

УДК 534.833.524

## ИЗОЛЯЦИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

*В. Т. Ляпунов*

Рассматривается происхождение волны изгиба бесконечной пластины через произвольное препятствие. Составлены общие граничные условия, в которых препятствие характеризуется его податливостями и динамическими жесткостями по отношению к моментам и усилиям, действующим на кромках пластины. Показывается, что полученное решение успешно описывает известные виброизолирующие свойства ребер жесткости, упругих прокладок и шарнирных соединений. Эффективность приведенных формул иллюстрируется на примере исследования виброизолирующих свойств фланцевого соединения, включающего упругую прокладку.

Высокая эффективность виброизолирующих устройств как средства уменьшения изгибных колебаний инженерных конструкций привлекает к ним внимание многих исследователей. Это привело к разработке различных конструкций, которые обеспечивают уменьшение амплитуды изгибных колебаний [1—4] (виброизолирующие массы, упругие прокладки, препятствия резонансного типа, шарнирные соединения и т. д.).

Уже в работе [1], впоследствии уточненной Л. Я. Гутиным, теоретическое решение задачи о виброизолирующих массах в одномерном вибропроводе предусматривало возможность его использования для других препятствий (с известными механическими сопротивлениями  $Z_F$  и  $Z_M$  по отношению к силе и моменту), которые не нарушают непрерывности смещений и углов поворота сечений стержня (пластины). Это решение было успешно применено в работе [3] для анализа виброизолирующих свойств резонансных препятствий.

Однако многие конструкции препятствий, например, включающих в себе упругие прокладки, шарнирные соединения и пр., в месте их установки нарушают непрерывность смещений и углов поворота сечений вибропровода. Поэтому приходится для каждого такого препятствия составлять и решать задачу, подобную рассмотренной в работе [1], причем постановка задач и порядок их решения практически одинаковы. Чтобы избежать утомительной однообразности промежуточных выкладок, необходимо иметь решение задачи о виброизолирующих свойствах некоторого произвольного препятствия, из которой решения для каждого конкретного виброизолирующего устройства вытекают бы как частные случаи.

Будем рассматривать прохождение монохроматических волн изгиба через прямолинейное препятствие, расположенное по линии  $x = 0$  на границе двух одинаковых полубесконечных пластин, лежащих в плоскости  $xOy$ . Размер  $2l$  препятствия вдоль оси  $x$  будем предполагать малым по сравнению с длинами изгибных волн в соединяемых пластинах. Кроме того, ограничимся рассмотрением препятствий, симметричных относительно оси  $y$  и, следовательно, относительно нейтральной плоскости пластин, что позволяет пренебречь преобразованием на препятствии изгибных волн в продольные и сдвиговые.

Пусть со стороны отрицательных  $x$  и  $y$  под произвольным углом  $\varphi$  к препятствию распространяется изгибная волна единичной амплитуды  $W = \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)]$ , где  $k_x, k_y$  — компоненты волнового числа  $k_p = 2\pi/\lambda_p$ ,  $\omega, t$  — круговая частота и время. В дальнейшем временной множитель  $\exp(i\omega t)$  для краткости опускаем.

Поле изгибных волн, возникшее в результате отражения препятствием падающей волны, представим в обычном виде:

при  $x \leq -l$

$$W = e^{-ik_y y} [e^{-ik_x(x+l)} + R e^{ik_x(x+l)} + R' e^{k'(x+l)}],$$

при  $x \geq l$

$$W = e^{-ik_y y} [T e^{-ik_x(x-l)} + T' e^{k'(x-l)}], \quad (1)$$

где  $R, T, R'$  и  $T'$  — коэффициенты отражения и прохождения бегущих и неоднородных волн, определяемые из граничных условий на кромках  $x = \pm l$ ,  $k' = \sqrt{k_p^2 + k_y^2}$  — волновое число неоднородных волн.

Анализируя возможные граничные условия для препятствий различных типов, можно показать, что наиболее общие граничные условия для произвольного малого симметричного препятствия имеют вид

$$W_+ - W_- = C_0(Q_+ + Q_-), \quad \frac{\partial W_+}{\partial x} - \frac{\partial W_-}{\partial x} = C_1(M_+ + M_-), \quad (2)$$

$$M_+ - M_- = C_2 \left( \frac{\partial W_+}{\partial x} + \frac{\partial W_-}{\partial x} \right), \quad Q_+ - Q_- = C_3(W_+ + W_-),$$

где  $C_i$  — коэффициенты, зависящие от типа препятствия и характеризующие соответственно его податливости и динамические жесткости по отношению к моментам и силам. Эти коэффициенты отличаются от соответствующих механических проводимостей и сопротивлений множителями  $(i\omega)^{\pm 1}$ . Индексы плюс и минус относятся к сечениям  $x = +l$  и  $x = -l$  соответственно. Изгибающие моменты  $M$  и поперечные усилия  $Q$  на кромках пластин, как известно, выражаются через смещение следующим образом:

$$M = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad Q = D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right], \quad (3)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластин,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

Подставляя выражения (3) и (1) в формулу (2), получим систему четырех уравнений относительно коэффициентов отражения и прохождения. Решение этой системы дает следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения бегущих волн (два других коэффициента представляют меньший интерес и потому не приводятся):

$$R = \frac{1}{1 - iB} - \frac{1}{1 - iA}, \quad T = 1 - \frac{1}{1 - iB} - \frac{1}{1 - iA}, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{k_x [k_p^2(1 + a)\delta - 1]}{C_1 D k_p^2(1 - a) + C_3 \delta / D}, \quad \delta = \frac{C_1 D k_p^2(1 + a) - k'}{k' k_p^2(1 - a) + C_3 / D}, \quad (4a)$$

$$B = \frac{1 + (1 - a)\xi}{\xi k_x C_2 / (D k_p^2) - C_0 k_x k_p^2 D (1 + a)}, \quad \xi = \frac{1 + C_0 D k' k_p^2 (1 - a)}{1 + a + C_2 k' / (D k_p^2)}$$

$$a = (1 - \sigma) k_y^2 / k_p^2 = (1 - \sigma) \sin^2 \varphi.$$

Если препятствие не поглощает энергии падающей волны, то все коэффициенты  $C_i$ , а следовательно, и  $A$  и  $B$  являются вещественными. Не-

трудно убедиться, что в этом случае формулы (4) удовлетворяют закону сохранения энергии, т. е.  $|T|^2 + |R|^2 \equiv 1$ . При практических расчетах виброизоляции важно знать квадрат модуля коэффициента прохождения.

$$|T|^2 = \left[ 1 + \left( \frac{A - B}{1 + AB} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (5)$$

Из последней формулы непосредственно вытекают условия «полной изоляции»  $AB = -1$  и «полного прохождения»  $A = B$ .

Для препятствия, поглощающего часть энергии падающей волны, величины  $A$  и  $B$  становятся комплексными, вследствие комплексности  $c_i$ ,  $A = A_0 + iA_1$  и  $B = B_0 + iB_1$ , тогда вместо формулы (5) мы получим

$$|T|^2 = \frac{(1 + A_0B_0 - A_1B_1)^2 + (A_0B_1 + A_1B_0)^2}{[(1 + A_1)(1 + B_1) - A_0B_0]^2 + [A_0(1 + B_1) + B_0(1 + A_1)]^2}. \quad (6)$$

Из этого выражения следует, что для препятствия с потерями вероятность наступления условия «полной изоляции» мала, так как для него необходимо одновременное равенство нулю обоих слагаемых в числителе (6). Сумма квадратов модулей коэффициентов отражения и прохождения изгибной волны для такого препятствия меньше единицы на величину коэффициента поглощения  $d$ , для которого получаем следующее выражение:

$$d = 2 \left[ \frac{A_1}{A_0^2 + (1 + A_1)^2} + \frac{B_1}{B_0^2 + (1 + B_1)^2} \right]. \quad (7)$$

Приведенные формулы (4) и (5) по внешнему виду соответствуют полученным в работе [5] для виброизоляции ребер жесткости на пластине, а формулы (6) и (7) — полученным в работе [6] для прохождения изгибных волн через упругую прокладку и поглощения ею энергии распространяющейся в пластине изгибной волны. В целях подтверждения полного соответствия необходимо конкретизировать граничные условия (2) для различных типов препятствий и подставить полученные формулы для  $C_i$  в формулу (4а). Составляя указанные граничные условия, получим

а) для ребра жесткости на пластине

$$\begin{aligned} C_0 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2}[GKk_y^2 - \rho I_p \omega^2], \\ C_1 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{2}[EI k_y^4 - \rho S \omega^2], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $GK$  и  $EI$  — жесткости ребра на кручение и изгиб, а  $\rho I_p$  и  $\rho S$  — момент инерции и масса единицы длины ребра соответственно;

б) для упругой прокладки на стыке пластин

$$\begin{aligned} C_0 = -\frac{h_y}{2G_y S_y}, \quad C_2 = 0, \\ C_1 = -\frac{h_y}{2E_y I_y}, \quad C_3 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $G_y S_y$  и  $E_y I_y$  — жесткости единицы ширины прокладки на сдвиг и на изгиб соответственно,  $h_y$  — толщина прокладки в направлении оси  $x$ ;

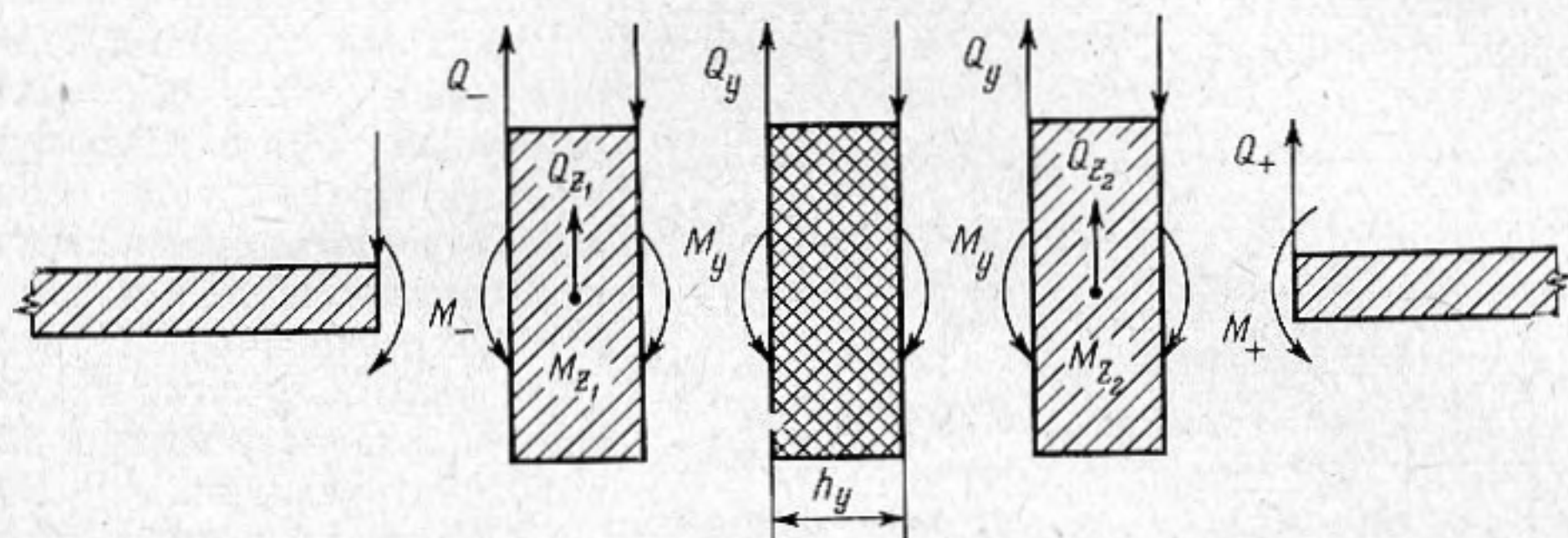
в) для шарнирного препятствия [4] на стыке пластин

$$\begin{aligned} C_0 = -\frac{(2l)^2}{2[GKk_y^2 - \rho I_p \omega^2]}, \quad C_1 = \infty, \\ C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{2}[EI \cdot k_y^4 - \rho S \omega^2], \end{aligned}$$

где  $2l$  — расстояние между осями шарниров.

Нетрудно убедиться, что подстановка приведенных значений коэффициентов  $C_i$  в формулы (4а) и (4) приводит к соответственным известным выражениям коэффициентов отражения и прохождения изгибных волн пластины через ребро жесткости [5], упругую прокладку [6] и шарнирное препятствие [4].

Рассмотренные известные препятствия относительно просты по конструкции. Для иллюстрации эффективности полученного решения исследуем с его помощью виброизолирующие свойства более сложного препятствия.



Фиг. 1

Известно, что в целях повышения прочности и жесткости соединений, включающих в себя упругие прокладки, применяются фланцы, влияние которых на виброизолирующие свойства прокладок не исследовалось.

Рассмотрим изоляцию изгибных волн пластины упругой прокладкой, заключенной между двумя одинаковыми фланцами, приваренными к торцам полубесконечных пластин. Фланцы будем предполагать абсолютно твердыми, обладающими механическими сопротивлениями массы, прокладку невесомой, т. е. чистой гибкостью. Возможность обобщения на случай реальных фланцев и прокладки будет очевидна из дальнейшего. Для краткости ограничимся случаем нормального падения волны на препятствие.

Схема усилий, действующих на контактных поверхностях прокладки, фланцев и пластин (фиг. 1), помогает составить граничные условия, из которых определяются коэффициенты  $C_i$ . Из этой схемы имеем следующие условия динамического равновесия фланцев:

$$Q_- + Q_{z1} - Q_y = 0, \quad Q_y + Q_{z2} - Q_+ = 0, \quad (10)$$

$$M_- + M_{z1} - M_y = 0, \quad M_y + M_{z2} - M_+ = 0,$$

где  $Q_y, M_y$  — сдвигающее усилие и изгибающий момент в поперечных сечениях прокладки,  $Q_{zi}, M_{zi}$  — реактивные усилие и момент фланцев. В общем случае  $Q_y, M_y, Q_{zi}, M_{zi}$  зависят от типа прокладки и конструкции фланцев, — применительно к допущениям рассматриваемой задачи (о невесомости прокладки и жесткости фланцев) можно записать следующие выражения для этих усилий и моментов:

$$Q_y = -(W_+ - W_-) \frac{G_y S_y}{h_y}, \quad M_y = - \left( \frac{\partial W_+}{\partial x} - \frac{\partial W_-}{\partial x} \right) \frac{E_y I_y}{h_y}, \quad (11)$$

$$Q_{zi} = \omega^2 m_\phi W_i, \quad M_{zi} = \omega^2 m_\phi r_\phi^2 \frac{\partial W_i}{\partial x},$$

где  $m_\phi r_\phi^2$  — масса и радиус инерции одного фланца.

Предполагая, что размер фланца в направлении оси  $x$  (т. е. его толщина) мал по сравнению с длинами изгибных волн в соединяемых пластинах, считаем  $W_1 = W_-$ , а  $W_2 = W_+$ . Подставив величины (11) в условия

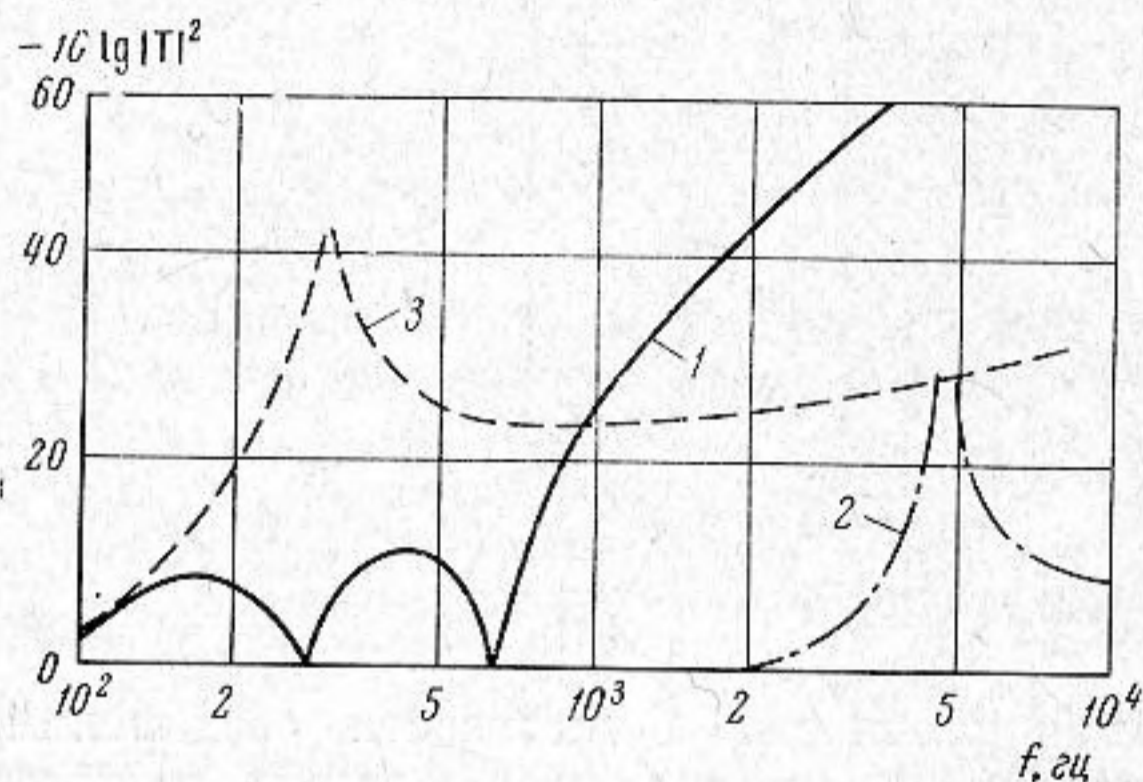
(10), нетрудно привести их к виду (2), принятому в начале статьи, и найти коэффициенты  $C_i$ :

$$C_0 = \left( \omega^2 m_\phi - \frac{2G_y S_y}{h_y} \right)^{-1}, \quad C_1 = \left( \omega^2 m_\phi r_\phi^2 - \frac{2E_y I_y}{h_y} \right)^{-1}, \quad (12)$$

$$C_2 = \omega^2 m_\phi r_\phi^2, \quad C_3 = \omega^2 m_\phi,$$

которые вместе с формулами (4) и (4а) дают решение поставленной задачи.

Формулы (12) при отсутствии прокладки между фланцами ( $h_y = 0$ ) переходят в формулы (8) ( $k_y = 0$  вследствие нормального падения волны



Фиг. 2

на препятствие,  $\rho S = 2m_\phi$ ,  $\rho I_p = 2m_\phi r_\phi^2$ ), т. е. дают решение о прохождении волны изгиба через виброизолирующую массу. При невесомых фланцах ( $m_\phi = 0$ ) из формулы (12) получаем выражение (9), т. е. решение для упругой прокладки.

Результаты расчета коэффициента прохождения изгибных волн через фланцевое соединение стержней, включающее в себя упругую прокладку, представлены на фиг. 2, 1. Расчет проведен

для стальных стержней толщиной 4 мм при следующих параметрах фланцев и прокладки:  $m_\phi = 110$  г/см,  $r_\phi^2 = 46$  см<sup>2</sup>,  $G_y S_y = 6,6 \cdot 10^8$  дн/см,  $h_y = 1$  см,  $E_y I_y = 5 \cdot 10^9$  дн/см. Для сопоставления там же приведены расчетные графики для виброизоляции упругой прокладки 2 при невесомых фланцах и для виброизоляции фланцев при отсутствии прокладки между ними 3. Сравнение показывает, что массивные фланцы значительно увеличивают виброизолирующий эффект упругой прокладки, причем на частотах выше 1000 гц эффективность исследуемого препятствия превышает также виброизолирующий эффект фланцев без упругой прокладки между ними, в то время как на частотах ниже 1000 гц наблюдаются две частоты «полного прохождения», что обусловлено сдвиговым и изгибным резонансами препятствия как двухмассовой системы с упругостью. Тем не менее и на этих частотах исследуемое препятствие имеет преимущества перед виброизолирующими массами, так как позволяет обеспечить поглощение значительной части энергии падающей волны в самом препятствии при применении для прокладки материалов с большими внутренними потерями, что очень важно при виброизоляции ограниченных конструкций.

Приведенные результаты показывают наглядно применимость полученных формул к решению задач о виброизолирующих свойствах самых разнообразных препятствий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Б р е х о в с к и х. Распространение волн изгиба по пластинкам. Ж. техн. физ., 1944, 14, 9.
2. L. C r e m e r. Calculations of sound propagation in structures. Acustica, 1953, 3, 5, 317—335.
3. И. И. К л ю к и н. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем. Акуст. ж., 1960, 6, 2, 213—219.
4. В. Т. Л я п у н о в. Виброизоляция шарнирных соединений. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 235—240.
5. E. E. U n g a r. Transmission of plate-flexural waves through reinforcing beams. J. Acoust. Soc. America, 1961, 33, 5, 633—640.
6. В. Т. Л я п у н о в, Г. Я. С а в о л а й н е н. Прохождение изгибных волн через упругую прокладку, расположенную на стыке пластин. Акуст. ж., 1968, 14, 4, 617—619.

Ленинград

Поступила в редакцию  
19 июля 1967г.