cos(\alpha_m + \alpha_0)] - \lambda/4. \quad (24)$$

При $\alpha_0 = 0$ выражение (24) переходит в формулу (4) работы [1].

При $\alpha_0 = \alpha_m$ мы получаем выражение, определяющее расстояние от поверхности излучателя до последнего максимума (или минимума) вдоль геометрической границы света и тени:

$$L_{\alpha_m} = \frac{4a^2}{\lambda} \cos^2 \alpha_m - \frac{2a^2}{R} - \frac{\lambda}{4}. \quad (25)$$

При $R \rightarrow \infty$ и $\alpha_m \rightarrow 0$ формула (25) переходит в выражение для аналогичного расстояния от поверхности плоского поршневого излучателя [7].

В заключение автор приносит искреннюю благодарность Л. Д. Розенбергу и А. А. Тужилину за обсуждение результатов и ряд ценных замечаний, а также А. Д. Карюгиной за проведение значительной части численных расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. С. Белле. Расчет поля в приближении Кирхгофа слабо выпуклого сферического излучателя. Акуст. ж., 1968, 14, 3, 351—358.
2. Т. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
3. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. А. А. Тужилин. Теория интегралов Макдональда и их применение к задачам дифракции э-м волн на идеально проводящей полуплоскости. Отчет ЦНИГРИ, 1967.
5. А. А. Тужилин. Теория интегралов Макдональда. I. Рекуррентные соотношения. Равномерно сходящиеся ряды. Диф. урав., 1967.
6. А. А. Тужилин. Теория интегралов Макдональда. II. Асимптотические разложения. Диф. урав., 1967.
7. Н. Seki, A. Granato, R. Truell. Diffraction effects in the ultrasonic field of piston source and their importance in the accurate measurement of attenuation, J. Acoust. Soc. America, 1956, 28, 2, 230—238.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
22 мая 1967 г.