

где  $K_L = \left[ \frac{4\pi\beta_z^2}{\varepsilon_0\rho_1c_L^2} \right]^{1/2}$  — коэффициент электромеханической связи для продольных волн в пьезополупроводниковом стержне,  $c_L = (N/\rho_1)^{1/2}$  — скорость продольных волн в стержне, и  $K_L < 1$ ,  $\delta < 1$ .

Таким образом, уравнение (9) можно решать относительно  $k_z$  методом последовательных приближений.

Полагая  $k_z = k_{j0}$  и, далее,  $k_z = k_{j0} + \alpha$ , имеем

$$\alpha = -^{1/4}k_{j0}(\delta + \mu). \quad (11)$$

На основании равенства (10) напомним  $\text{Im } \delta = k_L^2 \varepsilon_0 \text{Im}(\varepsilon_{zz}^{-1})$  и, принимая во внимание равенство (7), получаем

$$\text{Im } \delta = K_L^2 \varepsilon_0 \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega v} (1 - \beta)}{\varepsilon_0^2 (1 - \beta)^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^2 v^2} \left[ 1 + \varepsilon_0 \frac{4\omega r_D^2}{ac_L} \right]^2}. \quad (12)$$

Из выражения (12) видно, что при  $\beta > 1$  знак  $\text{Im } \delta$  изменяется, а при некотором  $\beta = \beta_{кр} > 1$  может оказаться, что  $\text{Im } \alpha = 0$  и  $k_z$  становится вещественной величиной. Следовательно, существует такой угол падения звуковой волны на стержень и такое значение скорости дрейфа носителей в пьезополупроводниковом стержне, когда амплитуда рассеянной стержнем волны может значительно возрасти (устремляется к бесконечности) и будет наблюдаться усиление рассеянной стержнем волны.

Усиление звуковых колебаний в среде будет осуществляться за счет энергии дрейфа носителей заряда в пьезополупроводнике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Пустовойт и М. Е. Герценштейн. О возможности усиления изгибных волн. Физ. тв. тела, 1964, 6, 3, 879—887.
2. Л. М. Лямшев. К теории рассеяния звука тонким стержнем. Акуст. ж., 1956, 2, 4, 358—365.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступило в редакцию  
13 марта 1968 г.

УДК 534.833.524

### ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПРОКЛАДКУ, РАСПОЛОЖЕННУЮ НА СТЫКЕ ПЛАСТИН

*В. Т. Ляпунов, Г. Я. Саволайнен*

В случае одномерной системы виброизолирующие свойства упругой прокладки были рассмотрены в работе [1] и экспериментально исследованы в работе [2]. При нормальном падении волны изгиба на границу результаты, полученные в работе [1], применимы и для пластин, соединенных встык через прокладку. Однако в ряде практических случаев поле изгибных волн в пластинах имеет диффузный характер. Это требует рассмотрения виброизолирующих свойств прокладок по отношению к изгибной волне, падающей под произвольным углом  $\varphi$ .

Рассмотрим прохождение монохроматических изгибных волн через упругую прокладку толщиной  $2l$ , расположенную между двумя полубесконечными пластинами. Пластины будем для простоты полагать одинаковыми по сечению и механическим константам и лежащими в одной плоскости. Предполагая, что толщина прокладки мала по сравнению с длиной изгибных волн в соединяемых пластинах и длиной волн сдвига в материале прокладки, для перерезывающей силы и изгибающего момента в поперечных сечениях прокладки при указанных выше допущениях можно написать следующие выражения через смещения  $w$  концевых сечений 1 и 2 пластины

$$F = -G_{II} S_{II} \left[ \frac{w_2 - w_1}{2l} \right], \quad M = -\frac{E_{II} I_{II}}{2l} \frac{\partial (w_2 - w_1)}{\partial x},$$

где  $G_{II}$  и  $E_{II}$  — модуль сдвига и модуль Юнга материала прокладки;  $I_{II}$  и  $S_{II}$  — момент инерции и площадь поперечного сечения единицы длины прокладки, которые

в общем случае могут отличаться от соответственных геометрических параметров пластины.

Порядок решения подобных задач на примере ребра жесткости подробно изложен в работе [3] и поэтому здесь опускается. В результате решения получены коэффициенты отражения и прохождения изгибных волн в следующем виде:

$$R = \frac{1}{iA-1} + \frac{1}{1-iB}, \quad T = 1 + \frac{1}{iA-1} - \frac{1}{1-iB}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A &= a_2 + \zeta, & B &= b_2 - 1/\zeta, \\ a_2 &= 4 \cos \varphi (1-a)^{-2} / \alpha, & b_2 &= 4(1+a)^{-2} / (\beta \cos \varphi), \\ a &= (1-\nu) \sin^2 \varphi, & \zeta &= (1+a)^2 \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi)^{-1/2} (1-a)^{-2}, \\ \alpha &= 2Dk_p l / (E_{II} I_{II}), & \beta &= 2Dk_p^3 l / (G_{II} S_{II}), \end{aligned}$$

$D$  — цилиндрическая жесткость соединяемых пластин,  $k_p$  — волновое число распространяющейся изгибной волны,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

При  $\varphi = 0$  выражения (1) преобразуются в соответственные выражения для одномерной системы, состоящей из двух стержней, разделенных упругой прокладкой [70]. Из этих формул следует, что при прохождении изгибных волн через прокладку в случае, когда сечение прокладки совпадает с поперечным сечением стержня, частота полной изоляции оказывается за пределами применимости теории.

На практике нередко размеры прокладки не совпадают с размерами сечения стержней, например при наличии фланцев. Тогда частота «полной изоляции» может оказаться в исследуемом диапазоне и изменит частотную зависимость виброизоляции.

На фиг. 1 приведена частотная зависимость виброизоляции упругой прокладки с параметрами:  $E_{II} = 2 \cdot 10^8$  дн/см<sup>2</sup>;  $G_{II} = 0,7 \cdot 10^8$  дн/см<sup>2</sup>;  $S_{II} = 5,5$  см;  $I_{II} = 28$  см<sup>3</sup>;  $2l = 1,0$  см, расположенной между двумя полубесконечными стальными пластинами толщиной 4 мм. Расчет показывает, что с увеличением угла падения изгибной волны на границу пластины — прокладка частота полного отражения перемещается в область более высоких частот, при этом одновременно растет ширина максимума виброизоляции.

Если в пластине поле изгибных волн диффузно, характеристикой виброизоляции прокладки служит величина  $\langle T^2 \rangle$ , т. е.

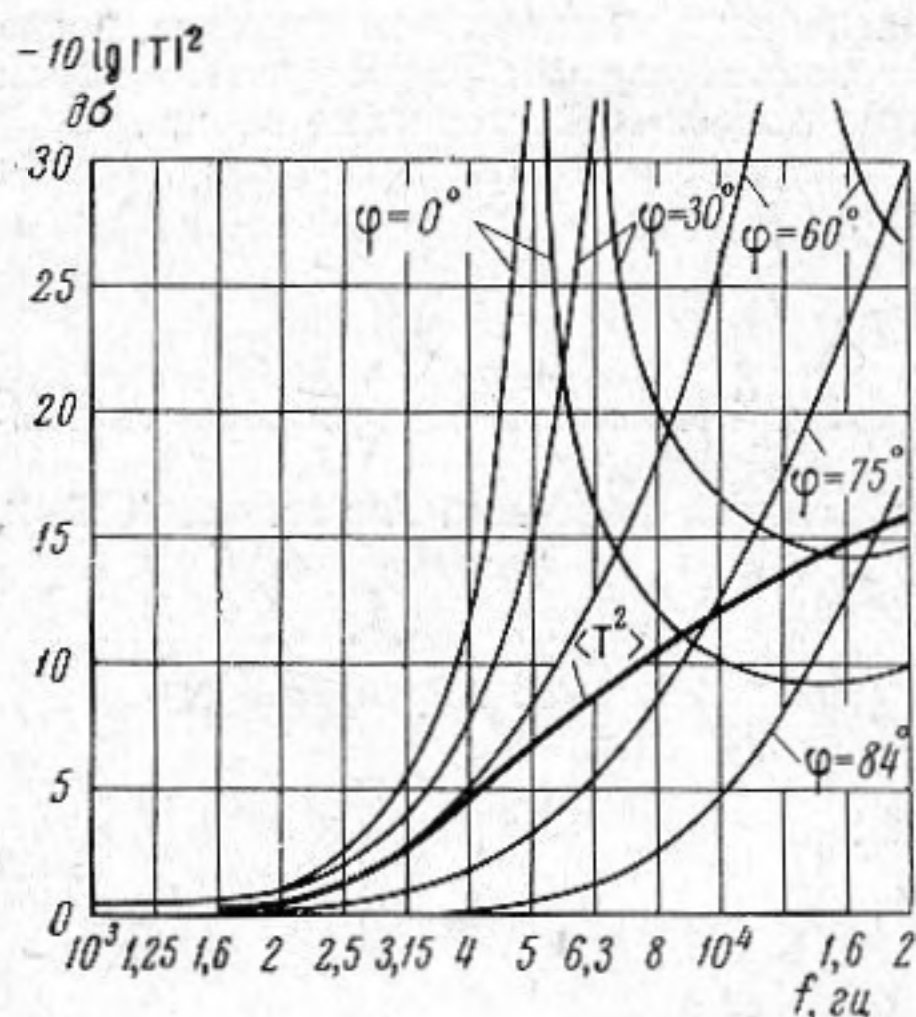
усредненный по углу квадрат модуля коэффициента прохождения. Аналитически проинтегрировать выражение для  $|T|^2$  трудно, поэтому использовано численное интегрирование. Зависимость  $\langle T^2 \rangle$  от частоты представлена на фиг. 1. Эта зависимость показывает, что виброизоляция упругой прокладки при диффузном поле изгибных волн монотонно растет с ростом частоты в среднем как 5 дб на октаву.

Известно, что внутренние потери виброизолирующих препятствий в случае изоляции от вибраций ограниченных конструкций оказывают значительное влияние на результирующий эффект виброизоляции. Для количественной оценки влияния внутренних потерь на прохождение и отражение волн изгиба упругой прокладкой представим модуль Юнга и модуль сдвига в комплексном виде:  $E_{II} = E_0(1 + i\eta_l)$ ,  $G_{II} = G(1 + i\eta_q)$ . Для резиноподобных материалов  $\eta_l = \eta_q$ . С учетом потерь колебательной энергии в материале прокладки получим

$$|T|^2 = \frac{(1 + a_0 b_0 - a_1 b_1)^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)^2}{[(1 + a_1)(1 + b_1) - a_0 b_0]^2 + [a_0(1 + b_1) + b_0(1 + a_1)]^2}, \quad (2)$$

где  $a_1 = \eta_l a_2$ ;  $b_1 = \eta_q b_2$ ;  $a_0 = a_2 + \zeta$ ;  $b_0 = b_2 - 1/\zeta$ .

Из выражения (2) видно, что в общем случае условие «полной виброизоляции» при наличии потерь не выполняется. Следовательно, в области частот полной изоляции влияние потерь будет значительным. На более высоких частотах влияние потерь в материале прокладки на коэффициент прохождения изгибных волн сравнительно невелико. Например, на высоких частотах (при  $\beta \gg a \gg 1$ ) коэффициент прохождения изгибных волн может быть оценен по формуле  $|T|^2 \simeq (1 + \eta^2) / a^2$ . Даже при таких больших значениях коэффициента потерь, как  $\eta = 1$ , изменение модуля коэффициента прохождения составляет лишь 3 дб, т. е. мало по сравнению с большими значениями достигаемой виброизоляции.



Фиг. 1

Влияние потерь в материале прокладки наиболее сильно сказывается на ее вибропоглощающих свойствах. Мерой поглощения в прокладке колебательной энергии падающей изгибной волны является величина  $d = 1 - |R|^2 - |T|^2$ , которую мы будем называть коэффициентом поглощения. Используя комплексное представление упругих констант из выражений (1), можно получить

$$d = \frac{2b_1}{b_0^2 + (1 + b_1)^2} + \frac{2a_1}{a_0^2 + (1 + a_1)^2}. \quad (3)$$

Первое слагаемое в формуле (3) характеризует поглощение энергии вследствие деформации сдвига в прокладке, второе — вследствие ее изгибных деформаций. Анализ выражения (3) показывает, что доля поглощаемой в прокладке энергии падающей изгибной волны может быть значительной. Так, при  $\varphi = 0$  слагаемое, определяющее поглощение вследствие деформации сдвига в прокладке, достигает своего максимального значения, равного  $1/2$ , при вполне реальных условиях: коэффициенте потерь  $\eta = 1$  и частоте  $f_q = (2G_0H/l)^{2/3} / (2\pi m^{1/2}D^{1/6})$ , где  $m$  — масса единицы площади соединяемых пластин. Максимальное значение второго слагаемого при  $\varphi = 0$ , равное  $1/(1 + \sqrt{2})$ , несколько меньше, чем при сдвиге, может быть достигнуто лишь при условиях  $\eta \gg 1$  и  $\frac{2E_0I_{II}}{klD} \ll 1$ . Тем не менее и вследствие изгибных деформаций прокладки происходит также значительное поглощение колебательной энергии. Так например, при коэффициенте потерь  $\eta = 1$  на частоте

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2E_0I_{II}}{ml}}$$

величина второ-

го слагаемого достигает  $1/4$ .

На фиг. 2 представлена зависимость коэффициента поглощения от частоты при различных углах падения изгибной волны на границу пластина — прокладка ( $\eta = 0,5$  остальные параметры прокладки указывались выше). Расчет показывает, что с увеличением угла падения коэффициент поглощения несколько уменьшается, частотная зависимость его при этом изменяется незначительно. На той же фигуре представлена частотная зависимость коэффициента поглощения, осредненного по углу в пределах от 0 до  $\pi/2$ .

При  $\eta < 0,5$  коэффициент поглощения изменяется почти пропорционально коэффициенту потерь материала. При дальнейшем увеличении коэффициента потерь коэффициент поглощения растет медленнее.

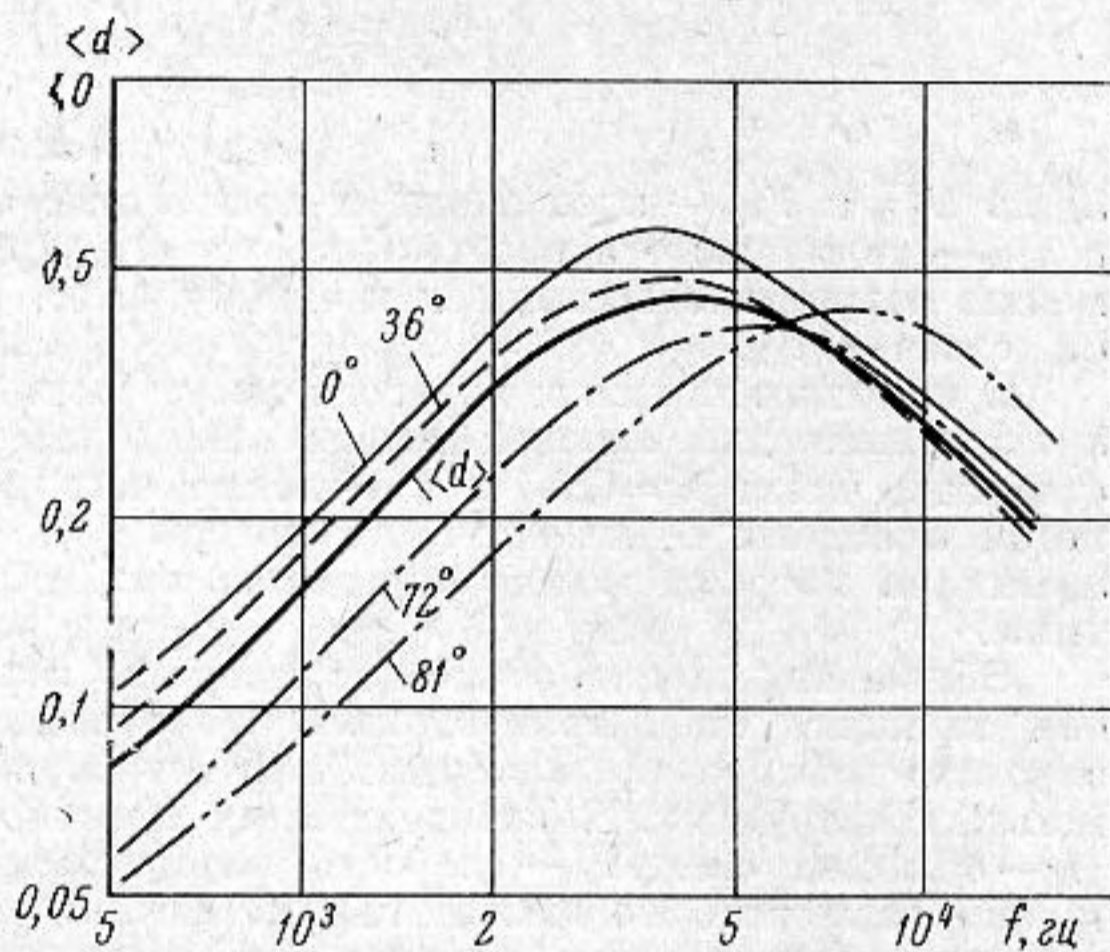
Анализ влияния других параметров прокладки и пластин на величину коэффициента поглощения показывает, что их изменение приводит лишь к изменению частоты максимума; при этом величина максимального значения и характер частотной зависимости коэффициента поглощения изменяются незначительно. Большие значения коэффициента поглощения, достигаемые при практически осуществимых условиях, позволяют обеспечить требуемую эффективность виброизоляции ограниченных конструкций без применения дополнительных вибропоглотителей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Cremer. Calculations of Sound Propagation in Structures. *Acustica*, 1953, 3, 5, 317—335.
2. M. Exner, W. Böhme. Messung der Körperschalldämmung bei BiegeWellen. *Akust. Beihefte*, 1953, 1, 172—190.
3. E. E. Ungar. Transmission of plate flexural waves through beams. *J. Acoust. Soc. America*, 1961, 33, 5, 633—640.

Ленинград

Поступила в редакцию  
22 августа 1966 г.



Фиг. 2