

УДК 534.26

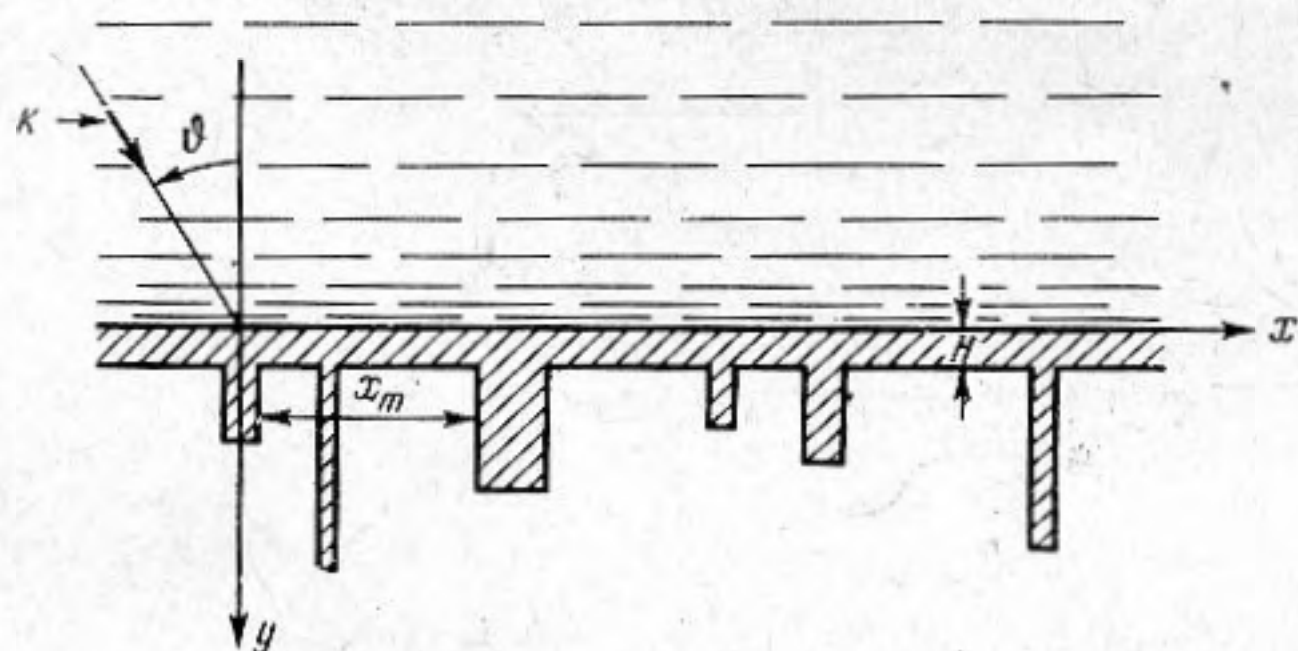
**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ
НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ**

И. П. Коновалюк

Рассматривается задача об отражении плоской акустической волны от упругой пластины, подкреплённой ребрами жесткости. Получены формулы, позволяющие оценить влияние N произвольно расположенных ребер на величину отраженной волны. Наиболее подробно исследуется пластина с бесконечным числом периодически расположенных ребер. Приведены результаты численных расчетов.

Вопрос о влиянии неоднородностей пластин и оболочек на отражение от них звуковой волны за последнее время неоднократно освещался в литературе [1—4]. В работе [4] рассматривалась задача о влиянии одного ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от бесконечной тонкой упругой пластины. Ниже разбирается более общая задача, когда пластина имеет произвольное число ребер. Решение осуществляется тем же методом, что и в случае одного ребра.

Пусть пластина толщиной H , в которой возбуждаются лишь изгибные волны, имеет N произвольно расположенных ребер жесткости разной высоты и примыкает к полупространству, заполненному жидкостью (фиг. 1).



Фиг. 1

Поместим начало координат у крайнего левого ребра, приписав ему нулевой номер. Расстояние каждого m -го ребра от нулевого будем обозначать через x_m . Пусть, далее, со стороны жидкости на пластину нормально к линиям присоединения ребер падает плоская звуковая волна:

$$\varphi_0 = e^{ikhx \sin \vartheta + iky \cos \vartheta},$$

где ϑ — угол падения волны на пластину, k — волновое число в жидкости. Общее поле представим в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + Ve^{ikhx \sin \vartheta - iky \cos \vartheta} + \Phi. \tag{1}$$

Здесь Φ — поле, рассеянное ребрами; V — коэффициент отражения плоской волны от упругой пластины, причем

$$V(\vartheta) = \frac{i \left(\frac{D}{\omega} \right) (k^4 \sin^4 \vartheta - k_0^4) - \frac{\rho_0 c}{\cos \vartheta}}{i \left(\frac{D}{\omega} \right) (k^4 \sin^4 \vartheta - k_0^4) + \frac{\rho_0 c}{\cos \vartheta}}$$

где $D = EH^3 / [12(1 - \sigma^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины; $k_0 = (\omega^2 \rho H / D)^{1/4}$ — волновое число изгибных волн в свободной пластине; c — скорость звука в жидкости; E , σ , ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины; ρ_0 — плотность жидкости.

Потенциал поля φ должен удовлетворять следующим условиям:

1. $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ в жидкости;

2. $\frac{d}{dy} \nabla^4 \varphi - k_0^4 \frac{d}{dy} \varphi - q^5 \varphi = 0$ (где $q^5 = \omega^2 \rho_0 / D$) — на всей поверхности пластины, кроме линий контакта;

3. $(\varphi_y')_{x_m+0} = (\varphi_y')_{x_m-0}$, $(\varphi_{xy}'')_{x_m+0} = (\varphi_{xy}'')_{x_m-0}$,

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_{xxy}''')_{x_m+0} - (\varphi_{xxy}''')_{x_m-0} &= -i(\omega Z_M / D) \cdot \varphi_{xy}'' \\ (\varphi_{xxx}''')_{x_m+0} - (\varphi_{xxx}''')_{x_m-0} &= i(\omega Z_F / D) \cdot \varphi_y' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$m = 0 \dots (N-1)$

на линиях контакта, причем Z_F и Z_M — импеданцы ребра по отношению к продольным и изгибным колебаниям в ребре, соответственно, и наконец, принципу излучения.

Ребра возбуждаются падающей волной в фазе, определяемой множителем $e^{ik_m x \sin \vartheta}$. Цилиндрические волны, распространяющиеся от каждого ребра в примыкающей жидкости, аналитически можно записать в том же виде, в каком представляется волна, возбуждаемая одним ребром на пластине [4]. Тогда в силу линейности задачи поле, созданное в жидкости колебанием всех ребер, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[(C_0)_m + (C_1)_m \lambda] \cdot e^{ik_m x \sin \vartheta}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda(x-x_m)+y\sqrt{\lambda^2-k^2}} \cdot d\lambda = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[(C_0)_m + (C_1)_m \lambda]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} \cdot e^{i\lambda x + y\sqrt{\lambda^2-k^2}} \cdot e^{-ix_m(\lambda - k \sin \vartheta)} \cdot d\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Положение контура Γ изображено на фиг. 2. Подставляя выражения (1) и (3) в уравнения (2) для каждого ребра, получим $2N$ уравнений, из которых определяются $2N$ неизвестных коэффициентов $(C_0)_m$ и $(C_1)_m$:

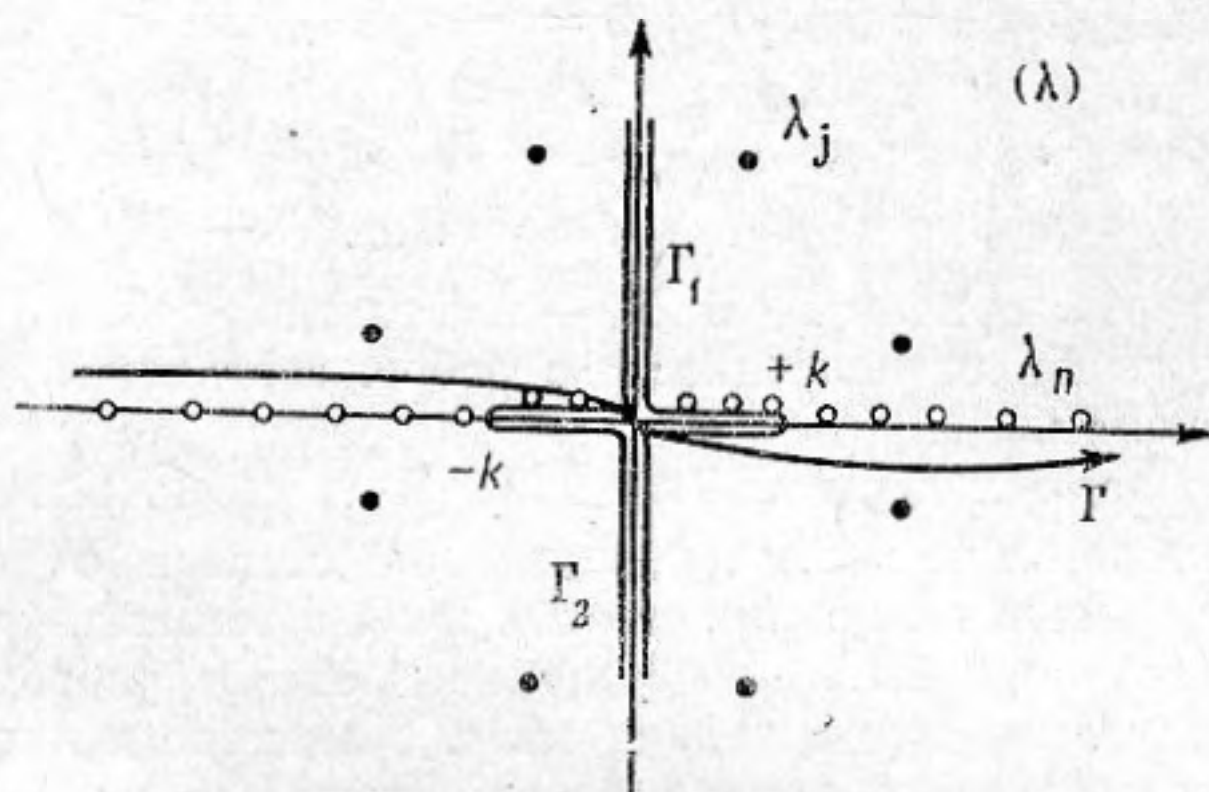
$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} e^{ik_m x \sin \vartheta} (C_0)_m \hat{I}_{1lm}^+ + \sum_{m=l+1}^{N-1} e^{ik_m x \sin \vartheta} (C_0)_m \hat{I}_{1lm}^- + \right. \\ &+ \left[J_2 + \frac{2D}{\omega(Z_M)_l} J_3 \right] e^{ik_l x \sin \vartheta} (C_1)_l + \sum_{m=0}^{l-1} e^{ik_m x \sin \vartheta} (C_1)_m \hat{I}_{2lm}^+ + \\ &+ \left. \sum_{m=l+1}^{N-1} e^{ik_m x \sin \vartheta} (C_1)_m \hat{I}_{2lm}^- + ik^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot (1 - V) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} e^{ikx_m \sin \vartheta} (C_0)_m \dot{I}_{0lm}^+ + \sum_{m=l+1}^{N-1} e^{ikx_m \sin \vartheta} (C_0)_m \dot{I}_{0lm}^- + \right. \\ \left. + \left[J_0 + \frac{2D}{\omega(Z_F)_l} J_3 \right] e^{ikx_l \sin \vartheta} (C_0)_l + \sum_{m=0}^{l-1} e^{ikx_m \sin \vartheta} (C_1)_m \dot{I}_{1lm}^+ + \right. \\ \left. + \sum_{m=l+1}^{N-1} e^{ikx_m \sin \vartheta} (C_1)_m + ik \cos \vartheta (1 - V) \right\} = 0.$$

Здесь символами \dot{I}_{nlm}^{\pm} обозначены интегралы:

$$\dot{I}_{nlm}^{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} \frac{\lambda^n \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} \cdot e^{\pm i\lambda |x_l - x_m|} d\lambda.$$

Решение задачи в такой общей постановке из-за сложного вида системы уравнений (4) оказывается весьма трудоемким. Оно существенно уп-



Фиг. 2

рощается при малых N или в случае бесконечного числа периодически расположенных одинаковых ребер.

Рассмотрим этот последний случай более подробно. Здесь условия возбуждения ребер, а, следовательно, процессы образования цилиндрических волн в жидкости, отличаются лишь фазой. Следовательно, неизвестных коэффициентов будет всего два: C_0 и C_1 , как и в случае одного ребра. Припишем нулевой номер произвольному ребру. Тогда общее поле, созданное в жидкости колебанием всех ребер, может быть написано в виде сумм:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{C_0 + C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y \sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{imx_0(\lambda - k \sin \vartheta)} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{C_0 + C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y \sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\lambda + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{C_0 - C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y \sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{imx_0(\lambda - k \sin \vartheta)} d\lambda. \quad (5)$$

Подставляя общее поле (1) с учетом выражения (5) в контактные условия (2), можно найти коэффициенты C_0 и C_1 . Оценив ряд интегралов методом наибыстрейшего спуска, запишем коэффициенты C_0 и C_1 в конечном виде:

$$C_0 = -ik \cos \vartheta (1 - V) \times \\ \times \frac{[(L_1^+ - L_1^-) - S_0 + T_0] k \sin \vartheta - \left\{ J_3 \frac{2D}{\omega Z_M} + [J_2 - (L_2^+ + L_2^-) - S_1 - T_1] \right\}}{[(L_1^+ - L_1^-) - S_0 + T_0]^2 - \left\{ J_3 \frac{2D}{\omega Z_M} + [J_2 - (L_2^+ + L_2^-) - S_1 - T_1] \right\} \times} \\ \times \left\{ J_3 \frac{2D}{\omega Z_F} + [J_0 - (L_0^+ + L_0^-) - S_{-1} - T_{-1}] \right\}; \quad (6)$$

$$C_1 = -ik \cos \vartheta (1 - V) \times \\ \times \frac{[(L_1^+ - L_1^-) - S_0 + T_0] - k \sin \vartheta \left\{ J_3 \frac{2D}{\omega Z_F} + [J_0 - (L_0^+ + L_0^-) - S_{-1} - T_{-1}] \right\}}{[(L_1^+ - L_1^-) - S_0 + T_0]^2 - \left\{ J_3 \frac{2D}{\omega Z_M} + [J_2 - (L_2^+ + L_2^-) - S_1 - T_1] \right\} \times} \\ \times \left\{ J_3 \frac{2D}{\omega Z_F} + [J_0 - (L_0^+ + L_0^-) - S_{-1} - T_{-1}] \right\},$$

где

$$S_n = \sum_{j=1}^3 \frac{\lambda^n (\lambda^2 - k^2)}{5\lambda^4 - (4\lambda^2 k^2 + k_0^4)} \frac{1}{1 - e^{-ix_0(\lambda - k \sin \vartheta)}}; \\ T_n = \sum_{j=1}^3 \frac{\lambda^n (\lambda^2 - k^2)}{5\lambda^4 - (4\lambda^2 k^2 + k_0^4)} \frac{1}{1 - e^{-ix_0(\lambda + k \sin \vartheta)}}.$$

Величины L_n^\pm выражаются интегралами:

$$L_n^\pm = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \int \frac{\lambda^n \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{imx_0(\lambda \pm k \sin \vartheta)} d\lambda \quad (7)$$

по петле, охватывающей разрез, идущий от 0 до $+i\infty$. Для $x_0 k > 1$ эти выражения (7) могут быть сведены к суммам:

$$L_n^\pm \cong \frac{1}{2\pi i} \frac{1+i}{2q^5} \sqrt{\frac{\pi}{(kx_0)^3}} k^{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{ikhx_0 m(1 \pm \sin \vartheta)}}{\sqrt{m^3}}.$$

Значения величины λ , обозначенные индексом j , определяются уравнением $\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5 = 0$. Расчеты интегралов J_n

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^n \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} d\lambda.$$

приведены в работе [4].

После определения коэффициентов C_0 и C_1 можно перейти к оценке интеграла (5). Перепишем его, сделав некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{C_0 + C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{1}{1 - e^{ix_0(\lambda - k \sin \vartheta)}} d\lambda - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} \frac{C_0 + C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{1}{1 - e^{ix_0(\lambda - k \sin \vartheta)}} d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти интегралы можно взять методом вычетов, замкнув исходный контур Γ бесконечной полуокружностью. При этом контур первого из интегралов (8) нужно замкнуть по верхней полуокружности ($J_m \lambda > 0$), а контур второго интеграла — по нижней полуокружности ($J_m \lambda < 0$). Тогда потенциал Φ будет равен сумме вычетов на плоскости λ плюс интегралы по разрезам (фиг. 2). Точное решение будет содержать вычеты в полюсах λ_j и в полюсах λ_n , расположенных на всей вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Однако часть этих вычетов (в полюсах λ_j и $|\lambda_n| > k$) представляет поверхностные волны, не вносящие заметного вклада в решение для расстояний $kx > 1$. Обозначим сумму всех этих вычетов, описывающих поверх-

ностные волны, следующим образом: $Q = \sum_j R_j(\lambda_j) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\lambda_n)^*$. Рас-

пространяющиеся волны соответствуют вычетам в полосах λ_n , расположенных на отрезке $-k < \lambda < +k$. Можно показать, что сумма двух интегралов по разрезам описывает поле, быстро убывающее с увеличением расстояния от пластины. Таким образом, отбросив поверхностные волны, решение можно написать в виде конечной суммы распространяющихся плоских волн:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{i}{x_0} \left[\sum_{n=-s}^u \frac{C_0 + C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \Big|_{\lambda = k \sin \vartheta + 2n\pi/x_0} - \right. \\ & \left. - \sum_{n=-(s+1)}^{-t} \frac{C_0 + C_1 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} (\lambda^4 - k_0^4) - q^5} e^{i\lambda x + y\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \Big|_{\lambda = k \sin \vartheta + 2n\pi/x_0} \right]; \end{aligned}$$

$$s = E \left[\frac{kx_0}{2\pi} \sin \vartheta - 1 \right]; **$$

$$u = E \left[\frac{kx_0}{2\pi} (1 - \sin \vartheta) - 1 \right];$$

$$t = E \left[\frac{kx_0}{2\pi} (1 + \sin \vartheta) - 1 \right].$$

Число распространяющихся волн определяется параметром kx_0 , т. е. отношением расстояния между ребрами к длине падающей волны. Все плоские волны, составляющие решение, группируются около зеркально отраженной волны, существующей при любых kx_0 .

Коэффициенты C_0 и C_1 являются характеристиками влияния ребер на отраженную волну. Поэтому представляет интерес исследование этих коэффициентов. Прежде всего следует отметить, что для тонких пластин,

* Значение u см. дальше.

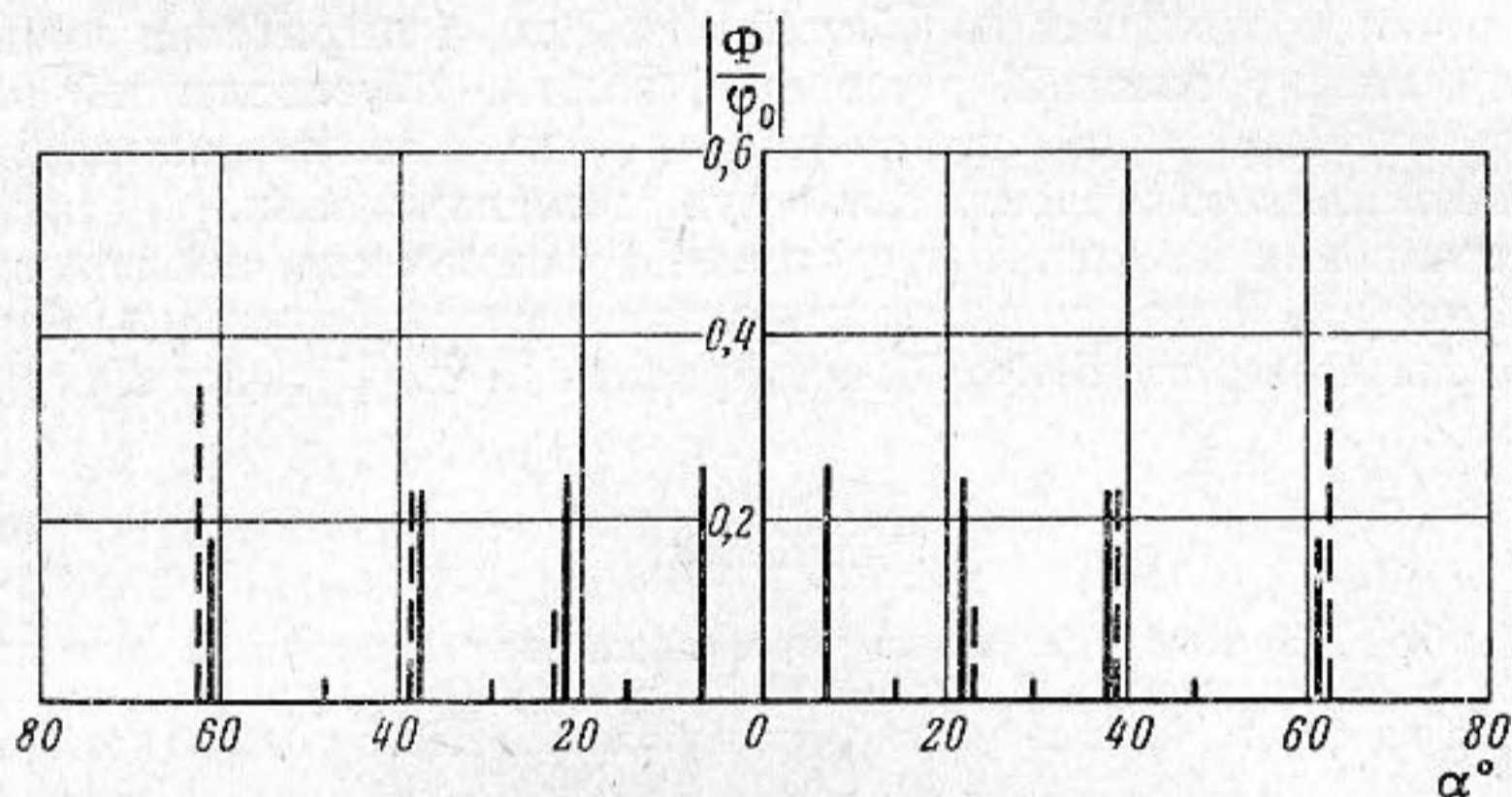
** Символ E обозначает ближайшее большее целое число по отношению к выражению, стоящему в квадратных скобках.

когда отношение толщины пластины к длине изгибной волны $\frac{H}{\lambda u} < 0,1$, формулы (6) для C_0 и C_1 существенно упрощаются:

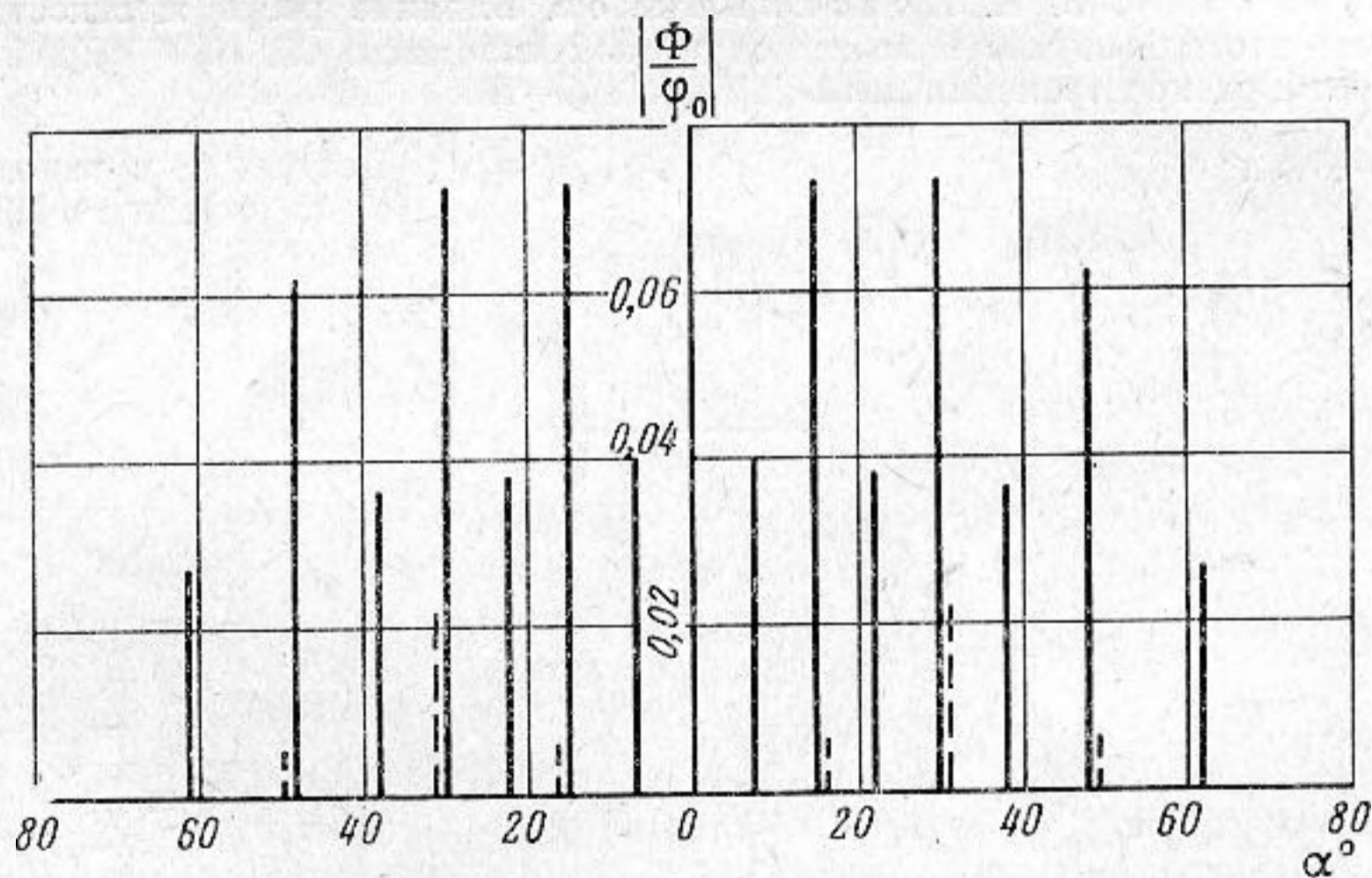
$$C_0 = - \frac{ik \cos \vartheta (1 - V)}{J_3 \frac{2D}{\omega Z_F} + J_0 - S_{-1} - T_{-1} - (L_0^+ + L_0^-)} ;$$

$$C_1 = - \frac{ik^2 \cos \vartheta \sin \vartheta (1 - V)}{J_3 \frac{2D}{\omega Z_M} + J_2 - S_{+1} - T_{+1} - (L_2^+ + L_2^-)} .$$
(9)

Выражения (9) по виду совпадают с выражениями C_0 и C_1 для пластины с одним ребром [4]. Отличием является лишь то, что в знаменателе выражений (9) есть члены S_n , T_n и L_n^\pm , отсутствующие в формулах C_0 и



Фиг. 3



Фиг. 4

C_1 для пластин с одним ребром. Члены $S_{\pm n}$ и $T_{\pm n}$ описывают влияние ребер друг на друга, обусловленное упругими колебаниями пластины, а члены типа L_n характеризуют влияние ребер друг на друга, обусловленное распространением волн в жидкости. Расчеты показывают, что с уменьшением толщины пластины и с увеличением расстояния между ребрами роль членов L_n уменьшается.

Зависимость потенциала Φ от импедансов Z_F и Z_M имеет явно выраженный резонансный характер; острота резонанса зависит от толщины

пластины. Произведенные расчеты показывают, что при оценке влияния ребер жесткости на рассеяние от упругой пластины звуковой волны не всегда можно заменять ребра жесткости абсолютно жесткими опорами ($Z_F = Z_M = i\infty$). Существенную роль играет также учет изгибного импеданца ребер, особенно при больших углах падения волны на пластину.

На фиг. 3 приведена характерная угловая зависимость потенциала рассеянной волны Φ для частоты $f = 5$ кгц, толщины стальной пластины $H = 0,5$ см и расстояния между ребрами $x_0 = 120$ см. По оси ординат отложена амплитуда плоской волны, рассеянной в обратном направлении, отнесенная к амплитуде падающей волны, по оси абсцисс угол падения α_0 . При выбранной частоте для ребер, расположенных на расстоянии 120 см друг от друга, при изменении угла падения от 0 до 90° есть семь возможных значений Φ , при которых волна рассеивается в обратном направлении.

Амплитуда рассеянной волны на фиг. 3 изображена в виде двойных линий. Сплошная линия означает амплитуду плоской волны, возникшей из-за наличия продольных колебаний в ребрах, а штриховая линия показывает амплитуду плоской рассеянной волны, обусловленной наличием изгибных колебаний в ребрах. Импеданцы Z_F и Z_M взяты такими, чтобы получить максимальное значение амплитуд рассеянных волн.

Для сравнения на фиг. 4 представлена зависимость, аналогичная приведенной на фиг. 3, но величины импеданцев взяты бесконечно большими.

Автор выражает глубокую благодарность В. Н. Красильникову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Рыбак. Прохождение звука через периодически неоднородную пластину в жидкости. Акуст. ж., 1962, 8, 1, 113—118.
2. Е. А. Шендеров. Прохождение звуковой волны через тонкую пластину с промежуточными опорами. Акуст. ж., 1963, 9, 3, 359—367.
3. Д. П. Коузов. О явлении резонанса при дифракции гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине. Прикл. мат. и мех., 1964, 28, 3, 409—417.
4. И. П. Коновалюк, В. Н. Красильников. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины. Сб. ЛГУ «Проблемы дифракции и распространения волн», 1965, 4, 149—165.

Ленинград

Поступила в редакцию
24 апреля 1967 г.