

УДК 534.833.524

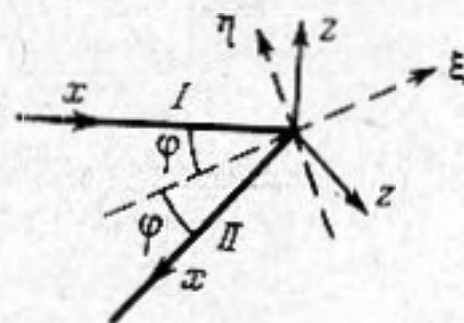
ОТРАЖЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ ОТ УГЛОВОГО СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИН

В. П. Маслов

Рассмотрено отражение наклонно падающей изгибной волны от линии соединения двух полубезграничных пластин, жестко соединенных под разными углами. Показано, что продольные и поперечные волны, возникающие при отражении, обуславливают появление направлений полного прохождения и полного отражения и сильную зависимость коэффициента отражения от частоты.

Вопрос о проникновении вибраций через угловое соединение пластин представляет большой интерес, так как это соединение встречается повсеместно в инженерных конструкциях. В работах [1—4] рассмотрено прохождение изгибных и продольных волн через стык двух стержней, соединенных под разными углами. Эта задача эквивалентна задаче о нормальном падении плоской волны на угловое соединение полубезграничных пластин. Однако случай нормального падения не дает полного представления об отражающей способности углового соединения, так как коэффициент отражения сильно зависит от угла падения. Ниже рассматривается задача об отражении плоской изгибной волны, падающей под произвольным углом на стык двух полубезграничных пластин, жестко соединенных между собой под разными углами. Пусть две тонкие полубезграничные пластины одинаковой толщины и выполненные из одинакового материала плотности ρ жестко соединены между собой под углом 2φ (фиг. 1). Расположим ось y вдоль линии соединения, ось x свяжем с пластинами так, что пластине I отвечает $x \leq 0$, а пластине II — $x \geq 0$. Ось z пусть будет направлена нормально поверхностям каждой из пластин, так что две полуплоскости $z = 0$ при $x \leq 0$ и $z = 0$ при $x \geq 0$ совпадают с нейтральными плоскостями пластин. Тогда смещения точек нейтральных плоскостей u_x и u_y будет характеризовать продольные и поперечные волны, а смещение u_z — изгибные. Выделим из полного поля падающую плоскую изгибную волну

$$u_z(x) = Ae^{ik_x x} \quad (1)$$



Фиг. 1

где $-\infty \leq x \leq \infty$, $k_x = k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta$. k — волновое число падающей волны, θ — угол падения. Тогда вторичное поле u^I в пластине I и u^{II} в пластине II при $|x| \rightarrow \infty$ будет представлять собой уходящие от соединения волны. Граничные условия при жестком соединении пластин имеют вид

$$u^I(0) = u^{II}(0), \quad \alpha^I = \alpha^{II}, \quad F^I + F^{II} = 0, \quad M^I + M^{II} = 0, \quad (2)$$

где F^I , M^I и F^{II} , M^{II} — амплитуды сил и моментов сил, действующих на пластину I и II соответственно, $\alpha^I = [u_z^I(0)]_{x^I}$, $\alpha^{II} = [u_z^{II}(0)]_{x^{II}}$ — амплитуды угла поворота края пластин I и II.

* Рассматриваются гармонические колебания, и поскольку система однородна по времени и координате y , множитель $\exp(-i\omega t + ik_y y)$ можно опустить.

Расположим вспомогательную ортогональную систему координат (ξ, y, η) так, чтобы ось ξ делила угол между пластинами пополам (фиг. 1). Соединение симметрично относительно плоскости $(\xi, y, 0)$, и, поле, возбужденное падающей волной, распадается на два линейно независимых — симметричное и антисимметричное. Следовательно, коэффициент отражения однородной изгибной волны можно написать в виде $V = V_c + V_a$, где V_c , V_a — коэффициенты отражения для симметричных и антисимметричных колебаний соответственно. Коэффициент прохождения однородной изгибной волны будет при этом иметь вид $T = 1 + V_c - V_a$. Симметричное вторичное поле возбуждается смещением $u_z(0)$ падающей волны, а антисимметричное вторичное поле возбуждается перерезывающими силами $F_{\text{пер}}^I$ и $F_{\text{пер}}^{II}$ ($-F_{\text{пер}}^I = F_{\text{пер}}^{II}$) падающей волны, где $F_{\text{пер}}^I$ действует со стороны пластины I , а $F_{\text{пер}}^{II}$ действует со стороны пластины II . Симметричное вторичное поле должно удовлетворять следующим равенствам:

$$u_{\xi}^I(x) = u_{\xi}^{II}(-x), \quad u_y^I(x) = u_y^{II}(-x), \quad u_{\eta}^I(x) = -u_{\eta}^{II}(-x), \\ \alpha^I + \alpha^{II} = 0, \quad F_{\xi}^I = F_{\xi}^{II}, \quad F_y^I = F_y^{II}, \quad F_{\eta}^I = -F_{\eta}^{II}, \quad M^I + M^{II} = 0. \quad (4)$$

Сравнение равенств (4) и граничных условий (2) дает граничные условия для симметричных колебаний:

$$u_{\eta}^I(0) = 0, \quad F_{\xi}^I = 0, \quad F_y^I = 0, \quad \alpha^I = 0. \quad (5)$$

Колебания границы вдоль координаты ξ должны удовлетворять системе двух уравнений:

$$u_{\xi}^I(0) = \frac{u_z(0) - u_z^I(0)}{\sin \varphi} = \frac{u_x^I(0)}{\cos \varphi}, \quad F_{\xi}^I = F_z^I \sin \varphi + F_x^I \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

при выполнении условий (5).

Антисимметричное поле удовлетворяет следующим равенствам:

$$u_{\xi}^I(x) = -u_{\xi}^{II}(-x), \quad u_y^I(x) = -u_y^{II}(-x), \quad u_{\eta}^I(x) = u_{\eta}^{II}(-x), \\ \alpha^I = \alpha^{II}, \quad F_{\xi}^I + F_{\xi}^{II} = 0, \quad F_{\eta}^I = F_{\eta}^{II}, \quad M^I = M^{II}, \quad F_y^I + F_y^{II} = 0. \quad (7)$$

Сравнение равенств (7) и граничных условий (2) дает граничные условия для антисимметричных колебаний

$$u_{\xi}^I(0) = 0, \quad u_y^I(0) = 0, \quad F_{\eta}^I = 0, \quad M^I = 0. \quad (8)$$

Колебания вдоль координаты η должны удовлетворять системе уравнений:

$$u_{\eta}^I(0) = \frac{u_z^I(0)}{\cos \varphi} = -\frac{u_x^I(0)}{\sin \varphi}, \quad F_{\eta}^I = F_z^I \cos \varphi - F_x^I \sin \varphi + F_{\text{пер}}^I \cos \varphi = 0 \quad (9)$$

при выполнении условий (8).

Определим теперь величины типа податливостей и жесткостей, характеризующие реакцию полубезграничной пластины на силы и моменты сил, действующие на границе

$$C_{\xi\xi} = F_z^I / u_z^I(0) \quad \text{при условии } \alpha^I = 0, \quad J_{\xi\xi} = u_z^I(0) / F_z^I \\ \text{при условии } M^I = 0, \quad C_{\eta\eta} = F_x^I / u_x^I(0), \quad \text{при условии } u_y^I = 0, \\ J_{\eta\eta} = u_x^I(0) / F_x^I \quad \text{при условии } F_y^I = 0. \quad (10)$$

Напомним, что величины, характеризующие поле, прямо пропорциональны множителю $\exp(-i\omega t + ik_y y)$, но податливости и жесткости, как их отношения, не зависят от t и y . Несложные вычисления дают следующие выра-

жения для податливостей и жесткостей полубезграничной пластины:

$$C_{tt} = -\frac{2\gamma/k^2}{1/ik_x + 1/k_x}, \quad C_{nn} = -\frac{-ik_{tx} \cdot \gamma}{k_y^2 + k_{lx}k_{tx}}$$

$$J_{tt} = -\frac{2k^6/\gamma}{ik_x [k^2 + k_y^2(1-\sigma)]^2 + k_x^1 [k^2 - k_y^2(1-\sigma)]^2}, \quad (11)$$

$$J_{nn} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{ik_{lx}k_t^4}{4k_y^2k_{lx}k_{tx} + (k_{tx}^2 - k_y^2)^2},$$

где $k_x^1 = \sqrt{k^2 + k_y^2}$ — x -компонента волнового числа неоднородной волны, σ — коэффициент Пуассона, k_t и k_l — волновые числа поперечной и продольной волн, $k_{tx} = \sqrt{k_t^2 - k_y^2}$ и $k_{lx} = \sqrt{k_l^2 - k_y^2}$ — x -компоненты волновых чисел поперечной и продольной волн, $\gamma = \omega^2 \rho h = Dk^4$, ρ — плотность, D — цилиндрическая жесткость. Подстановка величин (11) в системы (6) и (9) приводит к следующим выражениям для безразмерной амплитуды смещения линии соединения A_c для симметричных колебаний и безразмерной амплитуды перерезывающей силы A_a изгибных антисимметричных колебаний для пластины I .

$$A_c = \frac{u_z^I(0)}{u_z(0)} = -\frac{C_{tt}^{-1}}{C_{tt}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi \cdot J_{nn}}; \quad A_a = \frac{-F_z^I}{F_{\text{пер}}^I} = \frac{J_{tt}^{-1}}{J_{tt}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi \cdot C_{nn}}. \quad (12)$$

Введем дополнительные обозначения:

$$C_{tt}^{-1} = J_{t0} + J_{tH}, \quad J_{tt}^{-1} = C_{t0} + C_{tH}, \quad (13)$$

где символами J_{t0} , C_{t0} обозначены мнимые части, а символами J_{tH} , C_{tH} — действительные части выражений C_{tt}^{-1} и J_{tt}^{-1} . Из условия $\alpha^I = 0$ для симметричного поля следует равенство $-ik_x u_{z0}^I + k_x^1 u_{zH}^I = 0$, где $u_{z0}^I \cdot u_{zH}^I$ — амплитуды однородной и неоднородной волн на границе. Отсюда $u_{z0}^I / u_z^I(0) = C_{tt} \cdot J_{t0}$ и коэффициент отражения для симметричного поля

$$V_c = \frac{u_{z0}^I}{u_z(0)} = A_c \frac{u_{z0}^I}{u_z^I(0)} = -\frac{J_{t0}}{C_{tt}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi \cdot J_{nn}}. \quad (14)$$

Из условия $M^I = 0$ для антисимметричных колебаний следует равенство $F_{z0}^I / ik_x [k^2 + k_y^2(1-\sigma)]^2 = F_{zH}^I / k_x^1 [k^2 - k_y^2(1-\sigma)]^2$, где F_{z0}^I и F_{zH}^I — перерезывающие силы для однородной и неоднородной изгибных волн соответственно. Отсюда $F_{z0}^I / F_z^I = C_{t0} J_{tt}$ и, следовательно, коэффициент отражения для антисимметричного поля имеет вид

$$V_a = \frac{u_{z0}^I}{u_z(0)} = -\frac{F_{z0}^I}{F_{\text{пер}}^I} = A_a \cdot \frac{F_{z0}^I}{F_z^I} = \frac{C_{t0}}{J_{tt}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi \cdot C_{nn}}. \quad (15)$$

Окончательно мы получаем следующее выражение для коэффициента отражения однородной изгибной волны:

$$V = -\frac{J_{t0}}{C_{tt}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi \cdot J_{nn}} + \frac{C_{t0}}{J_{tt}^{-1} + \text{tg}^2 \varphi \cdot C_{nn}}. \quad (16)$$

Величина γ , входящая в выражения для податливостей и жесткостей, сокращается, и коэффициент отражения будет зависеть от отношений трех размерных величин k , k_l , k_t

$$\frac{k_l}{k} = \sin \theta_l, \quad \frac{k_t}{k} = \sin \theta_t, \quad (17)$$

где θ_l и θ_t — углы совпадения следа падающей волны с длинами продольной и поперечной волн соответственно. Таким образом, коэффициент отражения является функцией четырех углов: $V(\varphi, \theta, \theta_l, \theta_t)$. Углы θ_l и θ_t связаны соотношением $\sin \theta_l = \sin \theta_t \sqrt{(1 - \sigma) / 2}$. Угол совпадения для продольной волны выражается через частоту f и параметры пластин $\sin \theta_l = (\pi f h / \sqrt{3} c_l)^{1/2}$, где c_l — скорость продольной волны в пластине.

Рассмотрим отражение при различных углах соединения пластин.

а) $2\varphi = \pi$, $V \equiv 0$. б) $\text{tg}^2 \varphi \gg 1$. В этом случае $C_{tn} + \text{tg}^2 \varphi \cdot C_{nn} \gg C_{t0}$ и $V_a \approx 0$. Основную роль играют симметричные колебания: $V \approx V_c$. Условие полного отражения $J_{tn} + \text{tg}^2 \varphi \cdot J_{nn} = 0$ может выполняться только при $\theta > \theta_l$. При $\sin^2 \theta \gg \sin^2 \theta_l$ это условие упрощается:

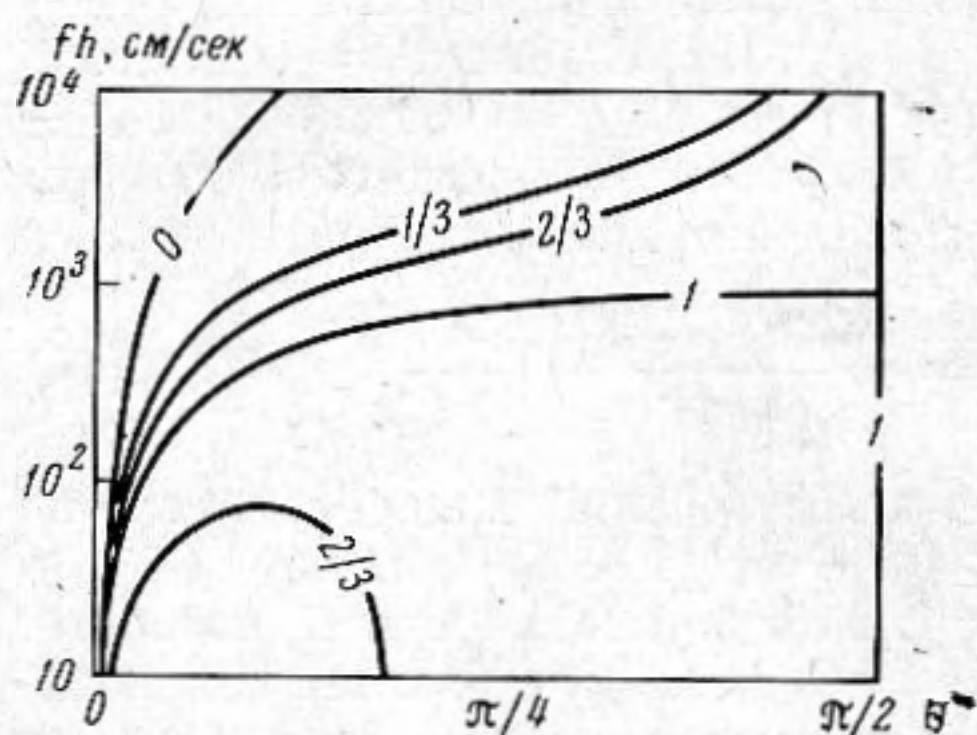
$$\sin^2 \theta_l \cdot \text{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + \sigma) \sin \theta}{2 \sqrt{1 + \sin^2 \theta}} \quad (18)$$

Максимальная частота, при которой возможно полное отражение, зависит от угла соединения пластин следующим образом:

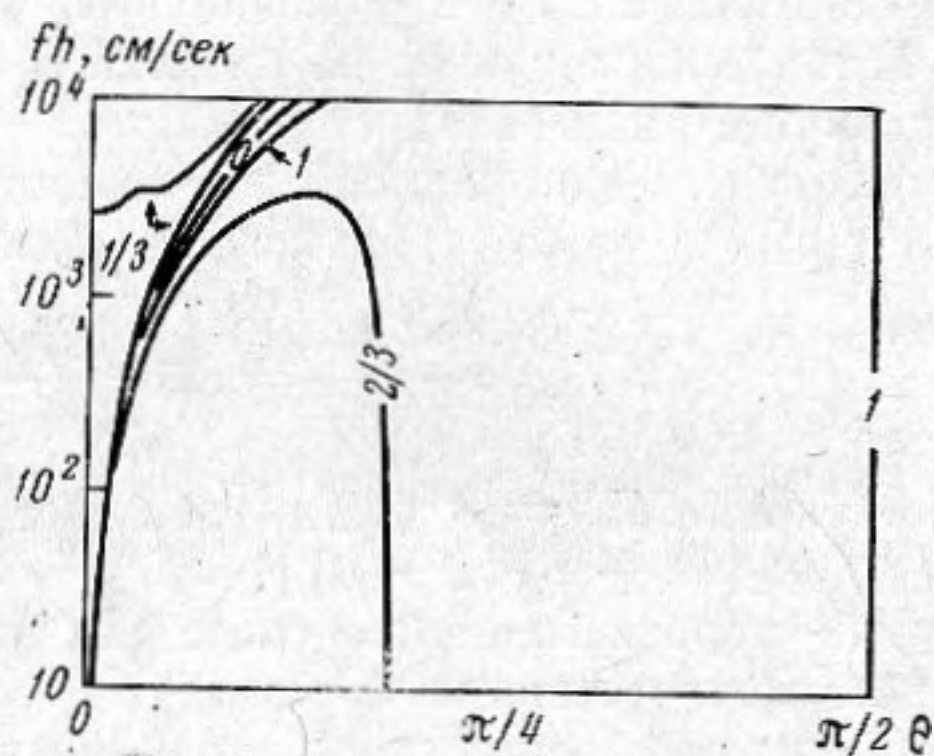
$$f_{\max} = \frac{\sqrt{1,5(1 - \sigma^2)} c_l}{4\pi h \text{tg}^2 \varphi} \quad (19)$$

Условие полного прохождения $J_{nn} = \infty$, или $4k_y^2 k_{tx} k_{ty} + (k_{tx} - k_y^2)^2 = 0$, является дисперсионным уравнением рэлеевской волны в пластине. Таким образом, полное прохождение обусловлено условием совпадения следа падающей волны с длиной рэлеевской волны. Незначительное отличие угла полного прохождения от угла совпадения для рэлеевской волны θ_r на высоких частотах обусловлена влиянием антисимметричных колебаний.

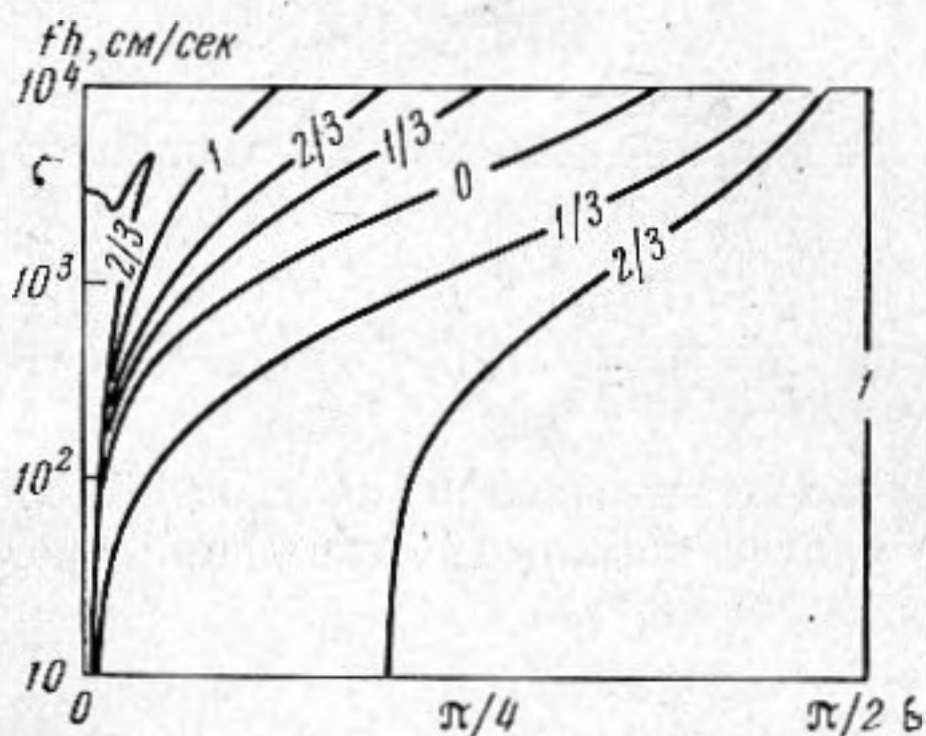
На фиг. 2 для случая $2\varphi = 0,9\pi$, $c_l = 5$ км/сек, $\sigma = 0,31$, на плоскости $(fh$ см/сек, θ) нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений: 0; $1/3$; $2/3$; 1.



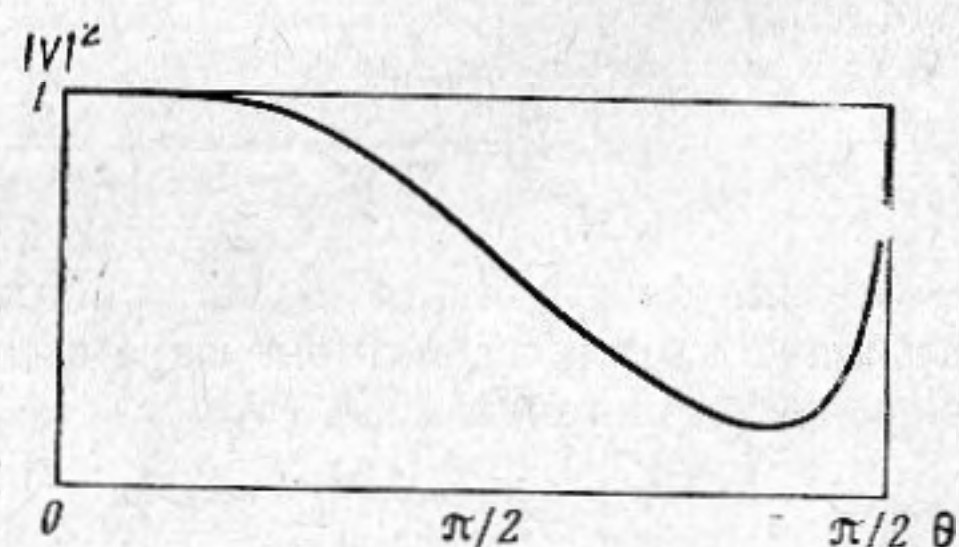
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для углов падения $\theta < \theta_r$ величина $|V|^2$ быстро уменьшается с повышением частоты. Для углов падения $\theta > \theta_r$ коэффициент отражения по энергии с повышением частоты возрастает и достигает значения 1, а затем быстро уменьшается. Так, при наличии слабых изломов пластины изгибная волна на низких частотах будет испытывать сильное рассеяние.

в) $\text{tg}^2 \varphi = 1$, $c_l = 5$ км/сек, $\sigma = 0,31$. Для этого случая на фиг. 3 на плоскости (fh см/сек, θ) нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений: 0, $1/3$; $2/3$; 1. Здесь определяющее влияние также оказывают симметричные колебания. Углы полного прохождения и полного отражения располагаются близко друг от друга и разделяют две характерные области слабого и сильного отражения. Для углов падения $\theta < \theta_r$ коэффициент отражения по энергии с повышением частоты уменьшается, а для углов падения $\theta > \theta_r$ — увеличивается.

г) $\text{tg}^2 \varphi \ll 1$. В этом случае величина $\text{tg}^2 \varphi \cdot J_{nn} \approx 0$ и коэффициент отражения для симметричных колебаний не зависит от частоты. Антисимметричные колебания определяют зависимость коэффициента отражения V от частоты. Полное прохождение обусловлено компенсацией симметричных и антисимметричных отраженных изгибных волн. Угол полного прохождения определяется уравнением

$$\frac{J_{tn}}{J_{t0}} = \frac{C_{tn} + \text{tg}^2 \varphi C_{nn}}{C_{t0}}. \quad (20)$$

Угол полного отражения лежит в окрестности углов θ_l и θ_r . На фиг. 4 для случая $2\varphi = 0,1\pi$, $c_l = 5$ км/сек, $\sigma = 0,31$, на плоскости (fh см/сек, θ) нанесены линии уровня $|V|^2$ для значений: 0, $1/3$; $2/3$; 1. С повышением частоты угол полного прохождения быстро увеличивается.

д) $\text{tg} \varphi = 0$. Пластины полностью сложены. Коэффициент отражения не зависит от частоты и параметров пластины. На фиг. 5 нанесены значения $|V|^2$ в зависимости от угла падения. Коэффициент отражения нигде не обращается в нуль. Минимум коэффициента отражения смещен в сторону больших углов падения. Для малых углов раскрытия пластин для каждой частоты существует некоторый максимальный угол раскрытия φ_{\max} , определяемый уравнением (20) при $k_y = k$, или

$$\text{tg}^2 \varphi_{\max} = \frac{(3 + \sigma)\sigma^2 \pi^2 fh}{4 \sqrt{6} c_l}, \quad (21)$$

меньше которого не существует направления полного прохождения. Это объясняется тем, что условие полного прохождения (21) для $\varphi < \varphi_{\max}$ удовлетворяется для значений $k_y < k$ и становится дисперсионным уравнением краевой волны. При $\varphi = 0$ это дисперсионное уравнение совпадает с дисперсионным уравнением изгибной краевой волны рэлеевского типа [5].

Таким образом, при отражении изгибной волны от углового соединения продольные и поперечные волны, возникающие при отражении, обуславливают появление направлений полного прохождения и полного отражения и сильную зависимость коэффициента отражения от частоты.

Автор благодарит А. В. Римского-Корсакова и М. Д. Генкина за постановку задачи и ценные замечания по предмету настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Kurtze, K. Tamm, S. Vogel. Modellversuche zur Biegewellendämmung an Ecken. *Acustica*, 1955, 5, 223—229.
2. M. L. Exner. Schalldämmung durch Gummi- und Stahlfedern. *Acustica*, 1955, 2, 213—218.
3. С. В. Будрин, А. С. Никифоров. Прохождение волн через различные соединения пластин. *Акуст. ж.*, 1963, 9, 4, 408—412.
4. Л. Н. Комарова. Акустика тонких стержней (дипломная работа). Акустический институт АН СССР, 1965.
5. Ю. К. Коненков. Об изгибной волне рэлеевского типа. *Акуст. ж.*, 1960, 6, 1, 124—126.

Государственный н.-и. институт машиноведения
Москва

Поступила в редакцию
18 августа 1967 г.