

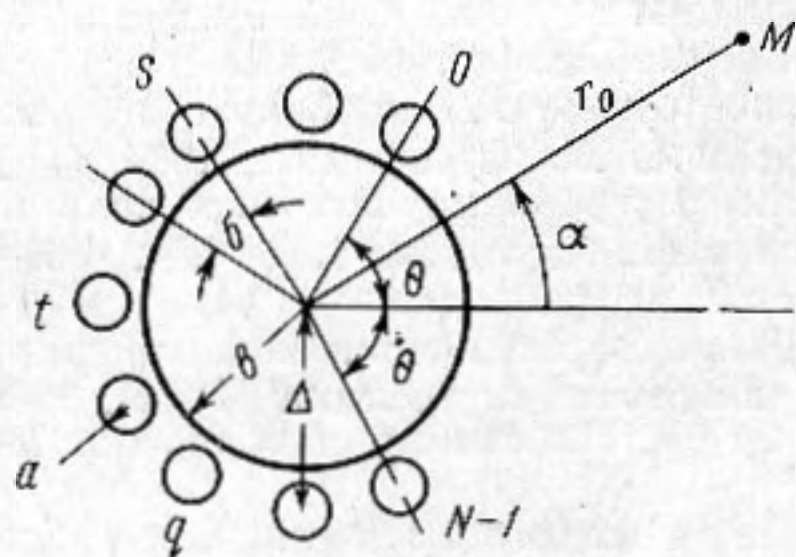
УДК 534.26

**ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ, ИЗЛУЧЕННОЙ ЦИЛИНДРОМ, НА РЕШЕТКЕ ИЗ АКУСТИЧЕСКИ МЯГКИХ ЦИЛИНДРОВ**

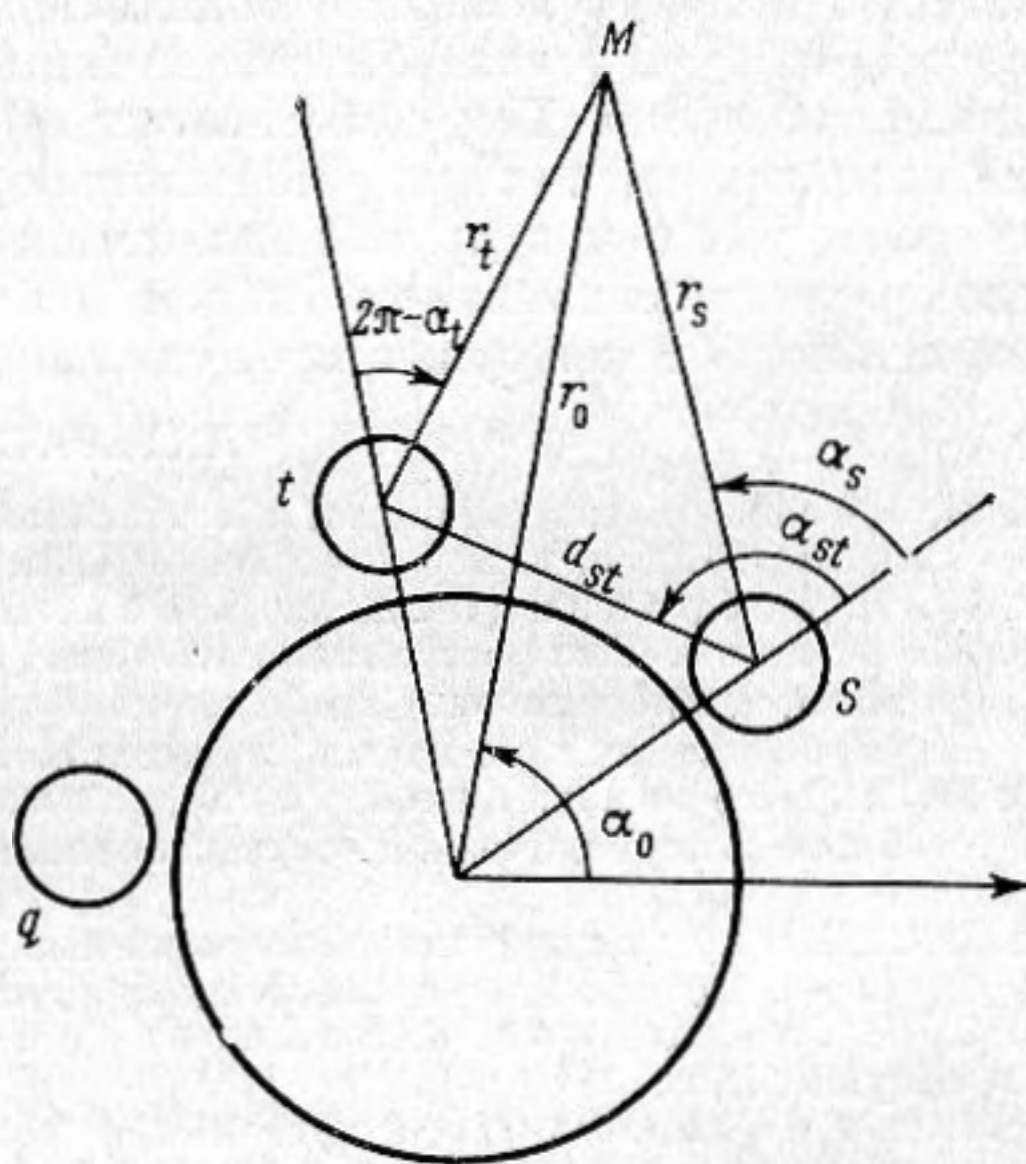
*В. Е. Глазанов*

Решена задача о дифракции волны, излученной цилиндром, на окружающей этот цилиндр решетке из абсолютно податливых цилиндров. Плоская задача сведена к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения. Решение получено для замкнутой и незамкнутой вокруг цилиндра решеток. Вычислены сопротивления излучения и поле излучения цилиндра, искаженное решеткой. Численные расчеты проведены для случая, когда размеры податливых цилиндров много меньше длины волны.

В работе [1] была решена задача о дифракции цилиндрической звуковой волны на одиночном жестком цилиндре. В настоящей статье развиты дальше идеи работы [1] на случай искажения поля цилиндра, колеблющегося со скоростью  $v$ , окружающей этот цилиндр решеткой из абсолютно податливых цилиндров. Предполагается, что цилиндры бесконечно длинные, а их оси параллельны между собой, т. е. решается плоская двумерная задача. Взаимное расположение цилиндров и их размеры ясны из фиг. 1. Задача заключается в том, чтобы найти



Фиг. 1



Фиг. 2

поле излучения цилиндра с радиусом  $b$ , искаженное решеткой, в любой точке  $M$  на плоскости, а также определить сопротивление излучения большого цилиндра.

Будем искать давление, создаваемое излучающим цилиндром в точке  $M$ , в виде

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(kr_0) e^{in\alpha_0} \quad (1)$$

Здесь  $H_n^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода (в дальнейшем индекс (1), а также фактор  $e^{-i\omega t}$  — опускаются),  $B_n$  — неизвестные коэффициенты разложения. Смысл величин  $\alpha_0$  и  $r_0$  ясен из фиг. 1.



Рассмотрим теперь цилиндр с номером  $t$ . Давление в волне, рассеянной этим цилиндром в точке  $M$ , записывается в виде

$$p_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(t)} H_n(kr_t) e^{in\alpha_t}, \quad (2)$$

где  $r_t$  — расстояние от оси цилиндра  $t$  до точки  $M$ . Полное поле в точке  $M$  складывается из парциальных полей, создаваемых всеми цилиндрами, т. е.

$$p_M = p + \sum_{t=0}^{N-1} p_t, \quad (3)$$

где  $N$  — число цилиндров в экранирующей решетке. Давление на излучающем цилиндре складывается из собственного давления и давлений, «наведенных» остальными цилиндрами. Поэтому первое граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r_0} \left[ p + \sum_{t=0}^{N-1} p_t \right]_{r_0=b} = ik\rho c v, \quad (4)$$

где  $k$  — волновое число,  $\rho c$  — волновое сопротивление окружающей среды.

Цилиндр  $t$  облучается волной, излученной цилиндром с радиусом  $b$ , и волнами, рассеянными всеми остальными цилиндрами. Поскольку по постановке задачи давление на акустически мягком цилиндре должно обращаться в нуль, второе граничное условие можно написать в следующем виде:

$$\left[ p + p_t + \sum_{s=0}^{t-1} p_s + \sum_{q=t+1}^{N-1} p_q \right]_{r_t=a} = 0, \quad (5)$$

причем  $p_s$  и  $p_q$  ищутся в виде, аналогичном выражению (2). Решение задачи состоит в отыскании неизвестных коэффициентов  $B_n, A_n^{(t)}$ .

Для того, чтобы удовлетворить граничному условию (4), необходимо написать выражение (2) в цилиндрической системе координат с осью, совпадающей с осью большого цилиндра; чтобы удовлетворить граничному условию (5), нужно написать выражения для  $p, p_s$  и  $p_q$  в цилиндрической системе координат с осями, совпадающими с осью цилиндра  $t$ . Переход от одной цилиндрической системы координат к другой можно осуществить, воспользовавшись, по аналогии с работой [1], теоремой сложения для цилиндрических функций [2]. Тогда давление  $p_t$  будет

$$p_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(t)} H_{n-m}(k\Delta) J_n(kr_0) e^{-in(\delta t + \theta)} e^{in\alpha_0}, \quad (6)$$

где  $\Delta$  — расстояние между центрами большого и любого из малых цилиндров,  $2\theta$  — величина открытого сектора большого цилиндра (см. фиг. 1).

Подставляя выражения (1) и (6) в формулу (4) и приравнивая коэффициенты при членах, содержащих  $e^{in\alpha_0}$ , мы получаем первую группу уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$B_n H_n'(kb) + J_n'(kb) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(t)} H_{n-m}(k\Delta) \times \\ \times \sum_{t=0}^{N-1} e^{-i(\delta t + \theta)(m-n)} = \begin{cases} i\rho c & (n=0); & v=1 \\ 0 & (n \neq 0); & n = -\infty \dots +\infty \end{cases} \quad (7)$$



Здесь штрих обозначает дифференцирование функции по  $kr_0$ .

Для второго граничного условия (5) давления  $p$  и  $p_s$  принимают вид

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m H_{m-n}(k\Delta) J_n(kr_t) e^{im(\delta t + \theta)} e^{in\alpha_t}, \quad (8)$$

$$p_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(s)} H_{m-n}(kd_{st}) J_n(kr_t) e^{i(m\alpha_{st} - n\alpha_{ts})} e^{in\alpha_t}, \quad (9)$$

где  $d_{st}$  — расстояние между осями цилиндров  $s$  и  $t$ . Смысл угла  $\alpha_{st}$  ясен из фиг. 2. Выражение для  $p_q$  получается из формулы (9) заменой индекса  $s$  на  $q$ .

Подставляя выражения (2), (8), (9) и значение  $p_q$  в формулу (5) и приравнявая коэффициенты при членах, содержащих  $e^{in\alpha_t}$ , после несложных преобразований получаем вторую группу уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$A_n^{(t)} + C_n(ka) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [B_m H_{m-n}(k\Delta) e^{im(\delta t + \theta)} + D_{mn}] = 0, \quad (10)$$

где  $C_n(ka) = J_n(ka) / H_n(ka)$ ;

$$D_{mn} = \sum_{s=0}^{t-1} A_m^{(s)} H_{m-n}(kd_{st}) e^{i \left[ \frac{\delta(t-s)}{2} (m+n) + \frac{\pi}{2} (n-m) \right]} + \\ + \sum_{q=t+1}^{N-1} A_m^{(q)} H_{m-n}(kd_{qt}) e^{-i \left[ \frac{\delta(q-t)}{2} (m+n) + \frac{\pi}{2} (n-m) \right]}. \\ n = -\infty \dots + \infty; t = 0, 1, \dots, N-1.$$

Зная неизвестные коэффициенты, определяемые бесконечной системой уравнений (7) и (10), можно найти поле в точке  $M$ , подставив в формулу (3) выражения (1) и (2). Поле вдали от цилиндра можно вычислить, принимая  $r_0 \gg b$ ;  $kr_0 \gg 1$ . Замечая, что при этом  $\alpha_t = \alpha_0$ ;  $r_t = r_0 - \Delta \cos(\theta + \delta t - \alpha_0)$  и учитывая асимптотическое представление функции Ханкеля при больших значениях аргумента [3], получаем

$$p_M = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{i(kr_0 - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i(n\alpha_0 \mp \frac{n\pi}{2})} \left[ B_n + \sum_{t=0}^{N-1} A_n^{(t)} e^{-ik\Delta \cos(\theta + \delta t - \alpha_0)} \right]. \quad (11)$$

Сопротивление излучения  $Z$  пульсирующего цилиндра на единицу его поверхности получается в виде

$$Z = \frac{1}{2\pi v} \int_0^{2\pi} p_b da_0, \quad (12)$$

где  $p_b$  — давление на поверхности цилиндра, определяемое по (3) при  $r_0 = b$ . Подставляя в формулу (12) значение  $p_b$  и интегрируя, получаем окончательно

$$Z = B_0 H_0(kb) + J_0(kb) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m(k\Delta) (-1)^m \sum_{t=0}^{N-1} A_m^{(t)} e^{im(\delta t + \theta)}. \quad (13)$$

Значительно более простое решение можно получить для замкнутой вокруг цилиндра решетки, т. е. при  $\theta = 0$ . Нетрудно показать, что в силу



симметрии расположения цилиндров неизвестные коэффициенты разложения определяются как

$$A_n^{(t)} = A_n. \quad (14)$$

Учитывая, что

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{-in\delta t} = \begin{cases} N & \text{при } n = 0; \pm N; \pm 2N \dots \\ 0 & \text{при } n \neq 0; \pm N; \pm 2N \dots, \end{cases} \quad (15)$$

выражение (7) можно написать в виде

$$B_n = 0 \text{ при } n \neq 0; \pm N, \pm 2N \dots$$

$$B_n H_n'(kb) + N J_n'(kb) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_{n-m}(k\Delta) = \begin{cases} i\rho c & (n = 0) \\ 0 & (n = \pm N; \pm 2N \dots) \end{cases} \quad (16)$$

Учитывая в формуле (10) соотношение (14) и суммируя правую и левую части по  $t$  от 0 до  $N-1$ , получаем вторую группу уравнений для определения неизвестных коэффициентов при  $\theta = 0$ :

$$N A_n H_n(ka) + J_n(ka) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ B_m H_{m-n}(k\Delta) \sum_{t=0}^{N-1} e^{im\delta t} + \right.$$

$$\left. + 2A_m \sum_{t=1}^{N-1} (N-t) H_{m-n}(kd_t) \cos \left[ \frac{\delta}{2}(m+n) + \frac{\pi}{2}(m-n) \right] \right\} = 0, \quad (17)$$

где  $d_t = 2\Delta \sin \frac{\delta t}{2}$  — расстояние между центром цилиндра  $t$  и центрами каждого из  $N-1$  податливых цилиндров, соответственно.

Выражение (13) для  $Z$  при  $\theta = 0$  принимает вид

$$Z = B_0 H_0(kb) + N J_0(kb) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m (-1)^m H_m(k\Delta). \quad (18)$$

Выражение для  $p_M$  получается из формулы (11), если подставить в нее значения  $A_n^{(t)} = A_n$  и  $\theta = 0$ .

Таким образом, нами получено решение задачи о дифракции волны, излученной пульсирующим цилиндром, колеблющимся с заданной скоростью, на круговой решетке из абсолютно податливых цилиндров. Ввиду большой сложности решения даже на электронно-вычислительной машине бесконечных систем уравнений высокого порядка (7) и (10) или (16) и (17), численный расчет можно было провести лишь для случая, когда волновой радиус  $ka \ll 1$ .

Давления, рассеянные податливыми цилиндрами, следует при этом задавать с учетом присутствия излучающего цилиндра\*, который для определенности будем считать абсолютно жестким. Тогда с учетом работы [1] находим

$$p_t = A \left[ H_0(kr_t) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n H_n(kr_0) e^{-in\delta t} e^{ina_0} \right],$$

где

$$X_n = \frac{J_n'(kb)}{H_n'(kb)} H_n(k\Delta).$$

\* На это обстоятельство автору указал И. А. Урусовский.



При таком написании  $p_t$  делается допущение, что все абсолютно податливые цилиндры рассеивают волны одинаковой амплитуды  $A$ . Выражения для  $Z$  и  $p_M$  могут быть в этом случае получены в следующем виде:

$$Z = R + iY = Z_0 \left[ 1 + \frac{2iN}{\pi kb} \cdot \frac{H_0^2(k\Delta)}{H_1(kb)H_0(kb)D} \right], \quad (19)$$

где  $R$  и  $Y$  — соответственно активная и реактивная составляющие;  $Z_0 = -i\rho c \frac{H_0(kb)}{H_1(kb)}$  — сопротивление излучения цилиндра в отсутствие абсолютно податливых цилиндров;

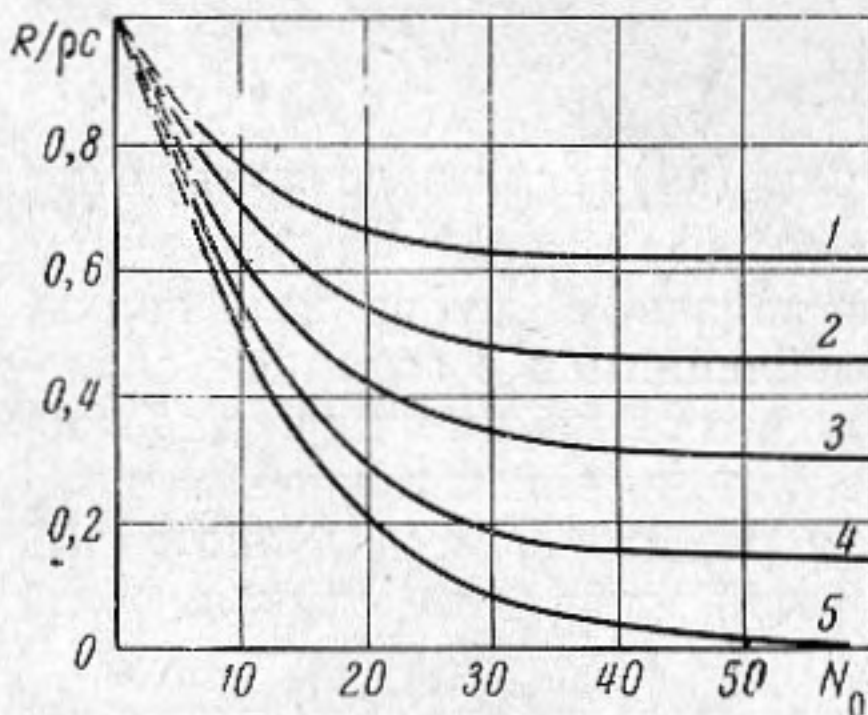
$$D = H_0(ka) + \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N-1} (N-t) \left[ H_0(kd_t) - H_0(k\Delta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cos n\delta t \right] - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n H_n(k\Delta);$$

$$p_M = \frac{Z_0}{H_0(kb)} \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} e^{i(kr_0 - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 - \frac{H_0(k\Delta)}{D} \times \sum_{t=0}^{N-1} \left[ e^{-ik\Delta \cos(\theta + \delta t - \alpha_0)} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-in(\delta t + \theta - \alpha_0 + \frac{\pi}{2})} \right] \right\}. \quad (20)$$

При расчете принималось, что

$$\delta = \frac{2\pi}{N_0}; \quad N = N_0 \frac{\pi - \theta}{\pi} + 1 \quad (\theta \neq 0); \quad N = N_0 (\theta = 0),$$

где  $N_0$  — число малых цилиндров при их равномерном расположении вокруг излучающего цилиндра ( $\theta = 0$ ). Расчеты были проведены для



Фиг. 3

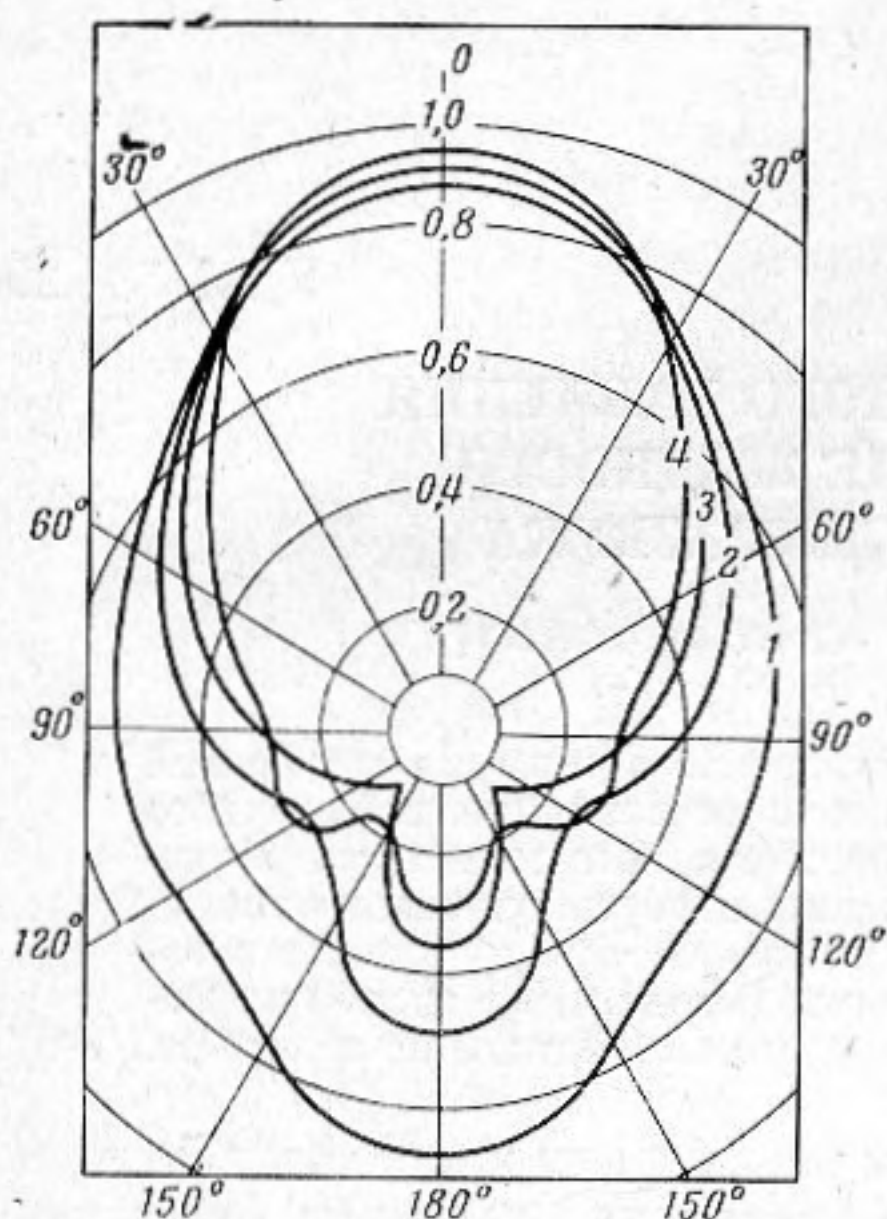
$ka = 0,005$ ,  $kb = 2,5$  и  $k\Delta = 2,51$  на машине «Урал-2» Ю. В. Хижинской и Г. Г. Максимовой. На фиг. 3 приведен график отношения активной составляющей сопротивления излучения к волновому сопротивлению окружающей среды  $R/\rho c$ , построенный на основании выражения (19) в зависимости от числа податливых цилиндров  $N_0$  для различных углов  $\theta$ . Кривая 1 соответствует  $\theta = 120^\circ$ ; 2 —  $90^\circ$ , 3 —  $60^\circ$ , 4 —  $30^\circ$ , 5 —  $0^\circ$ . Видно, что при угле  $\theta = 0^\circ$  с увеличением  $N_0$  величина  $R/\rho c$  падает и при  $N_0 = 60$  становится практически равной нулю. Если  $\theta \neq 0$ , наблюдается область «стабилизации» сопротивления

излучения  $R$ , которая наступает, начиная с определенных значений  $N_0$ , зависящих от угла  $\theta$ . С увеличением  $\theta$  величина  $R/\rho c$  «стабилизируется» при меньших  $N_0$ , так как влияние открытой части цилиндра на сопротивление излучения становится все более определяющим. В области «стабилизации»  $R/\rho c$  уже не зависит от  $N_0$ ; это как бы соответствует случаю цилиндра в «абсолютно мягком экране» [4].

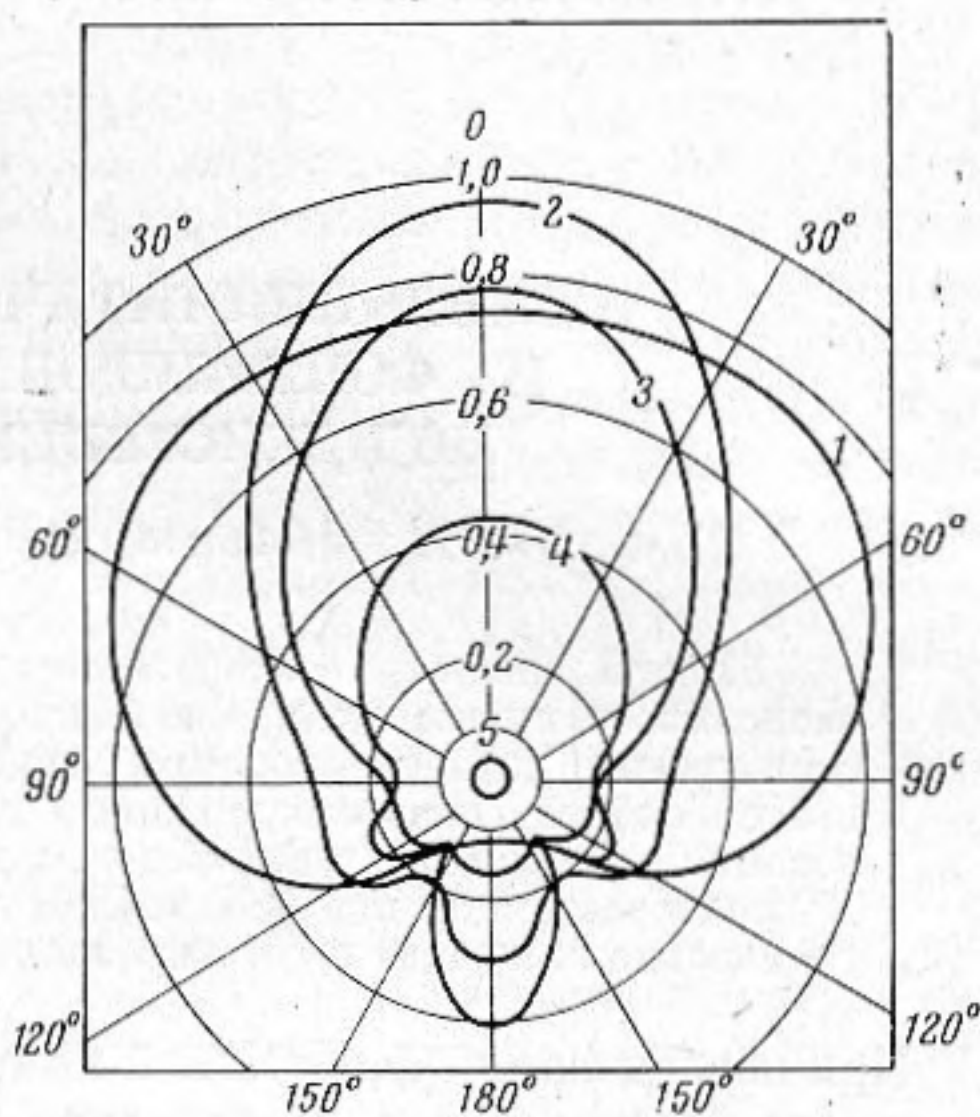
Результаты расчета давления по формуле (20) для тех же значений  $kb$  и  $ka$  и  $kr_0 = 50$  показывают (см. фиг. 4 и 5), что поле пульсирующего цилиндра существенно искажается решеткой из абсолютно податливых цилиндров. Искажение тем больше, чем больше число цилиндров  $N_0$  рас-



положено вблизи поверхности пульсирующего цилиндра (фиг. 4). График построен для  $\theta = 90^\circ$  и  $N_0 = 6$  (кривая 1),  $N_0 = 12$  (кривая 2),  $N_0 = 18$  (кривая 3),  $N_0 = 60$  (кривая 4). За единицу принята величина звукового давления, развиваемого излучающим цилиндром при отсутствии решетки.



Фиг. 4



Фиг. 5

В области «стабилизации» сопротивления излучения (при  $N_0 = 60$ ) вид диаграммы рассеяния определяется углом  $\theta$  (фиг. 5, где 1 —  $\theta = 120^\circ$ ; 2 —  $90^\circ$ ; 3 —  $60^\circ$ ; 4 —  $30^\circ$ , 5 —  $0^\circ$ ). Для значений  $\theta < 90^\circ$  поле в направлении максимума падает с уменьшением  $\theta$ , и для  $\theta = 0$  (кривая 5) решетка практически уже не пропускает звук.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. В. Тюткину за руководство работой и Е. Л. Шендерову за обсуждение хода и результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Шендеров. Дифракция цилиндрической звуковой волны на цилиндре. Акуст. ж., 1961, 7, 3, 370—374.
2. Ватсон. Теория бесселевских функций. М., ИЛ, 1949, т. 1.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, 10, 3, 313—317.

Ленинград

Поступила в редакцию  
21 сентября 1967 г.