

УДК 534.121.1:534.6

ИЗМЕРЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ВЯЗКОСТИ ПО ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ НЕЗАТУХАЮЩИМ КОЛЕБАНИЯМ ПЛАСТИНКИ В ЖИДКОСТИ

Г. С. Росин

Излагается теория измерений вязкости для случая, когда рабочим телом вискозиметра, погружаемым в жидкость, является пластинка, колеблющаяся в своей плоскости. При этом учитывается влияние стенок сосуда, содержащего жидкость. Кроме резонансного и амплитудного методов, приводятся еще два способа измерений: импедансный (метод механического сопротивления) и фазовый. Методы измерений описываются применительно к сдвоенному электродинамическому преобразователю, как наиболее простому и удобному в употреблении. Однако его применение не является обязательным. Изложенная методика измерений успешно может быть применена (с соответствующими изменениями) и для других видов электромеханических преобразователей.

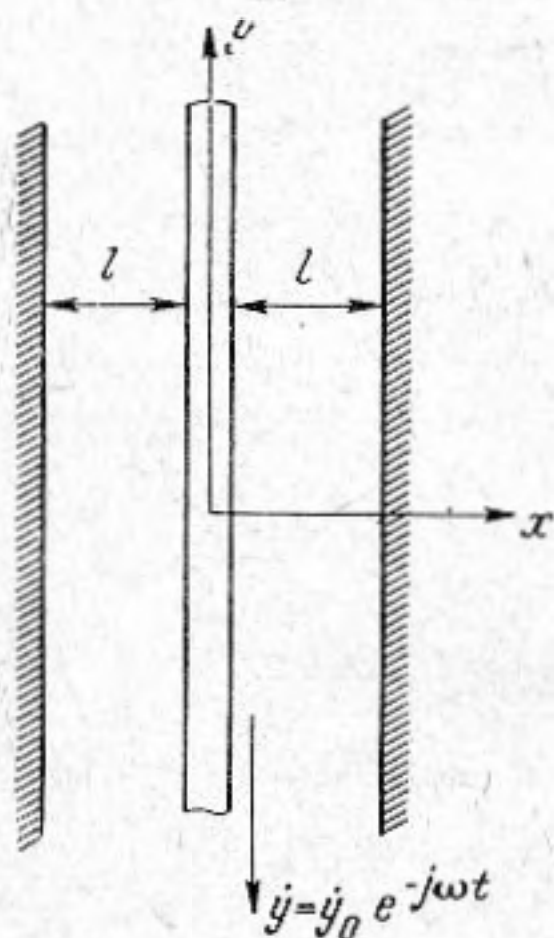
Хотя вибрационные методы измерений вязкости приобретают в последнее время все большее распространение, совершенствованию методики подобного рода измерений уделяется мало внимания. Применяются в основном два метода измерений при незатухающих колебаниях: резонансный [1, 2] и амплитудный [2]. Кроме того, при этом, как правило, не учитывается влияние на результаты измерений стенок сосуда, содержащего жидкость.

Ниже излагается теория измерений вязкости для случая, когда рабочим телом вискозиметра, погружаемым в жидкость, является пластинка, колеблющаяся в своей плоскости. При этом учитывается влияние стенок. Кроме резонансного и амплитудного методов, рассматриваются еще два способа измерений: импедансный (метод механического сопротивления) и фазовый. Методы измерений описываются применительно к сдвоенному электродинамическому преобразователю, как наиболее простому и удобному в употреблении. Однако описываемый метод измерения может быть реализован и с использованием других видов электромеханических преобразователей.

Рассмотрим колебательное движение несжимаемой вязкой жидкости, находящейся между неограниченной в двух измерениях пластинкой (фиг. 1), совершающей гармоническое движение со скоростью

$$\dot{y} = \dot{y}_0 \exp(-j\omega t), \tag{1}$$

и двумя также неограниченными в двух измерениях твердыми неподвижными плоскостями, отстоящими от подвижной пластинки на расстоянии l .



Фиг. 1

(Здесь \dot{y}_0 — амплитуда скорости, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота колебаний, f — частота колебаний.)

В этом случае движение жидкости описывается следующим уравнением [3]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где v — скорость движения жидкости, η и ρ — ее динамическая вязкость и плотность, x — текущая координата. (Ось x -ов, вдоль которой распространяется волновое движение в вязкой жидкости, перпендикулярна поверхности колеблющейся пластинки.)

При условии, что на поверхности соприкосновения с твердым телом скольжение жидкости отсутствует или столь мало, что им можно пренебречь [4—6], т. е. при граничных условиях

$$v = \dot{y} \text{ при } x = 0 \text{ и } v = 0 \text{ при } x = l \quad (3)$$

решение уравнения (2) имеет следующий вид:

$$v = \dot{y} \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl}, \quad (4)$$

где

$$k = \pm(j+1)\sqrt{\rho\omega/2\eta}. \quad (5)$$

В дальнейшем знак перед k мы выбираем таким, чтобы мнимая часть была положительной, что соответствует уменьшению скорости колебания жидкости в прямой волне и ее возрастанию в отраженной волне по направлению в глубь жидкости.

Сила сопротивления F , действующая на пластинку со стороны жидкости, пропорциональна вязкости, площади поверхности S и градиенту скорости жидкости на поверхности движущейся пластинки:

$$F = -2S\eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{2S\eta\dot{y}}{l} \alpha \left(\frac{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\alpha} + j \frac{\sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\alpha} \right), \quad (6)$$

где

$$\alpha = l\sqrt{\rho\omega/2\eta}. \quad (7)$$

При определении силы сопротивления мы считаем, что пластинка имеет ограниченные размеры. При колебаниях такой пластинки возникают дополнительные силы трения, связанные с краевыми эффектами и лобовым сопротивлением. Теоретически и экспериментально установлено [2, 3], что этими силами в случае тонкой пластинки (т. е. такой, у которой толщина много меньше ее линейных размеров) можно пренебречь.

Формула (6) при

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 3,8 \text{ (с точностью до } 0,1\%), \\ \alpha &\geq 2,65 \text{ (с точностью до } 1\%) \text{ и} \\ \alpha &\geq 1,85 \text{ (с точностью до } 5\%) \end{aligned} \quad (8)$$

переходит в следующее выражение:

$$F = -\frac{2S\eta\dot{y}}{l} \alpha(1-j) = -S\sqrt{2\rho\omega\eta} \cdot \dot{y} - S\sqrt{2\rho\eta/\omega} \ddot{y}, \quad (9)$$

полученное ранее [1] для случая, когда мы пренебрегали обратной волной в жидкости, т. е. влиянием стенок сосуда (здесь $\ddot{y} = -j\omega\dot{y}$ — ускорение колебательного движения пластинки в жидкости).

Из выражений (7) и (8) можно определить расстояние, на котором должны быть расположены стенки сосуда, содержащего жидкость, чтобы они не влияли на результаты измерений:

$$\begin{aligned} l &\geq 3,8\sqrt{2\eta / \rho\omega} \quad (\text{с точностью до } 0,1\%), \\ l &\geq 2,65\sqrt{2\eta / \rho\omega} \quad (\text{с точностью до } 1\%) \text{ и} \\ l &\geq 1,85\sqrt{2\eta / \rho\omega} \quad (\text{с точностью до } 5\%). \end{aligned} \quad (10)$$

Из выражений (10) видно, что чем выше измеряемая вязкость и ниже частота колебаний, тем дальше должны быть расположены стенки сосуда, чтобы они не влияли на результаты измерений.

Тригонометрические и гиперболические функции, входящие в выражение (6), можно разложить в ряд Тейлора. В суммах и разностях этих разложений можно удерживать по одному члену ряда при

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,29 \quad (\text{с точностью до } 0,1\%), \\ \alpha &\leq 0,52 \quad (\text{с точностью до } 1\%) \text{ и} \\ \alpha &\leq 0,78 \quad (\text{с точностью до } 5\%). \end{aligned} \quad (11)$$

В этом случае выражение (6) переходит в следующее:

$$F = -\frac{2S\eta}{l} \dot{y} \left(1 - j \frac{2}{3} \alpha^2 \right) = -\frac{2S\eta}{l} \dot{y} - \frac{2}{3} Sl \rho \dot{y}. \quad (12)$$

Формула (12) для силы сопротивления имеет место, если пластинка в жидкости колеблется между двух неподвижных плоскостей, расположенных от нее на расстоянии

$$\begin{aligned} l &\leq 0,29\sqrt{2\eta / \rho\omega} \quad (\text{с точностью до } 0,1\%), \\ l &\leq 0,52\sqrt{2\eta / \rho\omega} \quad (\text{с точностью до } 1\%) \text{ и} \\ l &\leq 0,78\sqrt{2\eta / \rho\omega} \quad (\text{с точностью до } 5\%). \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение для силы сопротивления в формуле (12) удобно применять для измерения вязкости газов на низких частотах.

Из формул (9) и (12) следует, что сила сопротивления, действующая со стороны жидкости на пластинку, может быть в обоих рассматриваемых выше случаях представлена в виде

$$F = -(\varphi \dot{y} + \psi \ddot{y}), \quad (14)$$

где ψ — представляет собой присоединенную к пластинке массу жидкости, а φ — коэффициент силы трения жидкости о пластинку.

Способы измерений. а) Резонансный. Напишем дифференциальное уравнение движения подвижной системы вискозиметра при колебаниях пластинки в жидкости

$$(m + \psi) \ddot{y} + (r + \varphi) \dot{y} + cy = Q. \quad (15)$$

Здесь m — масса подвижной системы, r — коэффициент силы трения подвижной системы при колебаниях в воздухе, c — жесткость подвижной системы и Q — вынуждающая сила. Условие резонанса такой колебательной системы имеет вид

$$(m + \psi) \omega_0 - c / \omega_0 = 0. \quad (16)$$

Здесь ω_0 — резонансная круговая частота колебаний пластинки в жидкости. При резонансных колебаниях в воздухе $\psi = 0$ формула (16) принимает вид

$$m \omega_1 - c / \omega_1 = 0, \quad (17)$$

где ω_1 — резонансная частота в воздухе. Из выражений (16) и (17) с учетом формул (9) и (14) при выполнении условий (10), получаем [1]

$$\eta = \frac{\omega_0 m^2}{2\rho S^2} (\xi^2 - 1)^2, \quad (18)$$

где $\xi = \omega_1 / \omega_0$.

Относительная ошибка при применении резонансного способа измерений будет [1]

$$\frac{d\eta}{\eta} = B \left| \frac{d\omega_0}{\omega_1} \right|, \quad (19)$$

где

$$B = - \frac{3\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \xi,$$

и определяется точностью измерения частоты. Чувствительность метода будет наибольшей при $\xi \approx 1,9$. Данный способ более пригоден для измерения высоковязких жидкостей.

Однако при наличии приборов, измеряющих частоту с высокой степенью точности, этот метод может быть применен и для измерения вязкости слабовязких жидкостей. Следует обратить внимание на то, что резонансный метод не может быть применен при условиях (13), так как в этом случае присоединенная масса не зависит от вязкости.

б) Импедантный метод. Известно, что при резонансных колебаниях механическое сопротивление (импеданс) системы, движение которой описывается уравнением (15), является чисто активным

$$Z_{\omega_0} = r + \varphi. \quad (20)$$

(Индекс ω_0 обозначает, что механическое сопротивление определяется при частоте ω_0 , т. е. при резонансных колебаниях в жидкости). При резонансных колебаниях в воздухе $\varphi = 0$ и следовательно

$$Z_{\omega_1} = r. \quad (21)$$

Из выражений (20) и (21) с учетом формул (9) и (14) при выполнении условий (10), находим

$$\eta = (\Delta Z)^2 / 2\rho\omega_0 S^2, \quad (22)$$

а с учетом формул (12) и (14) при выполнении условий (13),

$$\eta = \Delta Z l / 2S. \quad (23)$$

Здесь $\Delta Z = Z_{\omega_0} - Z_{\omega_1}$.

Относительная погрешность измерения вязкости по формуле (22) составляет

$$\frac{d\eta}{\eta} = 2 \left| \frac{d(\Delta Z)}{\Delta Z} \right| + \left| \frac{d\omega_0}{\omega_0} \right|, \quad (24)$$

а по формуле (23)

$$\frac{d\eta}{\eta} = \left| \frac{d(\Delta Z)}{\Delta Z} \right|. \quad (25)$$

Если силу при измерениях поддерживать постоянной, то импеданс будет зависеть только от амплитуды колебательной скорости и следовательно, вязкость может быть найдена по изменению амплитуды скорости. В этом состоит сущность амплитудного метода измерения вязкости. Импедантный метод измерений является обобщением амплитудного метода на случай произвольной силы.

Однако на этом возможности импедантного метода не исчерпываются, так как вязкость может быть определена не только из разности выражений (20) и (21), но также из их отношения. Приведем соответствующие формулы:

$$\eta = (\mu - 1)^2 r^2 / 2\rho\omega_0 S^2 \quad (26)$$

при выполнении условий (10), и

$$\eta = (\mu - 1)l / 2S \quad (27)$$

при выполнении условий (13). Здесь $\mu = Z_{\omega_0} / Z_{\omega_1}$.

в) Фазовый метод. Если колеблющуюся пластинку сначала опустить в жидкость и привести колебательную систему в резонансные колебания с частотой ω_0 , а затем, не меняя частоты, извлечь пластинку из жидкости, то тангенс угла сдвига фазы между возбуждающей силой Q и скоростью \dot{y} будет равен

$$\operatorname{tg} \theta = (\omega_0 m - c / \omega_0) / r. \quad (28)$$

Так как при этом выполняется условие (16), то из выражения (28) получаем

$$\operatorname{tg} \theta = -\omega_0 \psi / r. \quad (29)$$

Из формулы (29) с учетом (14) и (9) при выполнении условий (10), находим искомую вязкость

$$\eta = r^2 \operatorname{tg}^2 \theta / 2\rho\omega_0 S^2. \quad (30)$$

Относительная ошибка измерений вязкости по формуле (30) составляет

$$\frac{d\eta}{\eta} = 2 \left| \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{\operatorname{tg} \theta} \right| + \left| \frac{d\omega_0}{\omega_0} \right|. \quad (31)$$

Наоборот, если колеблющуюся пластинку сначала привести в резонансные колебания в воздухе с частотой ω_1 , а затем, не меняя частоты, опустить в жидкость, то тангенс угла сдвига фазы между возбуждающей силой и скоростью колебаний будет

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_1(m + \psi) - c / \omega_1}{r + \varphi}. \quad (32)$$

Так как при этом выполняется условие (17), из выражения (32) получаем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_1 \psi}{r + \varphi}. \quad (33)$$

Из формулы (33) с учетом (14) и (9) при выполнении условий (10), находим искомую вязкость

$$\sqrt{\eta} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta} \cdot \frac{r}{S \sqrt{2\rho\omega_1}}. \quad (34)$$

Из формулы (33) с учетом (14) и (12) при выполнении условий (13) мы имеем соответственно

$$\eta = \frac{\rho\omega_1 l^2}{3 \operatorname{tg} \theta} - \frac{rl}{2S}. \quad (35)$$

Относительная погрешность измерений вязкости по формуле (34) составляет

$$\frac{d\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}} = \left| \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{\operatorname{tg} \theta (1 - \operatorname{tg} \theta)} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{d\omega_1}{\omega_1} \right|, \quad (36)$$

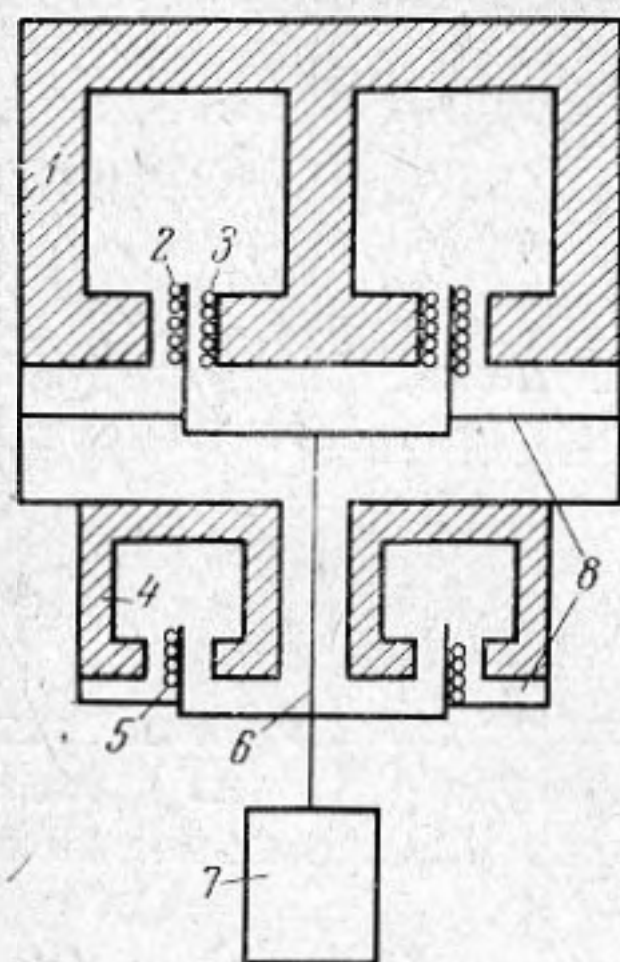
а по формуле (35)

$$\frac{d\eta}{\eta} = \left| \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{\operatorname{tg} \theta} \right| + \left| \frac{d\omega_1}{\omega_1} \right|. \quad (37)$$

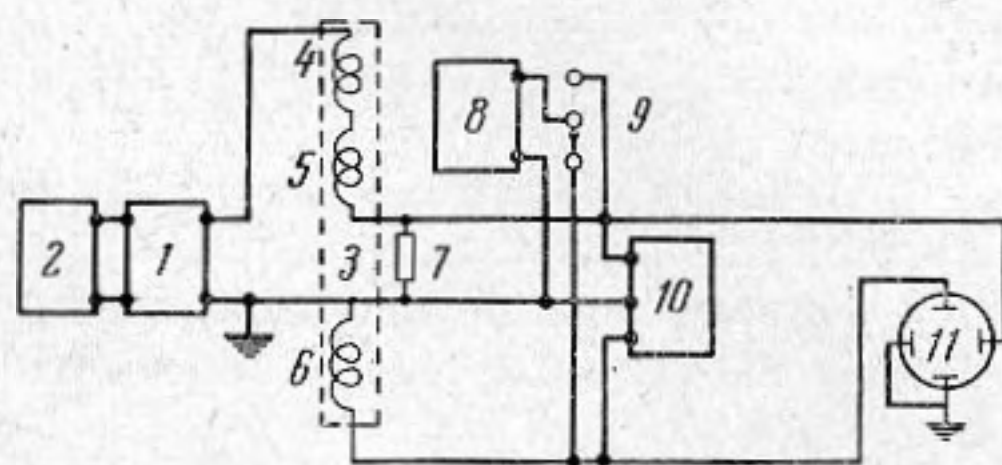
Для измерения вязкости мы применяли вискозиметр (фиг. 2), который представляет из себя сдвоенный электродинамический преобразователь. Силовой преобразователь состоит из постоянного магнита I , в кольцевом зазоре которого помещается дюралюминиевый каркас с намотанной на

нем силовой катушкой 2. На керне магнита бифилярно с катушкой 2 наматывается компенсационная катушка 3 для уменьшения наводки из силовой катушки на измерительную. Измерительный преобразователь состоит из постоянного магнита 4, в кольцевом зазоре которого располагается измерительная катушка 5. Силовая и измерительная катушки соединяются между собой стержнем 6, который оканчивается тонкой пластинкой 7, погружаемой в испытуемую жидкость. Подвижная система вискозиметра (обе катушки, стержень и пластинка) подвешивается на восьми расположенных крест-накрест в два яруса бронзовых плоских пружинах 8. При такой подвеске пластинка 7 может совершать только поступательное движение.

Принципиальная схема установки показана на фиг. 3. Звуковой генератор 1 типа ГЗ-4А, частота которого контролируется частотомером 2 типа ЧЗ-9, питает силовую 4 и компенсационную 5 катушки вискозиметра, включенные последовательно с безреактивным сопротивлением 7 величиной R . Измерительная катушка 6 через переключатель 9 подключается к ламповому вольтметру 8 типа ВЗ-13. Фазометр 10 типа Ф2-1 и



Фиг. 2



Фиг. 3

осциллограф 11 типа С1-1 служат для измерения угла сдвига фазы. Установка для измерений работает следующим образом. Ток звукового генератора 1 приводит в колебательное движение силовую катушку 4 и связанную с ней механически измерительную катушку 3. Сила, приводящая в движение подвижную систему, пропорциональна току, проходящему через силовую катушку 4 и тем самым падению напряжения на сопротивлении R :

$$Q = \zeta_1 \frac{U}{R} \exp(-j\omega t). \quad (38)$$

Здесь ζ_1 — коэффициент электромеханической связи.

В измерительной катушке возбуждается электродвижущая сила пропорциональная скорости движения подвижной системы вискозиметра и сдвинутая по отношению к току в силовой катушке на угол θ

$$E = \zeta_2 \dot{y} \exp[-j(\omega t - \theta)], \quad (39)$$

где ζ_2 — коэффициент электромеханической связи.

Из выражений (38) и (39) находим величину механического сопротивления (импеданца) подвижной системы вискозиметра

$$Z = \frac{Q}{\dot{y}} = \zeta \frac{U}{RE} \exp(j\theta). \quad (40)$$

Здесь $\zeta = \zeta_1 \zeta_2$ — общий коэффициент электромеханической связи. При резонансных колебаниях угол сдвига фазы между силой и скоростью равен

нулю и выражение (40) переходит в

$$Z = \frac{\zeta U}{RE}. \quad (41)$$

Резонансная частота определяется по нулевому углу сдвига фазы на осциллографе. При этом эллипс фигуры Лиссажу превращается в наклонную прямую. Следует отметить, что это весьма удобный метод определения момента резонанса, более чувствительный нежели определение по максимуму колебательной скорости. Для определения механического сопротивления из формулы (41) по ламповому вольтметру находится напряжение E на измерительной катушке δ , а затем падение напряжения U на сопротивлении γ . Фазовый угол при нерезонансных колебаниях измеряется фазометром 10 .

При тарировке находятся масса подвижной системы m и жесткость подвески c по резонансным частотам f_p и f_n ненагруженного и нагруженного массой m_1 прибора из следующих выражений:

$$m = \frac{m_1}{(f_p/f_n)^2 - 1}, \quad (42)$$

$$c = 4\pi^2 f_p^2 m. \quad (43)$$

Коэффициент силы трения подвижной системы может быть найден по частотам f_1 и f_2 резонансной кривой, на которых скорость колебаний уменьшается в два раза [7]

$$r = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} m (f_2 - f_1). \quad (44)$$

Поскольку при резонансных колебаниях коэффициент силы трения становится равным механическому сопротивлению (формула (21)) из выражений (44) и (41) может быть определен коэффициент электромеханической связи:

$$\zeta = \frac{rRE}{U}. \quad (45)$$

Изготовленный нами прибор имел следующие параметры: масса подвижной системы $m = 45$ г, жесткость подвески $c = 11 \cdot 10^6$ дин/см, коэффициент силы трения $r = 930$ г/сек, коэффициент электромеханической связи $\zeta = 69,8 \cdot 10^3$ г·ом/сек.

Приведенные выше формулы проверялись при резонансном способе измерения вязкости [1]. Сопоставлялись результаты измерения вязкости глицерина со следами спирта по формуле (18) (площадь пластинки составляла 49 см²) с результатами, полученными при помощи ротационного вискозиметра, отградуированного по касторовому маслу. Расхождения между измерениями, проведенными обоими методами, не превышали 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Росин. Об измерении абсолютной вязкости жидкостей вибрационным методом, Завод. лаб., 1962, 28, 1, 72—74.
2. А. Б. Каплун. Некоторые вопросы исследования вязкости жидкостей (канд. диссертация), 1967.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1954.
4. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости, т. II, М., ИЛ, 1948.
5. Д. М. Голстой. Скольжение жидкостей и дисперсных систем по твердым поверхностям (доктор. диссертация). Станкоинструментальный институт, М., 1953.
6. Б. В. Дерягин. Что такое трение? Изд-во АН СССР, 1963.
7. В. В. Мокшанцев, Г. С. Росин. Измерение динамических характеристик звуко- и виброизоляционных материалов при поперечных колебаниях. Борьба с шумами и вибрациями. Докл. Совещания в Челябинске 21—24 июня 1966, М., Стройиздат, 1966.

Уральский н.-и. и проектный
институт строительных материалов
Челябинск

Поступила в редакцию
24 мая 1967 г.