

УДК 534.874.2

**СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ
И КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРОТЯЖЕННЫХ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН**

М. Д. Смарышев

Рассчитывается сопротивление излучения элемента периодической линейной бесконечной антенны. В предположении, что сопротивления излучения всех элементов достаточно большой антенны одинаковы, определяются сопротивление излучения и коэффициент концентрации протяженной антенны.

Рассмотрим антенну, состоящую из одинаковых и одинаково ориентированных в пространстве плоских элементов, лежащих в бесконечном жестком экране. Центры элементов образуют эквидистантную бесконечную линейную решетку. Определим мощность, излучаемую элементом антенны с номером $\alpha = 0$ по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \int_{S_0} p \dot{\xi}_0^* dS_0, \tag{1}$$

где p — давление на поверхности элемента с номером $\alpha = 0$, создаваемое всеми элементами антенны, $\dot{\xi}_0$ и S_0 — колебательная скорость и площадь рассматриваемого элемента. Выберем систему координат x, y, z так, чтобы начало ее совпадало с центром элемента $\alpha = 0$ (α — номер элемента), а оси x и y располагались в плоскости антенны, причем ось x проходила бы через центры всех элементов. Кроме того, в центр каждого элемента поместим начало вспомогательной системы координат x_α, y_α так, чтобы $x = \alpha d + x_\alpha$; $y = y_\alpha$ (d — расстояние между центрами соседних элементов). Напишем выражение для колебательной скорости поверхности элемента с номером α в виде

$$\dot{\xi}_\alpha = \dot{\xi}_\omega(x_\alpha, y_\alpha) e^{i\gamma_\alpha}, \tag{2}$$

где $\omega(x_\alpha, y_\alpha)$ — форма колебаний поверхности элемента, γ_α — фазовая задержка, осуществляющая компенсацию антенны в направлении θ_0 .

Записывая давления, создаваемые всеми элементами антенны на поверхности элемента $\alpha = 0$ и воспользовавшись разложением сферической волны по плоским (совершенно аналогично тому, как это сделано в работе [1] для случая бесконечной двумерной антенной решетки), получим

$$W = \frac{k^2 \rho c |\dot{\xi}|^2}{8\pi^2} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \exp \{ ik\alpha d (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) \} \times \\ \times \int_{S_0} \int_{S_\alpha} \omega(x_0, y_0) \omega(x_\alpha, y_\alpha) \exp \{ -ik[(x_\alpha - x_0) \sin \theta \cos \varphi + (y_\alpha - y_0) \times \\ \times \sin \theta \sin \varphi] \} dS_0 dS_\alpha \sin \theta d\theta d\varphi. \tag{3}$$

Бесконечная сумма по α равна сумме δ -функций («периодической» δ -функции)

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \exp \{ i k a d (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left[\frac{d}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) + n \right],$$

а двойной интеграл по S_0 и S_α пропорционален квадрату модуля характеристики направленности элемента в направлении θ, φ . Учитывая сделанные замечания, мы получаем

$$W = \frac{k^2 \rho c S_0^2 |\xi|^2}{8\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} |R(\theta, \varphi)|^2 \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left[\frac{d}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) + n \right] \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4)$$

Здесь $S_0 = \int \omega(x_0, y_0) dS_0$ — эффективная площадь элемента антенны; $R(\theta, \varphi)$ — его характеристика направленности. Производя замену переменных $u = \sin \theta \cos \varphi, v = \sin \theta \sin \varphi$, получим

$$W = \frac{k^2 \rho c S_0^2 |\xi|^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |R(u, v)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left[\frac{d}{\lambda} (\bar{u} - u) + n \right] \frac{du dv}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad (5)$$

где $\bar{u} = \sin \theta_0$. Учитывая свойства δ -функции, и то, что $Z = 2W / |\xi|^2$, имеем

$$Z = \frac{\rho c S_0^2}{d\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|R(u_n, v)|^2 dv}{\sqrt{1 - u_n^2 - v^2}}, \quad (6)$$

где

$$u_n = \bar{u} + n \frac{\lambda}{d}. \quad (7)$$

Выражение (6) и определяет полное сопротивление излучения элемента, работающего в составе бесконечной периодической линейной антенны.

Для вычисления активного сопротивления излучения, очевидно, можно ограничиться суммированием по таким n и интегрированием по таким v , чтобы $u_n^2 + v^2$ было меньше единицы. Поэтому для вычисления $\text{Re } Z$ интегрирование следует производить в пределах от $-\sqrt{1 - u_n^2}$ до $+\sqrt{1 - u_n^2}$, для вычисления $\text{Im } Z$ от $-\infty$ до $-\sqrt{1 - u_n^2}$ и от $+\sqrt{1 - u_n^2}$ до ∞ . Поскольку сумма по n возникла в результате интегрирования произведения непрерывной функции на сумму δ -функций, в тех случаях, когда одна или две δ -функции совпадают с границей раздела вещественной и мнимой частей подынтегрального выражения (т. е., когда $\bar{u}_n = u + n \frac{\lambda}{a} = 1$), следует половину соответствующего слагаемого отнести к вещественной части Z , а половину — к мнимой. Для учета этого обстоятельства при записи формул для расчета $\text{Re } Z$ и $\text{Im } Z$ после знака суммы можно поставить множитель $1 / \eta_n$, где

$$\eta_n = \begin{cases} 2 & \text{при } |u_n| = 1 \\ 1 & \text{при } |u_n| \neq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Будем предполагать, что краевые эффекты не оказывают существенного влияния на сопротивление излучения Z_a большой антенны; тогда $Z_a = NZ$, где N — общее число элементов антенны. Коэффициент концентрации антенны будем определять по формуле

$$K = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{\left| p_a \frac{r}{\xi} \right|^2}{\text{Re } Z_a}. \quad (9)$$

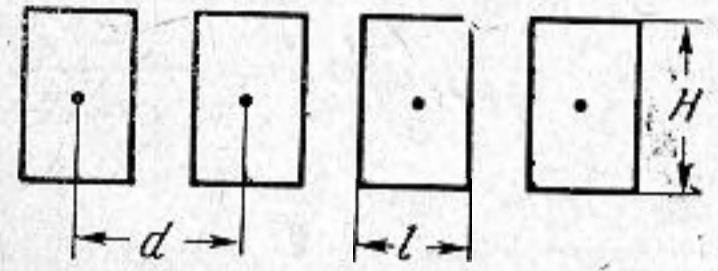
Поскольку модуль давления, развиваемого антенной в дальнем поле, в направлении θ_0 (или, после введения новой системы координат, в направлении $u = u_0$) можно определить как

$$|p_a| = - \frac{ik\rho c \xi S_a N}{2\pi r} R(u_0), \quad (10)$$

то, подставляя выражения (6), (8) и (10) в формулу (9), имеем

$$K = \frac{4\pi d N}{\lambda} \frac{|R(u_0)|^2}{\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_n} \int_{n-\sqrt{1-u_n^2}}^{\sqrt{1-u_n^2}} \frac{|R(u_n, v)|^2 dv}{\sqrt{1-u_n^2-v^2}}}. \quad (11)$$

В общем случае при произвольном виде характеристики направленности элемента антенны расчет ее коэффициента концентрации по формуле (11) весьма затрудняется необходимостью вычисления интеграла по v (хотя и остается более простым, чем при вычислении другими известными в настоящее время методами). Однако существует ряд частных случаев, когда это интегрирование выполнимо. Одним из таких случаев является часто используемый при исследованиях (например, в работе [2]) случай аппроксимации характеристики направленности элемента антенны одной из функций семейства $\cos^r \theta$. Формула (11) при этом дает следующие выражения:



Фиг. 1

$$\text{для } r = 1/2 \quad K = N \frac{d}{\lambda} \frac{2\pi}{1 + 2\beta \left[1 - \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \right]^{1/2}},$$

$$\text{для } r = 1 \quad K = N \frac{d}{\lambda} \frac{8}{1 + 2\beta \left[1 - \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \right]},$$

$$\text{для } r = 2 \quad K = N \frac{d}{\lambda} \frac{10,66}{1 + 2\beta \left[1 - \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \right]^2}$$

Эти формулы получены для случая $d/\lambda < 2$ и $\theta_0 = 0$, причем

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } d/\lambda < 1 \\ 1 & \text{при } 1 < d/\lambda < 2. \end{cases}$$

Рассмотрим линейную антенну, состоящую из прямоугольных поршней (фиг. 1). Характеристика направленности элемента в системе координат u, v , выражается так:

$$R(u, v) = \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} u\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} u} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi H}{\lambda} v\right)}{\frac{\pi H}{\lambda} v}.$$

В этом случае из формулы (6) имеем

$$\operatorname{Re} Z = \frac{\rho c S_a^2}{d\lambda} \sum_{n=-E[d/\lambda(1+\bar{u})]}^{E[d/\lambda(1-\bar{u})]} \frac{1}{\eta_n} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} u_n\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} u_n} \right]^2 \int_{- \sqrt{1-u_n^2}}^{\sqrt{1-u_n^2}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi H}{\lambda} v\right)}{\frac{\pi H}{\lambda} v} \right]^2 \times \frac{dv}{\sqrt{1-u_n^2-v^2}}. \quad (12)$$

Пределы суммирования определены из выражения (7); $E(v)$ означает целую часть v . Каждое слагаемое суммы (12) определяет мощность, излучаемую в направлении u_n , т. е. в направлении добавочного максимума решетки, равного основному, а вся сумма — полную мощность, излучаемую антенной в область действительных углов.

Рассмотрим два частных случая. В первом положим $H \ll \lambda$ во втором — $H \gg \lambda$ (при этом линейная антенна по существу превращается в плоскую). Для $H \ll \lambda$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi H}{\lambda} v\right)}{\frac{\pi H}{\lambda} v} = 1$$

и

$$\operatorname{Re} Z = \frac{\rho c S_0^2}{d\lambda} \sum_{n=-E[d/\lambda(1+\bar{u})]}^{E[d/\lambda(1-\bar{u})]} \frac{1}{\eta_n} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} u_n\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} u_n} \right]^2, \quad (13)$$

$$K = \frac{4dN}{\lambda} \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \bar{u}\right) / \frac{\pi l}{\lambda} \bar{u} \right]^2}{\sum_{n=-E[d/\lambda(1+\bar{u})]}^{E[d/\lambda(1-\bar{u})]} \frac{1}{\eta_n} \left[\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} u_n\right) / \frac{\pi l}{\lambda} u_n \right]^2}. \quad (14)$$

Заметим, что при аппроксимации характеристики направленности элемента некоторой функцией, справедливой только в области действительных пространственных углов, по формуле (6) можно вычислить только активную часть сопротивления излучения. Это замечание относится как к рассматриваемому случаю, так и к случаю $R(\theta) = \cos^r \theta$. Для случая $H \gg \lambda$ можно положить

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi H}{\lambda} v\right)}{\frac{\pi H}{\lambda} v} \right]^2 = \frac{\lambda}{H} \delta(v).$$

При этом

$$Z = \frac{\rho c S_0^2}{dH} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} u_n\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} u_n} \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1-u_n^2}}. \quad (15)$$

Активное сопротивление излучения можно определить по формуле (15), если суммирование проводить в пределах от $-E[d/\lambda(1+\bar{u})]$ до $E[d/\lambda(1-\bar{u})]$. Коэффициент концентрации при $H \gg \lambda$ будет

$$K = \frac{4\pi NdH}{\lambda^2} \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \bar{u}\right) / \frac{\pi l}{\lambda} \bar{u} \right]^2}{\sum_{n=-E[d/\lambda(1+\bar{u})]}^{E[d/\lambda(1-\bar{u})]} \left[\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} u_n\right) / \frac{\pi l}{\lambda} u_n \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1-u_n^2}}}. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда характеристика направленности решетки имеет всего один максимум, равный единице. При этом $-\frac{d}{\lambda}(1+\bar{u}) =$

* Формула (15) другим способом получена в работе [3], о чем автору данной статьи стало известно в период подготовки рукописи к печати.

$$= -\frac{d}{\lambda} (1 + \sin \theta_0) > -1; \quad \frac{d}{\lambda} (1 - \sin \theta_0) < 1; \quad \text{и в сумме по } n \text{ остается}$$

всего одно слагаемое $n = 0$.

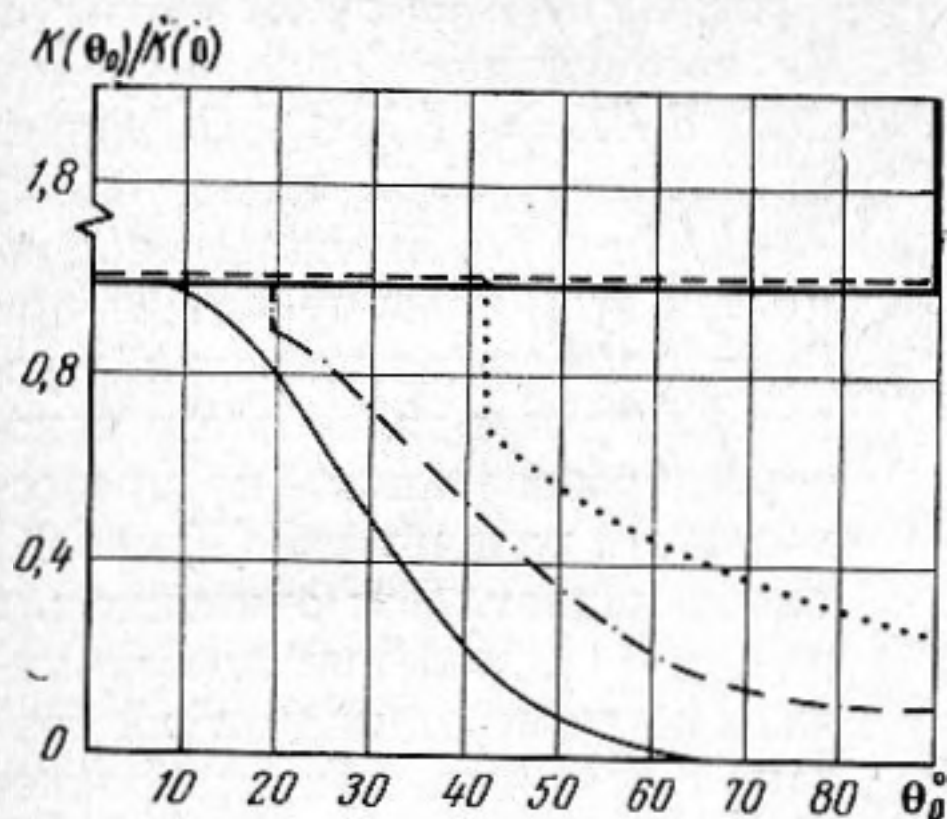
Для случая $H \ll \lambda$

$$K = \frac{4dN}{\lambda} = \frac{4L_a}{\lambda} \quad (17)$$

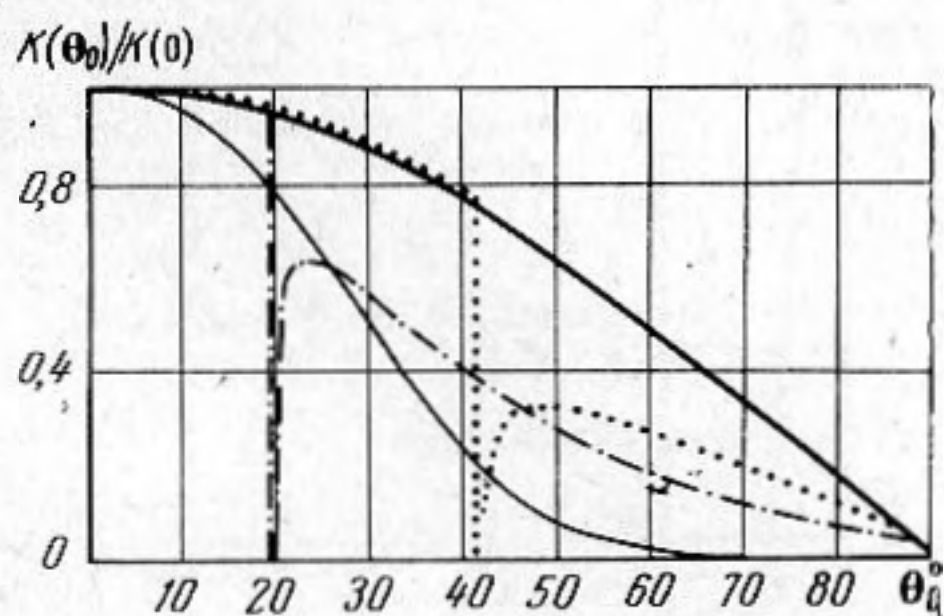
Для случая $H \gg \lambda$

$$K = \frac{4\pi NdH}{\lambda^2} \sqrt{1 - u_0^2} = \frac{4\pi S_a}{\lambda^2} \cos \theta_0. \quad (18)$$

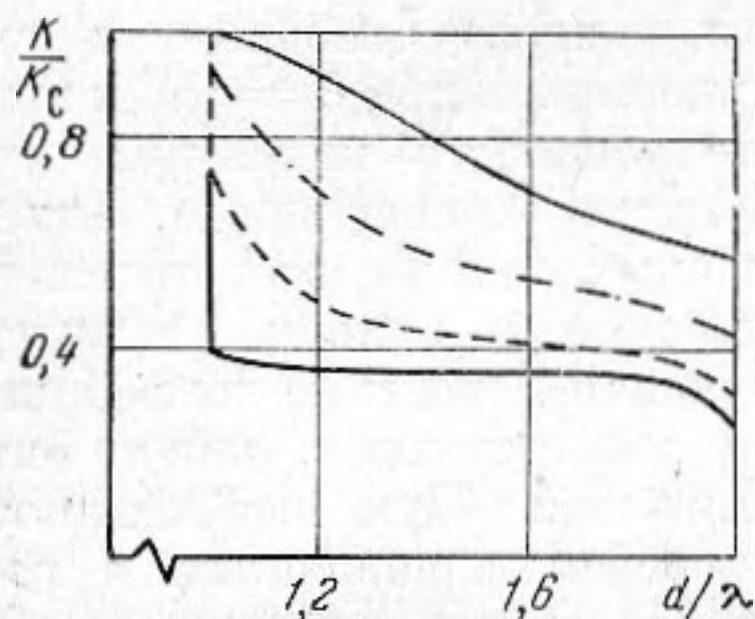
Здесь L_a — длина линейной антенны, S_a — площадь плоской антенны. Таким образом, независимо от длины элемента l , если только в характеристике направленности решетки отсутствуют добавочные максимумы, рав-



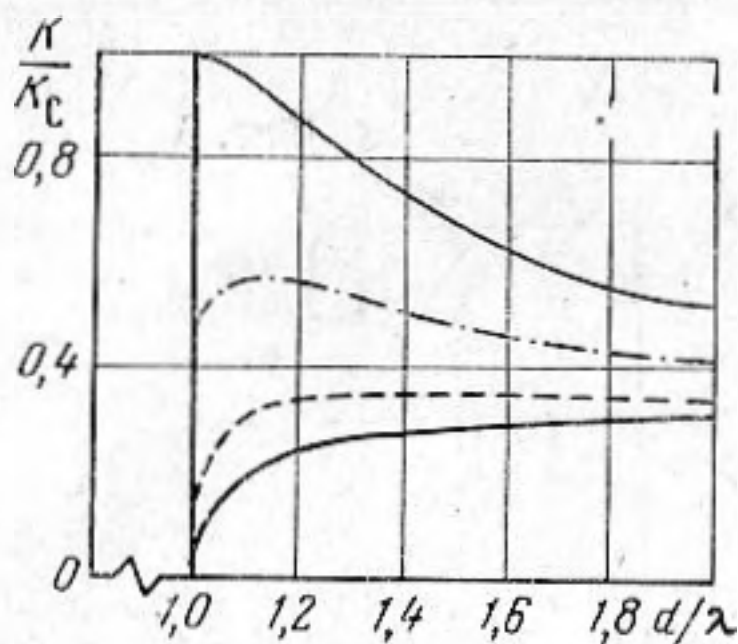
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

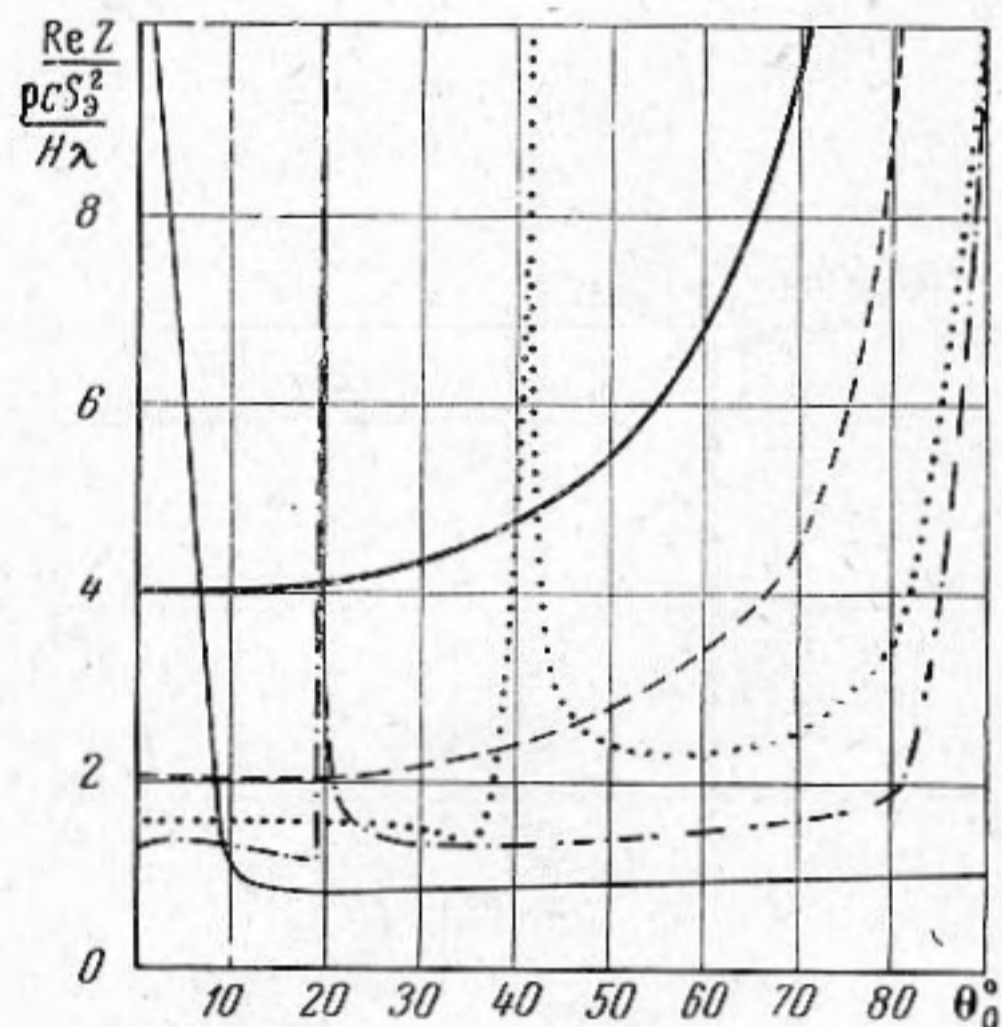
ные основному, то коэффициент концентрации антенны при $H \ll \lambda$ совпадает с коэффициентом концентрации сплошной линии в экране, а при $H \gg \lambda$ — с коэффициентом концентрации сплошного поршня в экране. С увеличением угла компенсации K антенны при $H \gg \lambda$ изменяется по закону $\cos \theta_0$, а при $H \ll \lambda$ остается постоянным до $\theta_0 = 90^\circ$.

Отличие в зависимостях K от θ_0 в рассматриваемых случаях можно объяснить следующим образом. С увеличением θ_0 характеристика направленности антенны при $H \ll \lambda$ в плоскости компенсации расширяется примерно по закону $\cos^{-1} \theta$, а в перпендикулярной плоскости остается неизменной. Поэтому $K(\theta_0)$ изменяется пропорционально $\cos \theta_0$. Характеристика же направленности при $H \ll \lambda$ так же расширяется по закону $\cos^{-1} \theta$, но остается симметричной относительно оси линейной решетки (если рассматривать для простоты антенну без экрана) и потому как бы уменьшается в сечении конической поверхностью соосной антенне по закону

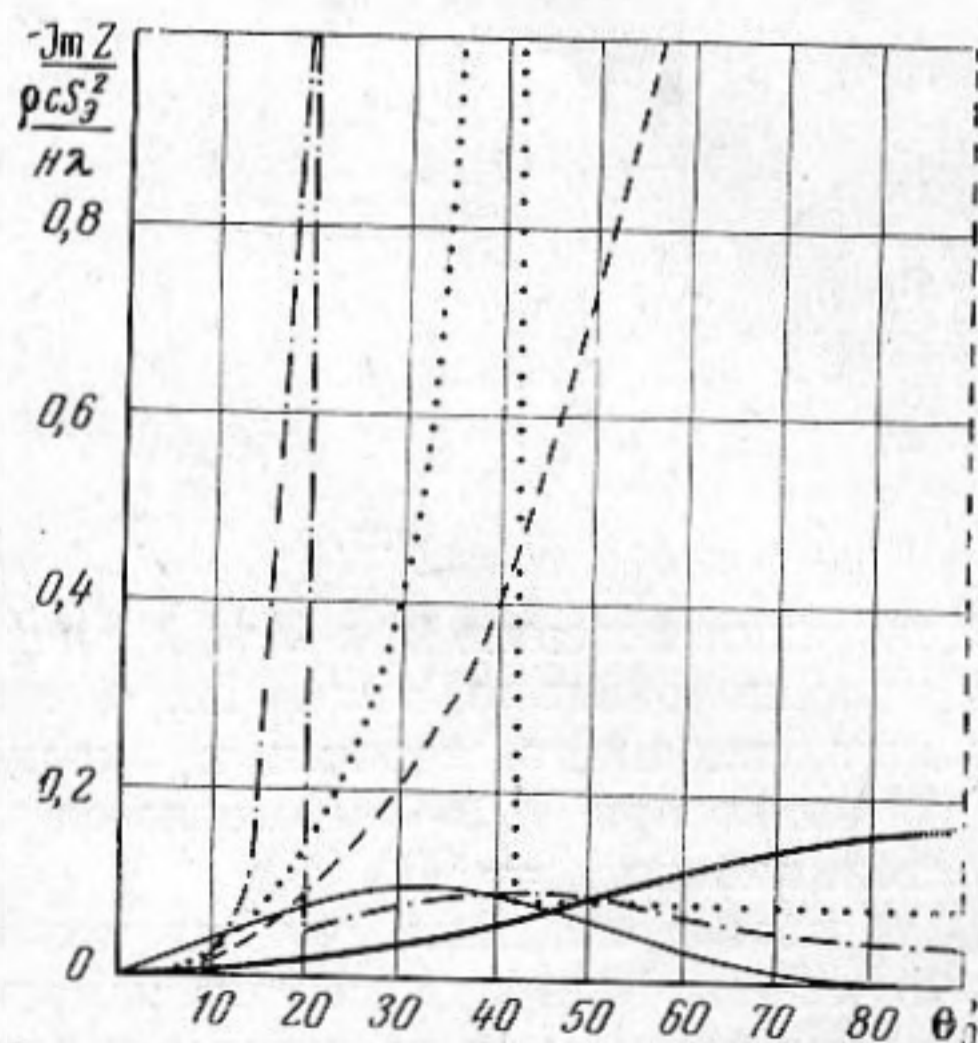
$\cos \theta_0$. В результате совместного действия этих причин коэффициент концентрации линейной антенны при $H \ll \lambda$ остается постоянным.

На графиках фиг. 2—7 приведены некоторые результаты расчетов. На этих графиках сплошными толстыми линиями обозначены случаи $l/\lambda = 0,25$, штриховыми — $l/\lambda = 0,5$, штрихпунктирными $l/\lambda = 0,75$ и тонкими сплошными — $l/\lambda = 1$; пунктиром обозначены случаи $l/\lambda = 0,6$.

В случае $H \ll \lambda$ и $d/\lambda = l/\lambda$ (фиг. 2) при $d/\lambda < 0,5$ с увеличением θ_0 коэффициент концентрации остается постоянным, но при $\theta_0 = 90^\circ$ скачком удваивается, как и в случае непрерывной линейной антенны [4]. При $0,5 < d/\lambda < 1$ вначале коэффициент концентрации не изменяется, а потом, начиная с угла компенсации $\theta_0 = \theta'$, при котором появляется равный основному добавочный максимум характеристики направленности решетки падает.



Фиг. 6



Фиг. 7

совпадает с коэффициентом концентрации соответствующей сплошной антенны K_c . На графиках фиг. 4 и 5 представлены зависимости K/K_c соответственно для случаев $H \ll \lambda$ и $H \gg \lambda$ при $1 < d/\lambda < 2$. Характер кривых фиг. 5 определяется двумя факторами: быстротой спада

коэффициента концентрации при $d/\lambda = l/\lambda \leq 0,5$ падает по закону $\cos \theta_0$; при $0,5 < d/\lambda < 1$ вначале подчиняется этому закону, затем при $\theta_0 = \theta'$ наблюдается резкий провал до нуля и далее после некоторого возрастания (не превосходящего величины $K(0) \cos \theta_0$) снова падает. Как отмечалось в работе [1], падение коэффициента концентрации до нуля связано с тем, что при приближении размеров антенны к бесконечности, отношение ширины добавочного максимума решетки, равного основному и появляющегося при $\theta = 90^\circ$ к ширине основного максимума стремится к бесконечности. Для конечных антенн это отношение конечно и кривая, характеризующая поведение коэффициента концентрации, как-то сглаживается. При необходимости способом, изложенным в работе [1], можно получить приближенные значения искомых параметров и в этом случае.

Рассмотрим зависимость коэффициента концентрации от расстояния между элементами d/λ при $\theta_0 = 0$. Поскольку при $0 < d/\lambda < 1$ в этом случае существует только один максимум характеристики направленности решетки, равный единице, то K антенны в соответствии с формулами (17) и (18)

квадрата характеристики направленности элемента в направлении существования максимума, равного основному — θ_1 и шириной этого максимума, определяемого законом $\cos^{-1} \theta_1$. При малой направленности элемента ($l/\lambda = 0,25$) с ростом d/λ растет и K/K_c , поскольку при этом θ_1 уменьшается, а влияние характеристики направленности элемента мало. При большой направленности элемента с ростом d/λ происходит падение K/K_c , так как обсуждение максимума, равного основному, происходит медленнее, чем рост $R_0^2(\theta_1)$.

На графиках фиг. 6 и 7 показано относительное изменение активного и реактивного сопротивления излучения элемента при изменении θ_0 для случая $H/\lambda \gg 1$ при $d/\lambda = l/\lambda$. Как видно из графиков, изменение этих параметров с ростом угла компенсации антенны весьма значительно, даже для малых d/λ . Для больших d/λ наблюдаются резкие выбросы, которые в силу сказанного выше, присущи бесконечной антенне, а для большой, но конечной антенны будут сглажены.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Смаришев. Определение коэффициента концентрации большой периодической плоской антенны и сопротивления излучения ее элемента. Акуст. ж., 1968, 14, 2, 268—274.
2. Э. Л. Виноградова, В. В. Фурдурев. Коэффициент направленности линейной группы направленных излучателей. Акуст. ж., 1966, 2, 181—184.
3. V. Mangulis. Near-field pressure for an infinite array of strips. Trans. IRE, Son Ultrason., July, 1966, SU-13, 2, 49—53.
4. М. Д. Смаришев. О приближенном вычислении коэффициента концентрации непрерывных компенсированных систем. Акуст. ж., 1963, 9, 2, 246—247.

Ленинград

Поступила в редакцию
27 марта 1967 г.