

УДК 534.222

ТЕОРИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ОКОЛО ОЧЕНЬ МАЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ

Е. П. Медников

Излагается теория акустических течений, возникающих около сферических препятствий с радиусом $r \ll \delta$, где δ — толщина акустического пограничного слоя. При выводе функции тока акустического течения используется условие квазистационарности колебательного потока, позволяющее отыскать эту функцию исходя из уточненного решения для осевой функции тока, порознь для малых и больших расстояний от сферы. В отличие от случая $r \gg \delta$ конфигурация линий тока течения зависит от амплитуды колебательной скорости, но не зависит, как и скорость течения (для фиксированных сфер), от частоты колебаний.

Всякое инородное тело, будучи помещено в звуковое поле, как известно, становится центром стационарных вихревых потоков, именуемых акустическим течением. Это явление, впервые описанное Карьером [1] и Андраде [2], впоследствии явилось предметом ряда обстоятельных теоретических и экспериментальных исследований [3—10], кратко рассмотренных в недавно вышедшей монографии [11], посвященной нелинейным явлениям акустики. Во всех цитированных работах авторы исходят из концепции акустического пограничного слоя, в силу которой полученные ими решения ограничены условием: $r \gg \delta$, где r — радиус препятствия, δ — толщина акустического пограничного слоя $(2\nu/\omega)^{1/2}$ (ν — коэффициент кинематической вязкости, ω — угловая частота). При вязком режиме обтекания это эквивалентно условию $A \ll r$, где A — амплитуда колебаний среды.

В газообразных средах, однако, часто встречается и другой случай, когда соблюдается условие: $r \ll \delta$. Это имеет место при озвучивании тонкодисперсных аэрозолей и порошков, а также волокнистых материалов. Поперечный размер препятствия здесь зачастую составляет всего лишь несколько микронов или меньше, тогда как толщина акустического пограничного слоя достигает, при не слишком высоких частотах, многих десятков микронов.

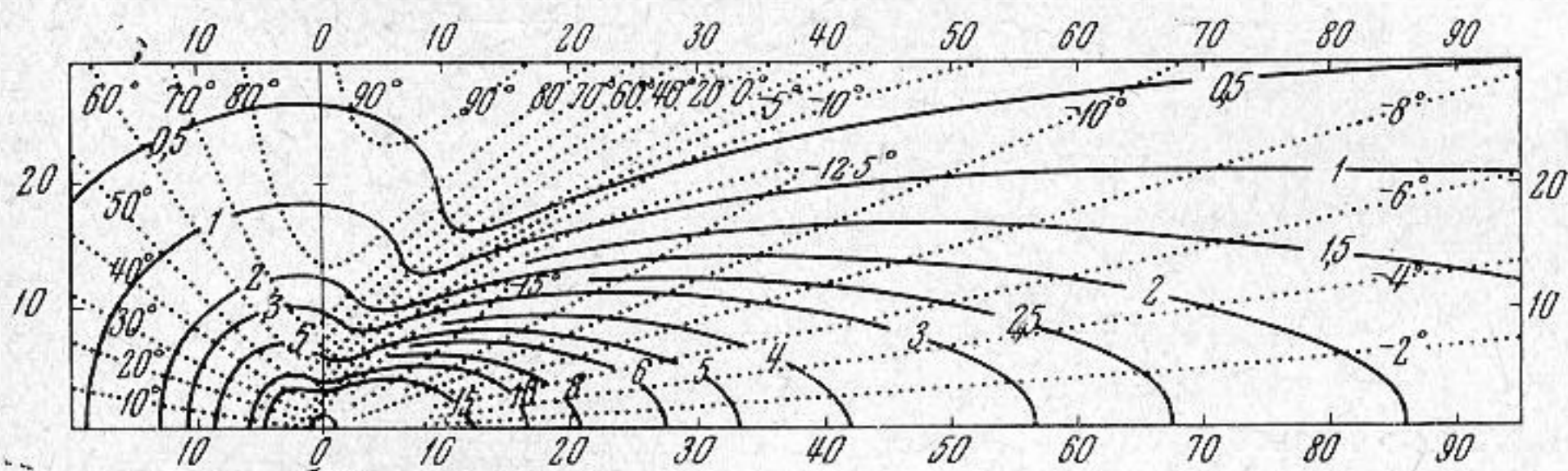
В этом случае акустический пограничный слой на поверхности препятствия не может образоваться (что, между прочим, иногда не учитывается исследователями [12]) и поэтому необходим иной математический подход к решению задачи образования акустического течения около препятствия*.

Если размер препятствия мал по сравнению с толщиной акустического пограничного слоя ($r \ll \delta$) и за весь период колебания имеет место вязкий режим его обтекания средой, т. е. «амплитудное» число Рейнольдса $Re_0 = 2rU_0/\nu$ (U_0 — амплитуда колебательной скорости среды) не превышает единицы, то, как доказывается в механике сплошных сред [14], обтекание препятствия носит квазистационарный характер. В этом случае, рассматривая движение колеблющейся среды вокруг препятствия, можно в

* Впервые попытка описываемого ниже подхода к решению данной задачи предпринята автором в работе [13], однако в ней получена лишь качественная картина акустического течения около сферы.

каждый момент времени пользоваться приводимыми в теоретической гидродинамике выражениями для стационарных скоростей течения и функций тока.

Факт возникновения акустического течения около малого сферического препятствия можно обнаружить лишь исходя из осееновского решения задачи обтекания сферы, отличающегося, как известно, большей степенью точности, чем стоксовское решение. При осееновском приближении выясняется, что поле скоростей вокруг сферы носит асимметричный характер, причем это имеет место не только вдали от ее поверхности, но и в непосредственной близости от нее. Об этом свидетельствуют численные расчеты полей скоростей течения для эквивалентного случая движения сферы в неподвижной среде, выполненные Пирси и Макхью [15] для разных чисел Рейнольдса. Для примера на фиг. 1 приведено поле скоростей течения для движущейся сферы при $Re = 1$.



Фиг. 1

Здесь сплошные линии показывают месторасположение точек с одинаковым значением приведенной скорости, т. е. скорости, отнесенной к максимальному ее значению (%), которым обладает сама сфера. Пунктирные линии показывают направление скорости (угол, указанный возле каждой линии, обозначает тот угол, который образует скорость с направлением движения сферы на бесконечности). Расстояния, отложенные по горизонтали и вертикали, представляют собой приведенные расстояния, отнесенные к радиусу сферы.

Рассматривая фигуру, нетрудно заметить, что относительная скорость обтекания сферы в каждой симметричной точке позади нее (справа) несколько ниже, чем впереди (слева), а это свидетельствует о том, что в направлении к препятствию движется несколько большее количество жидкости, чем через такое же поперечное сечение позади него. Это явление и приводит в акустическом поле к возникновению постоянного притока жидкости с обеих сторон препятствия по линии колебательного движения среды и оттока ее в обе стороны в перпендикулярном направлении.

Уравнение возникшего акустического течения проще всего вывести, исходя из функций стационарного тока. В осееновском приближении единого для всего пространства вокруг сферы выражения для функции тока не существует. По Праудмену и Пирсону [16], приведенная (безразмерная) функция тока $\psi_* = \psi / r^2 u$ вблизи сферы, при $Re \rho_* \leq 1$, имеет вид*

$$\psi_* = \frac{1}{2} \left(\rho_*^2 - \frac{3}{2} \rho_* + \frac{1}{2\rho_*} \right) \left(1 + \frac{3 Re}{16} + \frac{9}{160} Re^2 \ln \frac{Re}{2} \right) \sin^2 \theta - \frac{3 Re}{64} \left(2\rho_*^2 - 3\rho_* + 1 - \frac{1}{\rho_*} + \frac{1}{\rho_*^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (1)$$

* В цитированной работе [13] автор воспользовался уравнением для функции тока, выведенным Томотика и Аои [17], которое получено, как показали позже Праудмен и Пирсон, на основании ошибочных теоретических посылок, но по счастливой случайности дает довольно близкие результаты.

а вдали от сферы при $Re \cdot \rho_* \gg 2$ вид

$$\psi_* = \frac{1}{2} \rho_*^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{Re} (1 + \cos \theta) [1 - e^{-1/4 Re \rho_* (1 - \cos \theta)}], \quad (2)$$

где ρ_* — приведенный полярный радиус, ρ / r , а θ — угол, образуемый им с положительной осью x , проходящей через центр сферы и совпадающей с направлением движения среды на бесконечности.

Если скорость колебательного движения изменяется по синусоидальному закону: $u = U_0 \sin \omega t$, то режим обтекания в каждый момент времени t характеризуется мгновенным числом Рейнольдса $Re = Re_0 \sin \omega t$; в этом случае мгновенные значения функции тока, ψ_t , в согласии с уравнениями (1) и (2), определяются вблизи сферы выражением

$$\begin{aligned} \psi_t = & \frac{1}{2} r^2 U_0 \left\{ \left(\rho_*^2 - \frac{3}{2} \rho_* + \frac{1}{2 \rho_*} \right) \left[1 + \frac{3}{16} Re_0 \sin \omega t + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{9}{160} Re^2 \ln \left(\frac{1}{2} Re_0 \sin \omega t \right) \cdot \sin^2 \omega t \right] \sin \omega t - \right. \\ & \left. - \frac{3}{32} Re_0 \left(2 \rho_*^2 - 3 \rho_* + 1 - \frac{1}{\rho_*} + \frac{1}{\rho_*^2} \right) \cos \theta \cdot \sin^2 \omega t \right\} \sin^2 \theta, \quad (3) \end{aligned}$$

и вдали от сферы

$$\psi_t = \frac{1}{2} r^2 U_0 \left\{ \rho_*^2 \sin^2 \theta \cdot \sin \omega t - \frac{6}{Re_0} (1 + \cos \theta) [1 - e^{-1/4 Re_0 \rho_* (1 - \cos \theta) \sin \omega t}] \right\}. \quad (4)$$

Как известно, функция тока для осесимметричного препятствия («функция Стокса») ψ численно равна деленному на 2π секундному объемному расходу жидкости, протекающей через поперечное сечение трубки тока, поверхность которой проходит через избранную точку пространства. Следовательно, для того чтобы определить функцию тока акустического течения, достаточно подсчитать избыточный объем жидкости, притекающей за 1 сек через избранное поперечное сечение к препятствию в ходе колебательного движения среды, и поделить его на 2π . Для этого необходимо усреднить выражение (3) или (4) по каждому полупериоду колебания и взять разность получаемых результатов за 1 сек.

За каждый первый полупериод колебания, соответствующий движению среды в положительном направлении, к препятствию притекает объем жидкости

$$Q = 2\pi \int_0^{t=1/2 T} \psi_t dt = \frac{1}{f} \int_0^{\omega t = \pi} \psi_t d\omega t, \quad (5)$$

где T — период колебания, равный $1/f$ (f — частота колебаний).

За каждый второй полупериод колебания, соответствующий обратному движению среды, через то же поперечное сечение возвращается объем жидкости

$$Q' = 2\pi \int_{1/2 T}^T \psi_t' dt = \frac{1}{f} \int_0^{\pi} \psi_t' d\omega t, \quad (6)$$

где ψ_t' — мгновенная функция обратного тока жидкости, численно равная функции прямого тока жидкости, проходящей в первый полупериод через симметричное сечение позади сферы, где угол, образуемый полярным

радиусом с осью x , равен $\pi - \theta$; для сферы она определяется тем же уравнением (3) или (4), в котором лишь изменен на обратный знак перед членами, содержащими $\cos \theta$ (поскольку $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$).

Избыточный объем жидкости ΔQ , притекающий к сфере за 1 сек, равен $f(Q - Q')$; следовательно, функция тока акустического течения, $\psi_{\text{ак}} = \Delta Q / 2\pi$, определяется выражением

$$\psi_{\text{ак}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\psi - \psi_t') d\omega t. \quad (7)$$

Это выражение справедливо не только для сферы, но и для любого осесимметричного тела с радиусом $r \ll \delta$. В соответствии с формулой (7), используя формулу (3), получаем следующее выражение для функции тока акустического течения вблизи сферы

$$\psi_{\text{ак}} = -\frac{3}{128} r^2 U_0 \text{Re}_0 \left(2\rho_*^2 - 3\rho_* + 1 - \frac{1}{\rho_*} + \frac{1}{\rho_*^2} \right) \sin^2 \theta \cdot \cos \theta, \quad (8)$$

а используя формулу (4) — соответственное выражение, пригодное на больших расстояниях от сферы,

$$\begin{aligned} \psi_{\text{ак}} = & -\frac{3r^2 U_0}{\text{Re}_0} \left\{ \cos \theta + \frac{1}{2\pi} (1 - \cos \theta) \int_0^{\pi} \times \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{4} \text{Re}_0 \rho_* (1 + \cos \theta) \sin^2 \omega t \right] d\omega t - \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} (1 + \cos \theta) \int_0^{\pi} \exp \left[-\frac{1}{4} \text{Re}_0 \rho_* (1 - \cos \theta) \sin \omega t \right] d\omega t \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Содержащиеся в последней формуле подынтегральные выражения поддаются в общем случае лишь численному интегрированию, однако вблизи оси x , где $\cos \theta$ стремится к 1, возможно асимптотическое решение. В этом случае первым интегральным членом, ввиду его малости при $\text{Re}_0 \cdot \rho_* \gg 2$, можно пренебречь, а второй, с малым показателем экспоненты, после разложения в ряд проинтегрировать; в результате на больших расстояниях от сферы при малых θ , имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\text{ак}} = & -\frac{3r^2 U_0}{4\pi} \rho_* \sin^2 \theta \left[1 - \frac{1}{\text{Re}_0 \rho_*} \left(\pi - \int_0^{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \text{Re}_0 \rho_* \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times (1 + \cos \theta) \sin \omega t \right\} d\omega t \right) \right] \simeq -\frac{3u_2 U_0}{4\pi} \rho_* \sin^2 \theta. \quad (10) \end{aligned}$$

Как видим, функция тока акустического течения вблизи сферы находится в квадратичной зависимости от амплитуды колебательной скорости, вдали же от сферы — в линейной зависимости, а это означает, что конфигурация линий тока видоизменяется с изменением амплитуды колебательной скорости.

Для построения линий тока акустического течения более удобна приведенная форма функций тока, $\psi_{\text{ак}}^*$, получаемая делением $\psi_{\text{ак}}$ на $r^2 U_0$; вблизи сферы

$$\psi_{\text{ак}}^* = -\frac{3 \text{Re}_0}{128} \left(2\rho_*^2 - 3\rho_* + 1 - \frac{1}{\rho_*} + \frac{1}{\rho_*^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta, \quad (8')$$

вдали от сферы

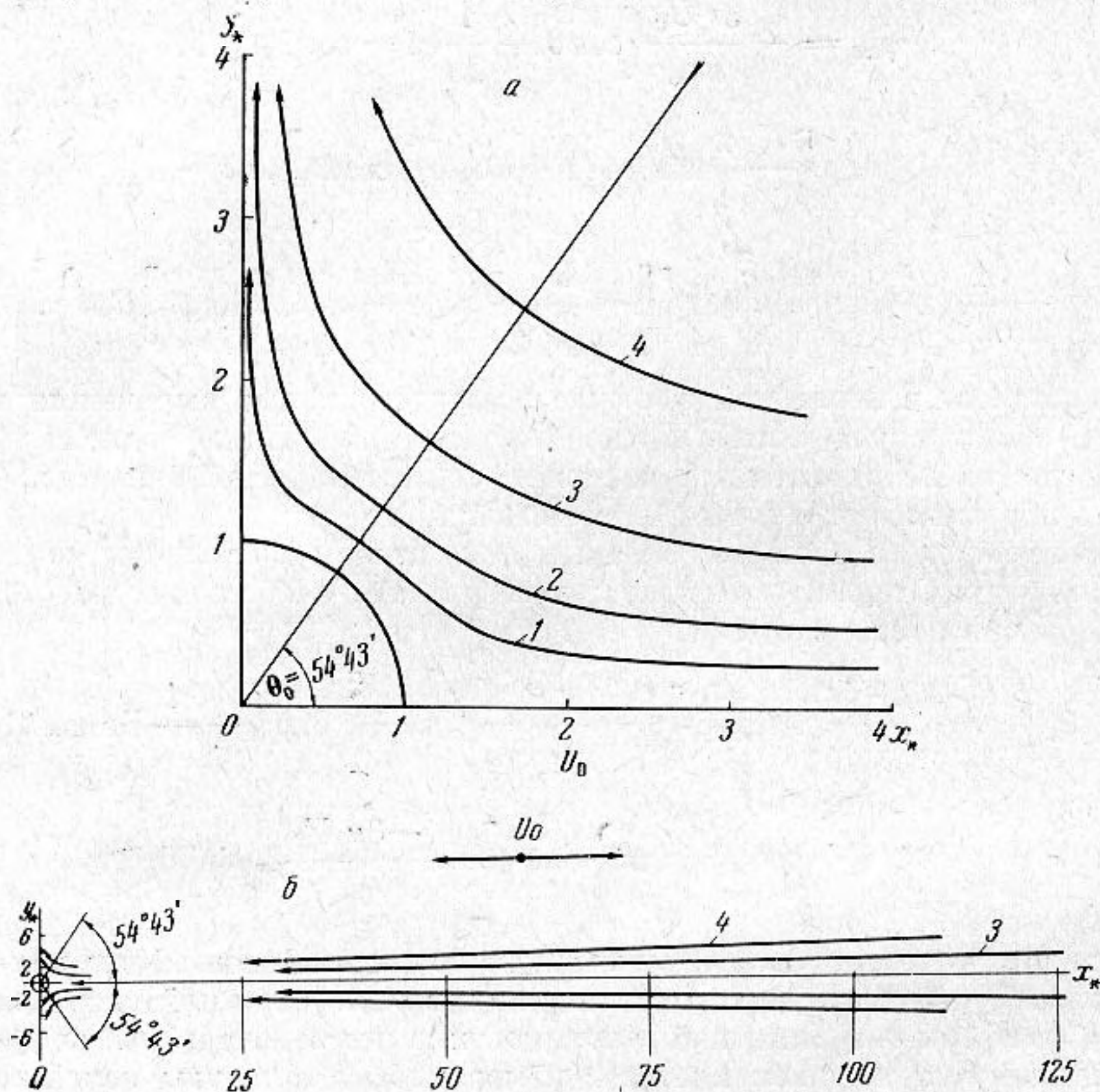
$$\psi_{\text{ак}}^* = -\frac{3}{\text{Re}_0} \left\{ \cos \theta + \frac{1 - \cos \theta}{2\pi} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{1}{4} \text{Re}_0 \rho_* \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 + \cos \theta) \sin \omega t \right] d\omega t - \frac{1 + \cos \theta}{2\pi} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{1}{4} \text{Re}_0 \rho_* \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - \cos \theta) \sin \omega t \right] d\omega t \right\}, \quad (9')$$

и вдали от сферы при малых θ

$$\psi_{\text{ак}}^* = -\frac{3\rho_*}{4\pi} \sin^2 \theta. \quad (10')$$

Наиболее близко к поверхности сферы каждая линия тока проходит, как и в случае $r > \delta$ [10], в точке с угловой координатой $\theta_0 = 54^\circ 43'$; в этом нетрудно убедиться, взяв из уравнения (8') производную $\partial \psi_{\text{ак}}^* / \partial \theta$ и приравняв ее нулю. Под таким же углом, на бесконечности, находится и центр вихреобразования.

На фиг. 2, а приведены вычисленные для первого квадранта по формуле (8') при $\text{Re}_0 = 0,5$ линии тока акустического течения, проходящие при



Фиг. 2

$\theta_0 = 54^\circ 43'$ на расстоянии ρ_{*0} , равном соответственно 1,25 (1), 1,5 (2), 2,0 (3) и 3,0 (4), чему соответствуют значения $\psi_{\text{ак}}^*$, равные $-0,97 \cdot 10^{-3}$, $-3,51 \cdot 10^{-3}$, $-1,24 \cdot 10^{-2}$ и $-4,41 \cdot 10^{-2}$.

На фиг. 2, б представлены линии тока акустического течения вдали от сферы для значений $\psi_{\text{ак}}^* -1,24 \cdot 10^{-2}$ (3) и $-4,41 \cdot 10^{-2}$ (4), вычисленные

по асимптотическому уравнению (10'), которое в явной форме имеет вид

$$y_* = 2 \left[\frac{\pi}{3} |\psi_{ак}^*| \right]^{1/2} \cdot x_*^{1/2}, \quad (10'')$$

где x_* и y_* — приведенные прямоугольные координаты точки. Зная функцию тока, нетрудно определить радиальную и тангенциальную составляющие скорости акустического течения по известным формулам [18]:

$$v_\rho = - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (11)$$

$$v_\theta = \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (12)$$

В соответствии с этими формулами, используя выражения (8) и (10), получаем в приведенном виде вблизи сферы

$$v_\rho^* = \frac{v_\rho}{U_0} = - \frac{3 \text{Re}_0}{128} \left(2 - \frac{3}{\rho_*} + \frac{1}{\rho_*^2} - \frac{1}{\rho_*^3} + \frac{1}{\rho_*^4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (13)$$

$$v_\theta^* = \frac{v_\theta}{U_0} = \frac{3 \text{Re}_0}{256} \left(4 - \frac{3}{\rho_*} + \frac{1}{\rho_*^3} - \frac{2}{\rho_*^4} \right) \sin 2\theta \quad (14)$$

и вдали от сферы при малых θ

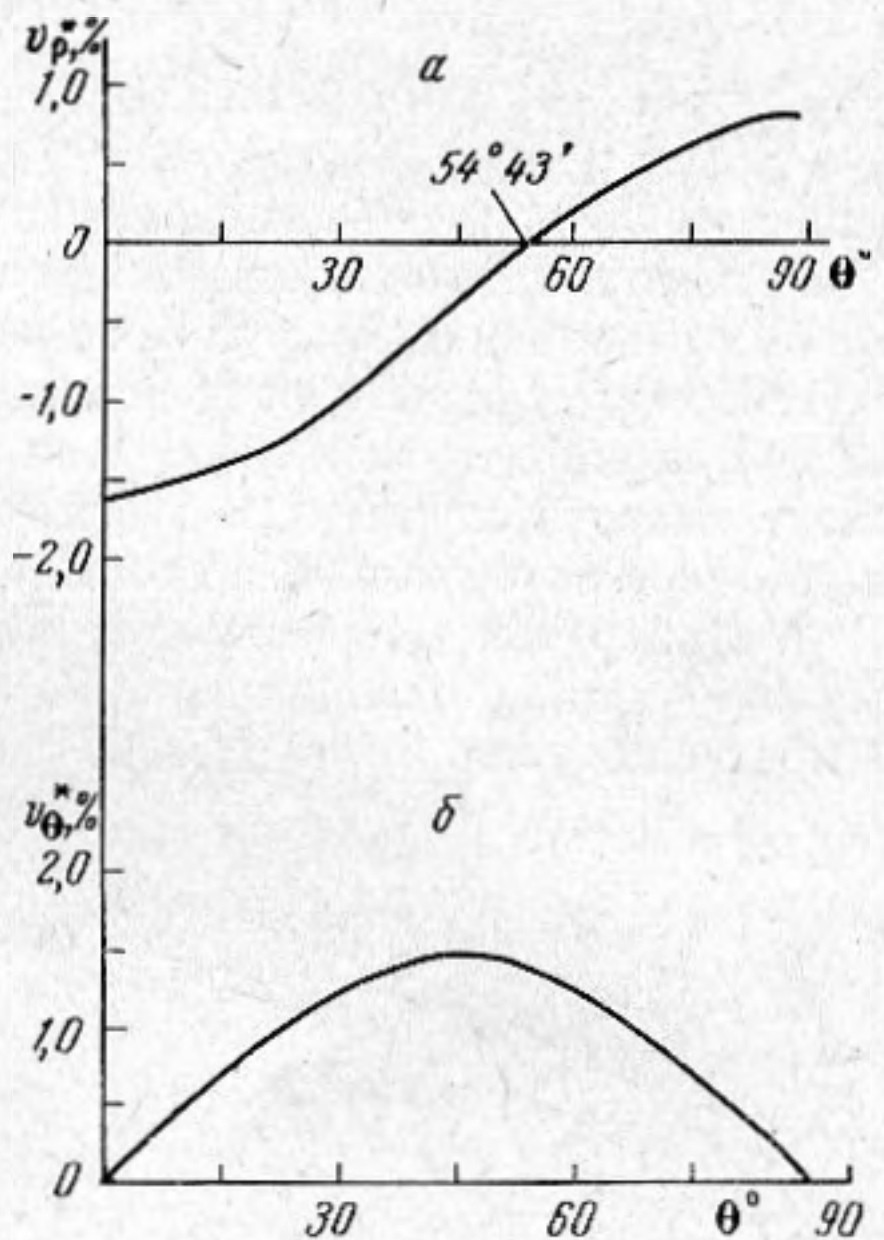
$$v_\rho^* = - \frac{3 \cos \theta}{2\pi \rho_*} \quad (15)$$

$$v_\theta^* = \frac{3 \sin \theta}{4\pi \rho_*} \quad (16)$$

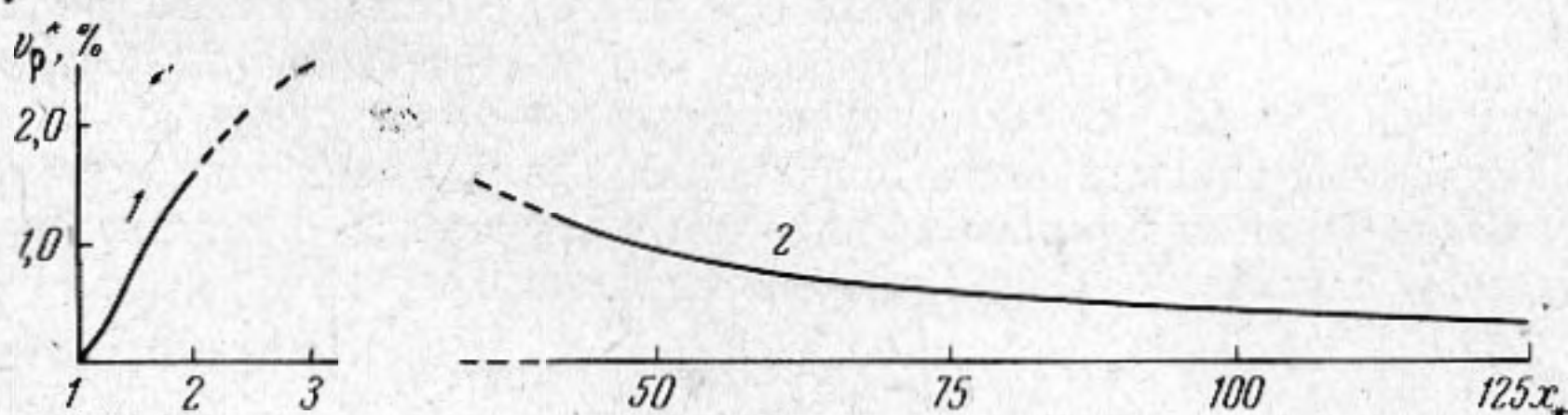
Результирующая скорость акустического течения определяется обычным путем:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2}. \quad (17)$$

На фиг. 3, *a* и *б* представлены значения приведенных радиальной и тангенциальной составляющих скорости акустического течения, v_ρ^* и v_θ^* , на



Фиг. 3



Фиг. 4

расстоянии от сферы $\rho_* = 2$ при различных углах θ , а на фиг. 4 дана зависимость максимальной результирующей скорости акустического течения v^* , возникающей по оси x , от расстояния до сферы (характер зависимости одинаков и при всех других углах θ); кривая 1 соответствует малым значениям ρ_* , а кривая 2 — большим значением ρ_* .

Фиг. 5 дает представление о характере изменения тангенциальной (и одновременно результирующей) скорости акустического течения в наиболее узком месте течения, имеющем угловую координату $\theta_0 = 54^\circ 43'$.

Все представленные графики вычислены в предположении, что сфера неподвижна (фиксирована). Если сфера взвешена в газообразной среде и частично увлекается ее колебательным движением, то во всех представленных выражениях вместо U_0 и Re_0 следует подставлять соответственно $\mu_g U_0$ и $\mu_g Re_0$, где μ_g — степень обтекания сферы колеблющейся средой, определяемая в стоксовском приближении формулой [13]

$$\mu_g = \mu_{g0} = \omega\tau / \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (18)$$

а в осееновском приближении формулой [19]

$$\mu_g = \frac{\omega\tau}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + \left(1 + \frac{3}{8} \mu_{g0} Re_0\right)^2}}, \quad (19)$$

где $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\eta} r^2$ — время релаксации взвешенной сферы (ρ_p — плотность вещества сферы; η — динамическая вязкость среды).

Резюмируя, можно отметить следующие характерные особенности акустического течения вокруг сферических препятствий с размером $r \ll \delta$.

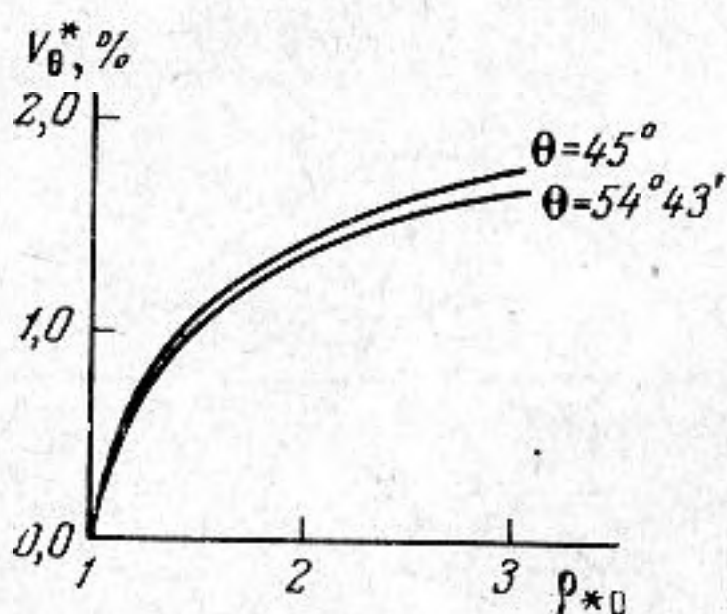
1. Вокруг сферы образуется лишь одна пара идущих с бесконечности вихрей, а не две замыкающиеся («внутренняя» и «внешняя»), как это имеет место в случае $r \gg \delta$ (см. фиг. 1 в работе [10]), когда образуется акустический пограничный слой.

2. Центр вихреобразования находится, как и в случае $r \gg \delta$, на радиусе с угловой координатой $\theta_0 = 54^\circ 43'$, но отнесен в бесконечность. В пределах угла $\theta_0 = \pm 54^\circ 43'$ с каждой стороны течение направлено к сфере, за его пределами — от сферы, что совпадает с направлением «внутренних» вихрей, возникающих при $r \gg \delta$.

3. Конфигурация акустического течения около неподвижной сферы, в отличие от случая $r \gg \delta$, зависит от амплитуды колебательной скорости, но не зависит, как и скорость течения, от частоты колебаний.

4. В предельном случае вязкого обтекания ($Re_0 = 1$) скорость акустического течения достигает 3—5% амплитуды колебательной скорости в окрестности сферы и около 1% ее на расстоянии 50 радиусов от сферы (по абсолютному значению это составляет при $I = 0,1$ $вт/см^2$ соответственно 6—10 $см/сек$ и 2,0 $см/сек$).

5. Полученные аналитические выражения для функции тока и скорости акустического течения намного проще, чем в случае $r \gg \delta$, однако ограничены двумя областями — вблизи сферы и вдали от сферы.



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Z. Carriere. Analyse ultramicroscopique des vibrations aeriennes. J. phys. et rad. 1929, 10, 5, 198—208.
2. E. N. Andrade. On the circulations caused by the vibration of air in a tube. Proc. Roy. Soc., 1931, A134, 824, 445—470.
3. H. Schlichting. Berechnung ebener periodischer grenzschichtstromungen. Phys. Z., 1932, 33, 8, 327—335.
4. P. J. Westervelt. The theory of steady rotational flow generated by sound field. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 1, 60—67.

5. P. J. Westervelt. Acoustic streaming near a small obstacle. *J. Acoust. Soc. America*, 1953, 25, 6, 1123.
6. J. M. Andres, U. Ingard. Acoustic streaming at high Reynolds numbers. *J. Acoust. Soc. America*, 1953, 25, 5, 928—932.
7. J. M. Andres, U. Ingard. Acoustic streaming at low Reynolds numbers. *J. Acoust. Soc. America*, 1953, 25, 5, 932—938.
8. J. Holtmark, I. Johnsen, T. Sikkeland, S. Skavlem. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. *J. Acoust. Soc. America*, 1954, 26, 1, 26—39.
9. W. P. Raney, J. C. Corelli, P. J. Westervelt. Acoustical streaming in the vicinity of a cylinder. *J. Acoust. Soc. America*, 1954, 26, 6, 1006—1014.
10. C. A. Lane. Acoustical streaming in the vicinity of a sphere. *J. Acoust. Soc. America*, 1955, 27, 6, 1082—1086.
11. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
12. Л. И. Буравов, О. К. Экнадиосянц. О поведении частиц аэрозолей в акустическом поле, *Акуст. ж.*, 1961, 7, 4, 492—493.
13. Е. П. Медников. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1963.
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред., М., ГИИ, 1954, (стр. 111).
15. T. Pearcey, M. McHugh. Calculation of viscous flow around spheres at low Reynolds numbers. *Phil. Mag.*, 1955, 46, Ser. 6, 378, 783—794.
16. J. Proudman, J. R. A. Pearson. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1957, 2, 3, 237—262.
17. S. Tomotika, T. Aoi. The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers. *Quart. J. Mech. and Appl. Mathem.*, 1950, 3, 2, 140—161.
18. Х. Рауз. Механика жидкости. М., Гостройиздат, 1967 (стр. 41).
19. А. С. Денисов, А. А. Подольский, В. И. Турубаров. Об увлечении аэрозольных частиц в звуковом поле при числах Рейнольдса $R \leq 1$. *Акуст. ж.*, 1965, 11, 1, 115—116.

Н.-и. физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова
Москва

Поступила в редакцию
21 декабря 1967 г.