

УДК 534.12

КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ РЕШЕТКИ

Ю. И. Бобровницкий

Рассматриваются свободные и вынужденные колебания бесконечной плоской стержневой решетки с жестким соединением стержней в узлах. Показано, что в такой решетке существуют три нормальные изгибно-крутильные волны. Исследуется распространение нормальных волн на низких и высоких частотах. Отдельно обсуждается вопрос о числе нормальных волн в той или иной конструкции решетки. Показано, что в зависимости от способа соединения стержней в узлах в решетке может существовать от одной до шести нормальных волн.

Поперечные колебания бесконечной плоской стержневой решетки для двух частных случаев были рассмотрены ранее в работах [1, 2]. В работе [1] исследовалась прямоугольная решетка, у которой узлы не поворачиваются и смещаются только в поперечном направлении. При этом предполагалось, что частоты достаточно высоки и неоднородные волны, возникающие в узлах, успевают затухнуть на расстоянии меньшем, чем шаг решетки. При этих допущениях было получено дисперсионное уравнение, из которого следует наличие полос пропускания и непропускания. В работе [2] рассматривалась решетка, у которой стержни в узлах соединены посредством шаровых шарниров. Для такой модели было получено дисперсионное уравнение и исследовано распространение волн в разных направлениях.

В настоящей работе рассматривается наиболее распространенная конструкция решетки с жестким соединением стержней в узлах. В отличие от упомянутых выше частных случаев, изгибные и крутильные волны в такой решетке не разделяются и, взаимодействуя в узлах, образуют изгибно-крутильные решетчатые волны, которые можно считать чисто изгибными или крутильными только в нескольких предельных случаях. Часть этих случаев рассматривается ниже. Основное внимание в работе уделено свободным и вынужденным колебаниям решеток на высоких и низких частотах, а также вопросу о числе нормальных волн.

Сделаны следующие допущения. Соединение стержней в узлах предполагается точечным, так что не только толщина, но и ширина стержней должна быть много меньше рассматриваемых длин волн. Форма ячейки периодичности решеток считается прямоугольной. Кроме того, рассматриваются установившиеся колебания, и множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускается.

Используется метод, примененный нами в работах [2—4]. Метод позволяет получить дисперсионное уравнение в компактной форме, удобной для анализа, и найти функции Грина решетки в замкнутом виде. Ввиду того, что применение этого метода к решению настоящей задачи не содержит каких-либо принципиальных трудностей, все промежуточные выкладки пропущены.

Дисперсионное уравнение нормальных волн решетки с жестким соединением стержней в узлах имеет следующий вид:

$$(Z_{11}^{(1)} + Z_{11}^{(2)}) (Z_{22}^{(1)} + Z_{кр}^{(2)}) (Z_{22}^{(2)} + Z_{кр}^{(1)}) - Z_{12}^{(1)} Z_{21}^{(1)} (Z_{22}^{(2)} + Z_{кр}^{(1)}) + Z_{кр}^{(1)} - Z_{12}^{(2)} Z_{21}^{(2)} (Z_{22}^{(1)} + Z_{кр}^{(2)}) = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } Z_{11}^{(m)} = 2B_m k_m^3 Q(\sigma_m, \xi_m) / R(\sigma_m); \quad Z_{12}^{(m)} = -Z_{21}^{(m)} = \\ = 2iB_m k_m^2 \sin \xi_m \times (\operatorname{ch} \sigma_m - \cos \sigma_m) / R(\sigma_m); \\ Z_{22}^{(m)} = 2B_m k_m P(\sigma_m, \xi_m) / R(\sigma_m);$$

$$P(\sigma, \xi) = \sin \sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma \cdot \cos \sigma + \cos \xi (\operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma);$$

$$Q(\sigma, \xi) = \sin \sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma \cdot \cos \sigma - \cos \xi (\operatorname{sh} \sigma + \sin \sigma);$$

$$R(\sigma) = 1 - \cos \sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma; \quad \xi_m = \mu_m d_m; \quad \sigma_m = k_m d_m$$

d_m — шаг решетки в направлении оси x_m ; B_m и k_m — изгибные жесткость и волновое число x_m -стержней; μ_m — компонента постоянной распространения решетчатой волны вдоль оси x_m ; $Z_{кр}^{(m)} = 2C_m \kappa_m (\cos \kappa_m d_m - \cos \xi_m) / \sin \kappa_m d_m$; C_m и κ_m — крутильная жесткость и волновое число крутильных колебаний x_m -стержней; $m = 1, 2$. Уравнение (1) содержит $\cos \xi_1$ и $\cos \xi_2$ в третьей степени и для каждой частоты дает три корня постоянной распространения $\mu = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2}$. Это означает, что в рассматриваемой решетке могут существовать три нормальные решетчатые волны, подобно тому, как в однородной пластине существуют две нормальные изгибные волны.

Функции Грина G_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) выражаются в виде двойных интегралов. Так, смещение узла с координатами $(n_1 d_1, n_2 d_2)$ при действии в узле $(0, 0)$ единичной силы определяется первой функцией Грина:

$$G_{11}(n_1 d_1, n_2 d_2 | 0, 0) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(Z_{22}^{(1)} + Z_{кр}^{(2)}) (Z_{22}^{(2)} + Z_{кр}^{(1)})}{\Lambda} e^{in_1 \xi_1 + in_2 \xi_2} d\xi_1 d\xi_2, \quad (2)$$

где Λ — левая часть уравнения (1). Углы поворота этого узла определяются функциями G_{21} и G_{31} и т. д. При $n_1 = n_2 = 0$ выражение (2) представляет собой входную податливость J_{11} решетки относительно перерезывающей силы. В общем случае ни функции Грина G_{ik} , ни входные податливости J_{ik} через известные функции не выражаются.

Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие практический интерес.

Простейшей конструкцией решетки является вырожденная решетка, у которой толщина, например, x_2 -стержней стремится к нулю. Иными словами, вырожденная решетка представляет собой набор ничем не связанных x_1 -стержней. Все параметры, относящиеся к x_2 -стержням, обращаются в нуль, и дисперсионное уравнение (1) в данном случае записывается следующим образом:

$$16B_1^2 C_1 k^4 \kappa_1 \frac{(\cos \sigma_1 - \cos \xi_1) (\operatorname{ch} \sigma_1 - \cos \xi_1) (\cos \kappa_1 d_1 - \cos \xi_1)}{\sin \kappa_1 d_1 \cdot (1 - \cos \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_1)} = 0. \quad (3)$$

Постоянная распространения имеет три корня: $\pm \mu_1 = k_1, ik_1, \kappa_1$. Первые два корня соответствуют однородной и неоднородной изгибным волнам и третий корень — крутильной волне x_1 -стержня. В уравнение (3) не входит компонента μ_2 постоянной распространения. Она характеризует только фазовый сдвиг между волнами, бегущими в двух соседних x_1 -стержнях, и поэтому является функцией угла распространения φ и компоненты μ_1 : $\mu_2 = \mu_1 \operatorname{tg} \varphi$. Групповая скорость всегда направлена вдоль оси x_1 , в то время как фазовая скорость может иметь и другие направления. Нетрудно также проверить, что формула (2) определяет функцию Грина бесконечного однородного x_1 -стержня. На практике вы-

рожденная решетка может служить расчетной моделью для решеток, у которых жесткости x_1 -стержней много больше жесткостей x_2 -стержней. Модель эта будет верна во всем частотном диапазоне, за исключением узких полос в окрестности резонансных частот x_2 -стержня длиной d_2 , зажатого с обоих концов. На этих частотах, несмотря на малую жесткость B_2 и C_2 x_2 -стержней, величины $Z_{ik}^{(2)}$ и $Z_{кр}^{(2)}$ могут достигать больших значений, и пренебрегать ими в уравнении (1) нельзя.

Низкочастотные колебания решетки. На низких частотах, когда длины крутильных и изгибных волн в однородных стержнях намного превосходят размеры ячейки периодичности $\sigma_m \ll 1$, $\kappa_m d_m \ll 1$, два корня уравнения (1) являются малыми (порядка k_m). Третий корень оказывается комплексным и конечным по абсолютной величине. Так что при стремлении частоты к нулю длина нормальной волны, соответствующей этому корню, стремится к конечному пределу, в то время как длины двух первых нормальных волн стремятся к бесконечности.

Для «длинных» нормальных волн дисперсионное уравнение (1) может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{B_1}{d_2} \mu_1^4 + \left(\frac{C_1}{d_2} + \frac{C_2}{d_1} \right) \mu_1^2 \mu_2^2 + \frac{B_2}{d_1} \mu_2^4 - \left(\frac{B_1}{d_2} k_1^4 d_1^4 - \frac{B_2}{d_1} k_2^4 d_2^4 \right) = 0. \quad (4)$$

Точно такую же дисперсию имеют нормальные волны анизотропной пластины, описываемые дифференциальным уравнением:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $D_1 = B_1 / d_2$, $D_2 = B_2 / d_1$, $2D_{12} = C_1 / d_2 + C_2 / d_1$, $\rho_0 = (\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2) / d_1 d_2$. Таким образом, длинноволновые низкочастотные колебания решетки сходны с колебаниями анизотропной пластины. Это сходство известно давно [5] и, несмотря на известные возражения и дискуссии [6, 7], часто используется при различных расчетах [8, 9]. Но, как это следует из вышеизложенного, уравнение (4) не учитывает «короткой» нормальной решетчатой волны, и использование его в расчетах может привести к заметным ошибкам, в особенности при вычислении характеристик ближнего поля решетки.

Хекл [1] рассмотрел решетку, у которой узлы совершают только поперечные колебания и не могут поворачиваться. Практически такая решетка может быть реализована только с помощью специальных механических приспособлений. Тем не менее, несмотря на искусственность, модель Хекла представляет чрезвычайный практический интерес, так как имеет непосредственное отношение к высокочастотным колебаниям обычной решетки. Дисперсионное уравнение для этой конструкции решетки

$Z_{11}^{(1)} + Z_{11}^{(2)} = 0$ получается из общего уравнения (1) при $Z_{кр}^{(m)} = 0$. Из него следует, что в решетках Хекла существует одна нормальная волна.

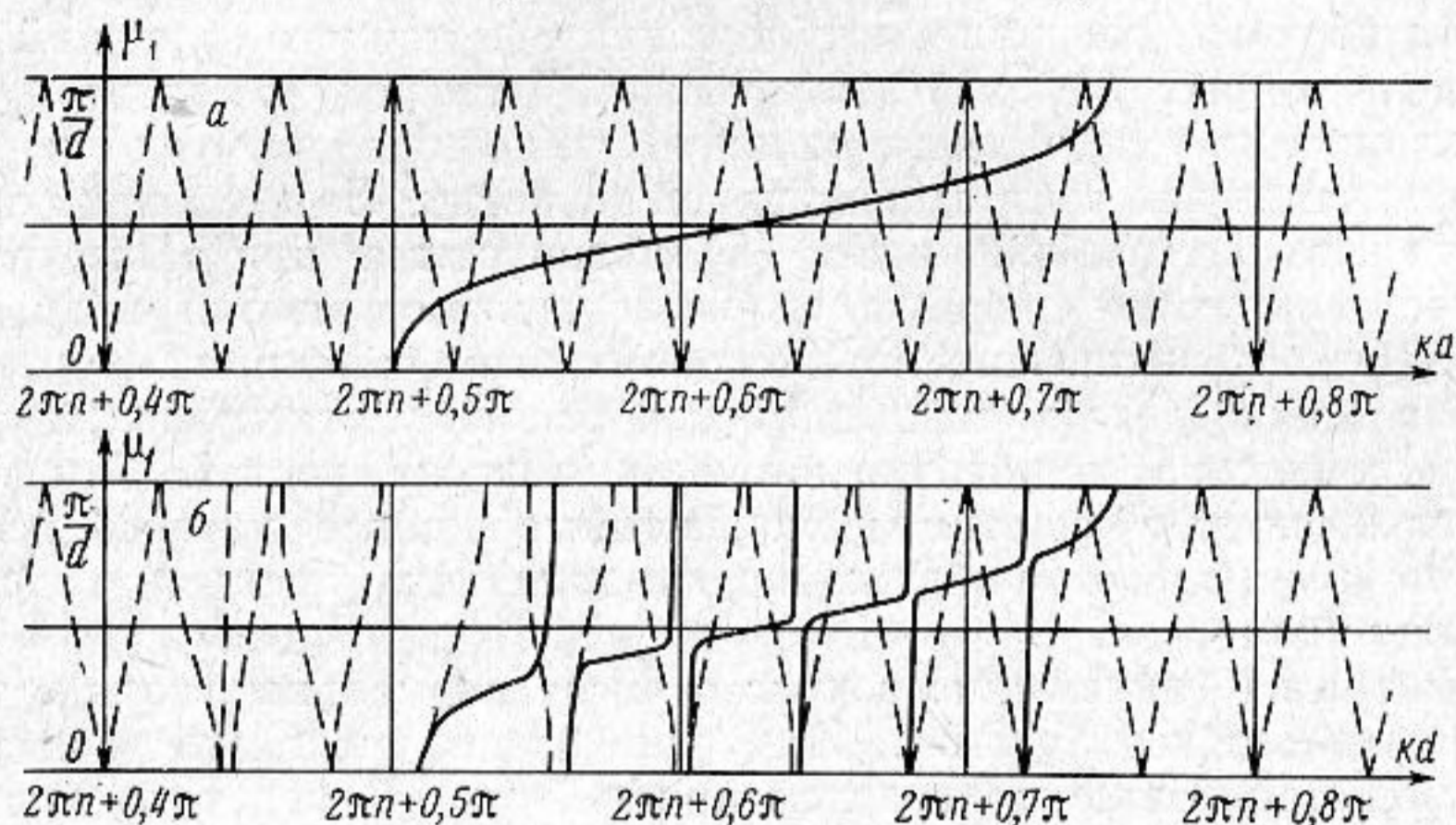
Решетка Хекла является одним из немногих частных случаев, когда некоторые из интегралов типа (2) удается выразить через известные функции. Такова, в частности, ее входная силовая податливость J_{11} . Она представляется через тригонометрические функции и полные эллиптические интегралы первого ряда.

Высокочастотные колебания решетки. На высоких частотах можно считать выполненным следующее условие:

$$C\kappa \gg Bk. \quad (5)$$

Действительно, оно будет верно при любых значениях параметров B и C , так как крутильное волновое число κ пропорционально первой степени частоты ω , а изгибное — корню из ω . Условие (5) выражает тот факт, что крутильная жесткость однородного стержня во много раз превосходит его изгибную жесткость к повороту. На высоких частотах кру-

тильная волна, возбужденная в некотором стержне решетки, практически не встречает сопротивления со стороны других стержней, а изгибная волна, наоборот, в каждом узле встречает огромное сопротивление к повороту, так что при изгибных колебаниях узлы решетки не поворачиваются и смещаются только линейно. Исключения составляют узкие окрестности резонансных частот стержней длины d_1 и d_2 , в которых либо сопротивление изгибающему моменту становится большим (изгибный резонанс), либо крутильное сопротивление уменьшается (крутильный резонанс). На высоких частотах, таким образом, всюду, за исключением счет-



ного числа узких полос частот, тремя нормальными волнами решетки являются две крутильные волны вырожденной решетки и одна изгибная волна решетки Хекла. Дисперсионное уравнение этих волн

$$Z_{кр}^{(1)} Z_{кр}^{(2)} (Z_{11}^{(1)} + Z_{11}^{(2)}) = 0 \quad (6)$$

получается из уравнения (1) при наложении на него условия

$$Z_{кр} \geq Z_{22}. \quad (7)$$

Легко видеть, что условия (5) и (7) совпадают почти на всех частотах, кроме узких полос, о которых говорилось выше.

Замена точного уравнения (1) приближенным (6) сильно облегчает расчеты высокочастотных колебаний решетки. Кроме того, что упрощается исследование дисперсии нормальных волн, появляется еще возможность выразить через известные функции входные податливости. Две моментные входные податливости решетки оказываются равными входным крутильным податливостям однородных x_1 - и x_2 -стержней, а входная податливость для силы будет такой же, как и у решетки Хекла.

Интересно проследить, как отличаются точное и приближенное решения, т. е. какая ошибка вносится подменой неравенства (5) неравенством (7). С этой целью рассмотрим распространение нормальных волн вдоль оси x_1 в квадратной решетке из одинаковых стержней и сравним дисперсию волн, полученную из точного уравнения (1) и из приближенного (6). На фигуре *a* представлено приближенное решение: пунктирной линией для крутильной волны вырожденной решетки, сплошной — для изгибной волны решетки Хекла. На фигуре *b* изображены точные дисперсионные кривые, полученные из уравнения (1): пунктирной линией для так называемой квазикрутильной волны, сплошной — для квазиизгибной.

Наибольшее отличие крутильной волны от квазикрутильной (пунктирные линии) заключено в окрестности точек $kd = 2\pi n \pm 0,5\pi$, где n — целое число. Эти точки соответствуют резонансным частотам отрезка стержня, зашпеленного на обоих концах. Величина Z_{22} на этих частотах стремится к бесконечности, поэтому квазикрутильная волна встречает в узлах бесконечное сопротивление и не может распространяться. В окре-

стностях этих частот имеют место полосы непропускания. При удалении от точек $kd = 2\pi n \pm 0,5\pi$ Z_{22} уменьшается, и на всех других частотах дисперсия квазикрутильной волны практически совпадает с дисперсией крутильной волны вырожденной решетки.

Отличие квазиизгибной волны от изгибной (сплошные линии) заключается в основном вблизи частот, на которых в отрезке стержня длина d укладывается целое число крутильных волн. На этих частотах величина $Z_{кр}$ стремится к нулю, а кривая дисперсии квазиизгибной волны терпит разрыв.

Таким образом, различие приближенного и точного решений весьма велико в некоторых узких полосах частот. Дисперсия реальных решетчатых волн оказывается намного сильнее, чем дисперсия волны решетки Хекла и крутильных волн вырожденной решетки. По этой причине замена уравнения (1) приближенным (6) недопустима при таких расчетах, где существенную роль играют скорости распространения волн. Но во многих других практических приложениях этим отличием можно пренебречь. Это можно делать, например, при расчетах интегральных уровней вибраций решетки в достаточно широких полосах частот. Так, в $1/2$ -октавных полосах для решетки, дисперсионные кривые которой изображены на фигуре, ошибка приближенно вычисленного уровня не превышает нескольких процентов.

Рассмотрим в заключение вопрос о числе нормальных волн в той или иной решетчатой конструкции. Как отмечалось, число это различно для разных решеток. Ниже приводится простой способ подсчета числа нормальных волн без предварительного вывода дисперсионного уравнения.

Этот способ основан на результатах работы [10]. В этой работе рассматриваются нормальные волны в одномерных периодических цепочках из многополюсников и показывается, что в цепочке из одинаковых $4N$ -полюсников существуют N нормальных волн. Например, в цепочке из четырехполюсников, которая, как известно, является дискретной моделью струны, можно возбудить только одну нормальную волну. Изгибно колеблющийся стержень моделируется с помощью цепочки из восьмиполюсников [11—13], и в нем существуют две нормальные волны — однородная (незатухающая) и неоднородная. Если на каждый $4N$ -полюсник наложить m жестких связей, то число нормальных волн уменьшится на m .

К этому следует добавить, что число нормальных волн всегда равно числу механизмов (или способов) передачи энергии от одной ячейки цепочки в другую. Это непосредственно следует из того, что каждые две пары клемм многополюсника определяют один такой механизм. В дискретной модели струны энергия передается парой «сила — скорость». В модели изгибно колеблющегося стержня существует два механизма — пары «сила — линейная скорость» и «изгибающий момент — угловая скорость» и т. д. Наложение m жестких связей на $4N$ -полюсники уменьшает число механизмов передачи энергии на m так же, как и число нормальных волн. При подсчете количества нормальных волн в одномерной структуре достаточно посчитать механизмы передачи энергии.

Все эти результаты обобщаются и на двумерные цепочки. Пусть имеются, например, два бесконечных набора цепочек из одинаковых четырехполюсников, параллельных осям x_1 и x_2 . Каждая такая цепочка является моделью струны, а в целом оба набора моделируют разъединенную струнную решетку. В такой структуре, очевидно, будут существовать две нормальные волны — одна в одном наборе, другая во втором наборе, аналогичные волнам вырожденной решетки. Но если наложить на эту структуру жесткие связи, а именно, соединить оба набора так, чтобы смещения в местах соединений были одинаковы, то два механизма передачи энергии сливаются в один, и в такой двумерной цепочке существует только одна нормальная волна. Такая цепочка будет моделью мембраны [14] или струнной решетки в зависимости от способа наложения жестких связей.

Точно так же обстоит дело и в стержневой решетке. Однородный стержень, совершающий изгибные и крутильные колебания, может быть представлен цепочкой из 12-полюсников (для этого к цепочке из восьми-полюсников, моделирующей изгибные колебания, нужно добавить цепочку из четырехполюсников, моделирующую крутильные колебания, и рассматривать эти две независимые цепочки как одну, составленную из 12-полюсников). В двух наборах таких цепочек, параллельных осям x_1 и x_2 , т. е. в разъединенной стержневой решетке, будут присутствовать шесть нормальных волн — по три в каждом наборе. Если стержни соединить в узлах шаровыми шарнирами, иными словами, наложить жесткие связи на линейные перемещения обоих наборов в местах их пересечения, то энергия от ячейки к ячейке будет передаваться пятью механизмами (одной парой «сила — линейная скорость», двумя парами «изгибающий момент — угловая изгибная скорость» и двумя парами «крутящий момент — угловая скорость кручения»). В решетке с шаровыми шарнирами, следовательно, существуют 5 нормальных волн. Три были рассмотрены в [2]. Две другие — это крутильные волны вырожденной решетки.

При наложении других жестких связей число нормальных волн в решетке будет уменьшаться и дальше. Если стержни соединить в узлах с помощью цилиндрических шарниров, т. е. наложить жесткие связи двух видов — на перемещения и на угловые смещения в одном из направлений, то в такой решетке будут существовать четыре нормальные волны. При жестком соединении стержней в узлах число нормальных волн равно трем. Это же следует, как показано выше, из дисперсионного уравнения (1). Далее, с помощью специальных приспособлений можно добиться того, чтобы в узлах решетка не могла поворачиваться в одном из главных направлений. Тем самым ликвидируется еще один механизм передачи энергии и число волн уменьшается до двух. Наконец, если запретить повороты узлов и в другом направлении, то энергия может передаваться только одним механизмом (парой «сила — линейная скорость»). Это решетка Хекла. В ней существует одна нормальная волна.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Heckl. Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 7, 1335—1343.
2. Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин, В. П. Маслов, А. В. Римский-Корсаков. Распространение изгибных волн в стержневой решетке. Борьба с шумами и вибрациями (Доклады на Всесоюзном совещании по борьбе с шумами и вибрациями методами строительной акустики. М., Стройиздат, 1966).
3. Ю. И. Бобровницкий, В. П. Маслов. Распространение изгибных волн по стержню с периодической сосредоточенной нагрузкой. Акуст. ж., 1966, 12, 2, 167—172.
4. Ю. И. Бобровницкий. Вынужденные колебания периодически неоднородного стержня. Доклад на 6-й Всесоюзной акустич. конференции (секция М), М., 1968.
5. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.
6. J. D. Renton. On «The representation of a plate in flexure by a grid of orthogonally connected beams». Int. J. Mech. Sci., 1965, 7, 11, 788—789.
7. A. L. Yettram, H. M. Husain. Reply to discussion on «The representation of a plate in flexure by a grid of orthogonally connected beams». Ibid.
8. A. L. Yettram, H. M. Husain. The representation of a plate in flexure by a grid of orthogonally connected beams. Int. J. Mech. Sci., 1965, 7, 4, 243—251.
9. J. D. Renton. On the gridwork analogy for plates. J. Mech. Solids, 1965, 13, 6, 413—420.
10. П. Е. Краснушкин. Нормальные волны в цепочечных многополюсных фильтрах. Ж. техн. физ., 1947, 17, 6, 705—722.
11. L. Cremer, H. O. Leilich. Zur Theorie der Biegekettenteiler. Arch. Elek. Übertrag., 1953, 7, 6, 261—270.
12. У. Карплюс. Моделирующие устройства для решения задачи теории поля. М., ИЛ, 1962.
13. Б. А. Волынский, В. Е. Бухман. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960.
14. П. Е. Краснушкин. О методах моделирования волновых процессов. Вестн. МГУ, 1949, 11, 89—110.