АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 1

УДК 534—16.1

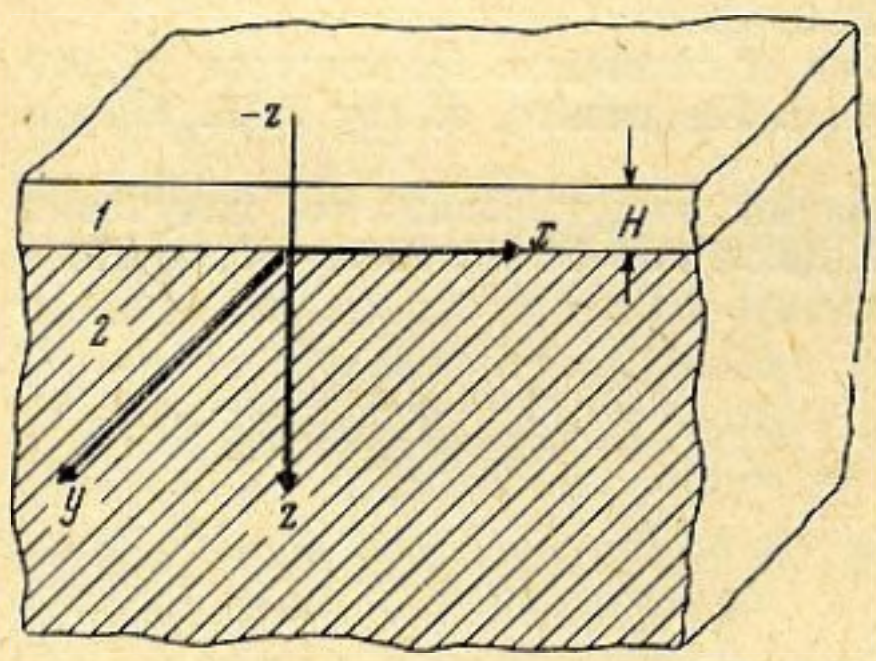
# О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ СЛОЙ — ПОЛУПРОСТРАНСТВО

*С. В. Богданов, М. Д. Левин, И. Б. Яковкин*

Решена задача о структуре и дисперсии упругих поверхностных волн в системе пленка (CdS) — подложка (плавленый кварц). Показано, что при достаточно малых толщинах слоя структура поверхностных волн в этой системе незначительно отличается от структуры рэлеевской волны в материале подложки. Рассчитана зависимость скорости упругих поверхностных волн в системе для $H/\lambda \leqslant 10^{-1}$. Расхождение экспериментальной и теоретической кривых дисперсии не превышает 1,5%. На основании теоремы единственности делается вывод, что ответственный за все эффекты, связанные с прохождением упругих поверхностных волн в данной системе, может быть только квазирэлеевская волна.

Распространение упругих поверхностных волн в системе слой — полупространство, составленной из произвольных материалов, исследовалось рядом авторов [1—4].

В работах [1—3] получено общее решение для системы без потерь. В работе [4] решалась задача о распространении упругих поверхностных волн в слое с потерями и, в частности, показано, что при слабом поглощении в материале слоя влиянием поглощения на дисперсию волны можно пренебречь. Однако упомянутые работы не доведены до конкретных расчетных формул, позволяющих непосредственно оценить влияние слоя на распространение упругих поверхностных волн. Целью настоящей работы является получение уравнения для определения скорости этих волн в системе слой (CdS) — подложка (плавленый кварц) в зависимости от толщины слоя. Так как поглощение звука в CdS на частотах порядка десятков мегагерц мало, следуя работе [4], не будем его учитывать.




Фиг. 1

Решение этой задачи можно выполнить путем введения звуковых потенциалов. Мы наметим кратко этот метод решения.

Рассмотрим (см. фиг. 1) полубесконечную изотропную среду *2*, на которой покоится бесконечный изотропный слой *1*, толщиной *H*. Потери в обеих средах отсутствуют. Свойства границы слоя с полупространством предполагаются такими, что напряжения и смещения на ней непрерывны.

Пусть плоская упругая поверхностная волна с частотой $\omega$ и волновым числом $\xi$ распространяется вдоль оси $x$. Вектор смещения частиц в волне можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi, \tag{1}$$

где $\varphi$ и $\psi$ — скалярный и векторный потенциалы, которые должны быть решениями следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_l^2\nabla^2\varphi = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} - c_t^2\nabla^2\psi_i = 0. \tag{2}$$

Всем величинам, относящимся к слою, приписывается индекс 1, полупространству — 2. Наличие в слое двух границ приводит к следующей записи потенциалов упругих поверхностных волн в слое:

$$\varphi_1 = (A_1 \operatorname{ch} \alpha_1 z + B \operatorname{sh} \alpha, z)\exp i(\xi x - \omega t),$$
$$\psi_1 = (\mathrm{C}_1 \operatorname{ch} \beta_1 z + \mathrm{D}_1 \operatorname{sh} \beta_1 z)\exp i(\xi x - \omega t). \tag{3}$$

Волны потенциалов в полупространстве:

$$\varphi_2 = A_2 e^{-\alpha_2 z} \exp i(\xi x - \omega t), \quad \psi_2 = B_2 e^{-\beta_2 z} \exp i(\xi x - \omega t). \tag{4}$$

При выбранной системе координат производные по $y$ равны 0, что приводит к использованию лишь $Y$-компоненты векторных потенциалов. Из формул (2)—(4) следуют соотношения для факторов упругого затухания:

$$\alpha_i^2 = \xi^2 - k_{li}^2; \quad \beta_i^2 = \xi^2 - k_{t\,i}^2; \quad i = 1, 2, \quad k_{l_i}^2 = \frac{\omega^2}{c_{l_i}^2}; \quad k_{t_i}^2 = \frac{\omega^2}{c_{t_i}^2},$$

где $c_{l_i}$ и $c_{t_i}$ — скорости продольной и поперечной волн в материалах слоя и полупространства. Таким образом, задача сводится к нахождению шести амплитуд потенциалов и $\xi$. Обозначим смещения вдоль оси $x$ через $u$, вдоль $z$ — через $w$. Граничные условия требуют, чтобы

1. На свободной поверхности $z = -H$ $\quad \sigma_{zz}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0.$

2. На границе раздела $z = 0$ $\quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}; \ \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}; \quad u^{(1)} = u^{(2)}; \ w^{(1)} = w^{(2)}.$

Используя формулу (1) и граничные условия, получим дисперсионное уравнение в виде определителя шестого порядка, $\Delta = 0$, совпадающего с дисперсионным уравнением [4] без учета диссипации:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 C_{\alpha_1} & -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} S_{\alpha_1} & 2i\xi\beta_1 S_{\beta_1} & -2i\xi C_{\beta_1} & \frac{\mu_2}{\mu_1}\gamma_2 & \frac{\mu_2}{\mu_1} 2i\xi\beta_2 \\ -2i\xi\alpha_1 S_{\alpha_1} & 2i\xi C_{\alpha_1} & \gamma_1 C_{\beta_1} & -\frac{\gamma_1}{\beta_1} S_{\beta_1} & -2\frac{\mu_2}{\mu_1} i\xi\alpha_2 & \frac{\mu_2}{\mu_1}\gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & -2i\xi & -\frac{\mu_2}{\mu_1}\gamma_2 & -\frac{\mu_2}{\mu_1} 2i\xi\beta_2 \\ 0 & 2i\xi & \gamma_1 & 0 & \frac{\mu_2}{\mu_1} 2i\xi\alpha_2 & -\frac{\mu_2}{\mu_1}\gamma_2 \\ i\xi & 0 & 0 & 1 & -i\xi & \beta_2 \\ 0 & 1 & -i\xi & 0 & \alpha_2 & i\xi \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

$$\gamma_i = 2\xi^2 - k_{t_i}^2,$$

где для краткости написания определителя введены обозначения:

$$C_{\alpha_1} = \operatorname{ch} \alpha_1 H - 1, \quad S_{\alpha_1} = \operatorname{sh} \alpha_1 H,$$
$$C_{\beta_1} = \operatorname{ch} \beta_1 H - 1, \quad S_{\beta_1} = \operatorname{sh} \beta_1 H;$$

$\mu_1$ и $\mu_2$ — модули сдвига 1-й и 2-й сред соответственно.

Двойной пунктирной линией обозначен определитель второго порядка $R(\xi)$, являющийся дисперсионным уравнением для рэлеевской упругой поверхностной волны в материале полупространства, и имеющий действительный положительный корень $\xi_{R_2}$.

Отметим следующие свойства определителя (5):

1. $\Delta$ является непрерывной функцией по $\xi$ и $H$ во всей области их изменения [1—3], в частности, при $H = 0$, $\Delta = R(\xi)k_{t_1}^4 = 0$;

2. Вид $\Delta$ указывает на нелинейный закон дисперсии волн в системе;

3. Скорость волн в системе зависит от $H / \lambda$ (но не от абсолютного значения $H$);

4. При малых $H / \lambda$ $\Delta = 0$ имеет единственный вещественный корень по $\xi^2$ [1—3].

Представим $\Delta$ в виде

$$\Delta(\xi, H) = R(\xi)A(\xi, H) + B(\xi, H), \tag{6}$$

где $A(\xi H)$ — алгебраическое дополнение $R(\xi)$, $B(\xi, H)$ — сумма остальных членов определителя 6-го порядка $\Delta$. Полагая $\xi = \xi_{R_2} + \Delta\xi$, $H$ — малым и используя свойства определителя, получим

$$\Delta\xi = -\frac{B(\xi_{R_2}, H)}{A(\xi_{R_2}, H)\left.\dfrac{\partial R}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_{R_2}}}, \tag{7}$$

$$A(\xi_1 H) = k_{t_1}^4 - \xi^2(2k_{t_1}^2 k_{l_1}^2 - k_{t_1}^4)H^2.$$

$$R(\xi) = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (\gamma_2^2 - 4\xi^2\alpha_2\beta_2).$$

$$B(\xi, H) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot k_{t_1}^2 k_{t_2}^2(\gamma_1^2 - 4\xi^2\alpha_1^2)H\beta_2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}k_{t_1}^2 k_{t_2}^2(\gamma_1^2 - 4\xi^2\beta_1^2)H\alpha_2 +$$

$$+ H^2\xi^2\frac{\mu_2}{\mu_1}(\gamma_2 - 2\alpha_2\beta_2)(4\xi^2\beta_1^2 - \gamma_1^2)(k_{t_1}^2 - 2k_{l_1}^2) +$$

$$+ H^2(\xi^2 - \alpha_2\beta_2)(4\xi^2\beta_1^2 - \gamma_1^2)(\gamma_1^2 - 4\xi^2\alpha_1^2) +$$

$$+ H^2\xi^2\frac{\mu_2}{\mu_1}k_{t_1}^2(2\alpha_2\beta_2 - \gamma_2)(4\xi^2\alpha_1^2 - \gamma_1^2).$$

Формула (7) в дальнейшем используется для расчета волны в системе подложка (плавленый кварц) — пленка (сульфид кадмия).

Характерной особенностью пленок CdS является то, что гексагональная ось $C$ кристаллитов текстуры нормальна плоскости подложки. Как известно [5], гексагональный кристалл при распространении в нем волн в направлении, перпендикулярном оси $C$, можно заменить эквивалентной изотропной гипотетической средой, модули упругости которой связаны с модулями гексагонального кристалла соотношениями:

$$c_{11\text{изот}} = c_{n\,\text{CdS}};\quad c_{12\text{изот}} = c_{12\text{CdS}};$$

$$c_{44\text{изот}} = (c_{11} - c_{12})\frac{1}{2}.$$

Именно поэтому пренебрежение кристаллической структурой CdS, т. е. расчет по изотропной модели, не вносит погрешности.

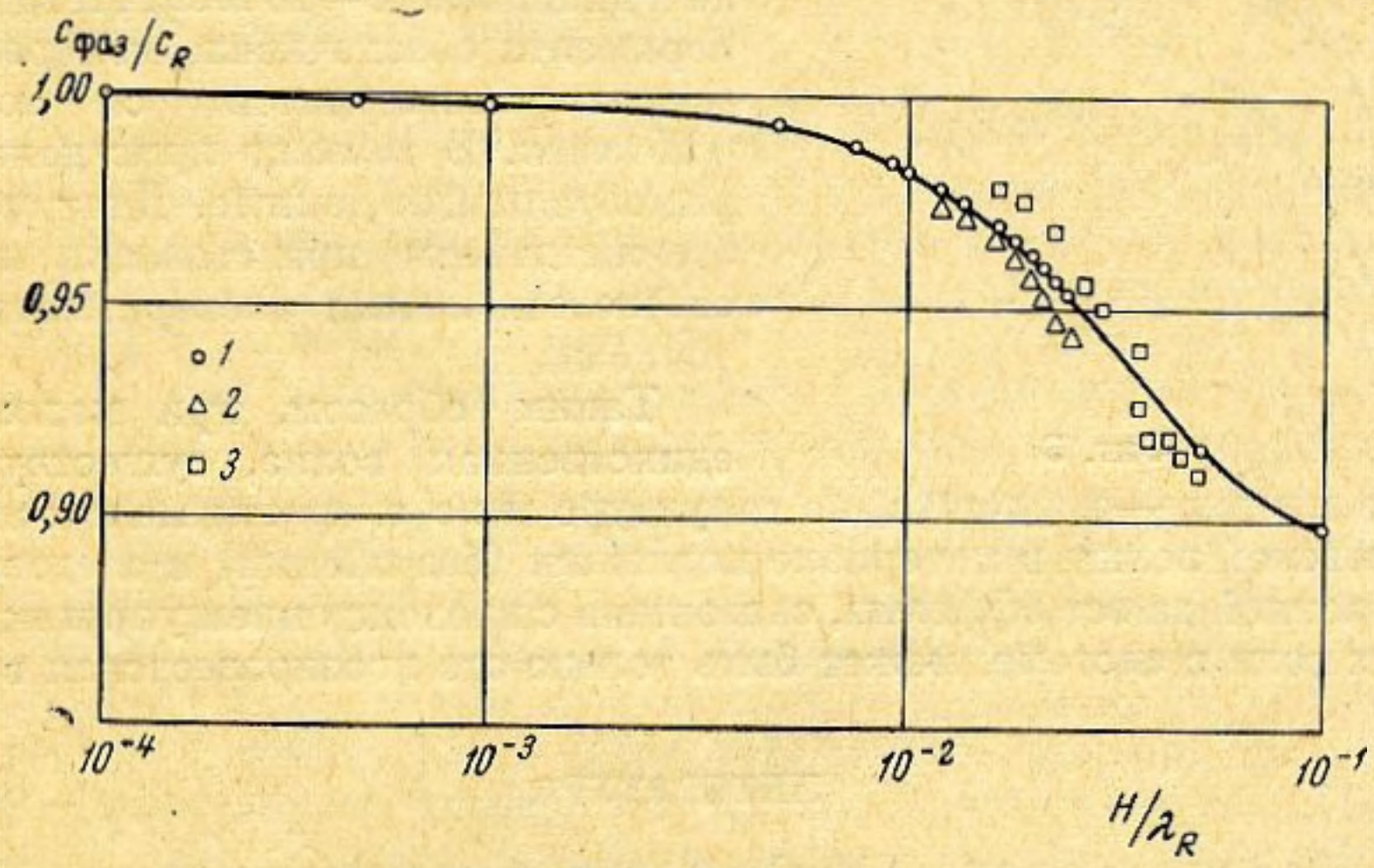
Результаты расчета для системы $CdS - SiO_2$ дают фазовую скорость упругих поверхностных волн:

$$c_{фаз} = c_{R_2} \frac{\left(\frac{H}{\lambda_{R_2}}\right)^2 387{,}86 + 1}{\left(\frac{H}{\lambda_{R_2}}\right)^2 428{,}81 + \frac{H}{\lambda_{R_2}} \cdot 1{,}58 + 1} \cdot см/сек. \qquad (8)$$

Отметим, что фактически значение скорости (8) получено разложением точного ее значения по степеням $H / \lambda_{R_2}$ в окрестности $\frac{H}{\lambda_{R_2}} = 0$

$$c_{фаз} = c_{R_2} + a \frac{H}{\lambda_{R_2}} + \ldots; \quad a \approx 1 \qquad (9)$$

и точность формулы (8) определяется вкладом не учтенных членов ряда (9). Это приближение является причиной расхождения эксперимента




Фиг. 2

и расчета. На фиг. 2 приводится дисперсионная кривая, рассчитанная по формуле (8), где *1* — теоретический расчет, *2* — эксперимент при $H - 5\mu$, *3* — эксперимент при $H - 11\mu$.

В рассматриваемом нами случае относительные величины смещений при толщине пленки CdS $H = 0{,}024\ \lambda_{R_2}$ имеют следующий вид:

$$U^{(1)} = \left(0{,}0707 - 0{,}8112 \frac{z}{\lambda_{R_2}}\right) \cos(\xi x - \omega t),$$

$$U^{(2)} = \left(0{,}2326 e^{-6{,}3520 \frac{z}{\lambda_{R_2}}} - 0{,}1619 e^{-3{,}9155 \frac{z}{\lambda_{R_2}}}\right) \cos(\xi x - \omega t),$$

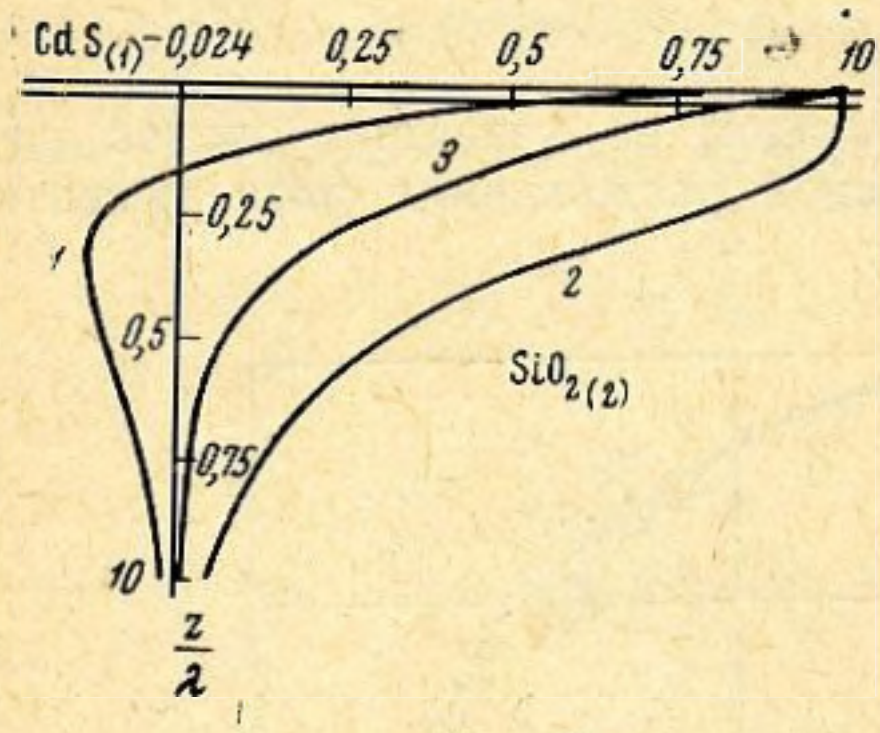
$$W^{(1)} = \left(0{,}2839 \frac{z}{\lambda_{R_2}} + 0{,}1150\right) \sin(\xi x - \omega t),$$

$$W^{(2)} = \left(0{,}1963 e^{-6{,}3520 \frac{z}{\lambda_{R_2}}} + 0{,}3113 e^{-3{,}9155 \frac{z}{\lambda_{R_2}}}\right) \sin(-\omega t + \xi x).$$

| $H = 5$ *мк* | | $H = 11$ *мк* | | $H = 5$ *мк* | | $H = 11$ *мк* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,41 | 0,9869 | 16,31 | 0,9765 | 16,31 | 0,9615 | 35,89 | 0,9250 |
| 8,90 | 0,9811 | 19,57 | 0,9736 | 17,79 | 0,9588 | 39,15 | 0,9174 |
| 10,38 | 0,9811 | 22,84 | 0,9680 | 19,28 | 0,9508 | 45,68 | 0,9124 |
| 11,86 | 0,9726 | 26,10 | 0,9541 | 22,24 | 0,9454 | 48,94 | 0,9074 |
| 13,35 | 0,9628 | 29,36 | 0,9487 | 23,77 | 0,9427 | — | — |
| 14,83 | 0,9615 | 32,63 | 0,9380 | | | | |

На фиг. 3 представлены зависимости от глубины относительных смещений $U^{(i)} / W^{(1)}$ (кривая *1*), $W^{(i)} / W_0^{(1)}$ (кривая *2*) и плотности кинетической энергии $T_k / T_{k_0}$ (кривая *3*). Величины с индексом 0 — значения при $z = -H / \lambda_{R_2} = 0{,}024$.

Эксперименты, выясняющие зависимость скорости в системе от отношения $H / \lambda_{R_2}$, проводились на подложках из плавленого кварца (100 × 20 × 5) с напыленными слоями сульфида кадмия различной толщины. Упругие поверхностные волны возбуждались и индицировались методом клина в диапазоне 4—16 *Мгц*. Методика эксперимента обеспечивала измерение временных интервалов с точностью 0,05 *мсек*. В таблице приведены экспериментальные данные. Для сравнения эти же данные представлены на фиг. 2 соответственными экспериментальными точками.




Фиг. 3

Таким образом, при малом $H / \lambda_{R_2}$ единственная волна, существующая в системе пленка — подложка, по структуре и по скорости мало отличается от рэлеевской волны в материале подложки (без пленки) и следовательно, ответственной за все эффекты, связанные с прохождением упругих поверхностных волн в системе, может быть только эта квазирэлеевская волна.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. И. Кейлис-Борок. Интерференционные поверхности волны. М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. И. А. Наймарк. Тр. Сейсмологического института АН СССР, 1947, 119, 46—62.
3. И. А. Наймарк. Тр. Сейсмологического института АН СССР, 1948, 127, 1—25.
4. Н. Н. Егоров, В. А. Калинин, В. П. Трубицын. Тр. Института физики земли АН СССР, 1962, 20, 57—66.
5. Ф. И. Федоров. Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.



Институт физики полупроводников
СО АН СССР
Новосибирск



Поступила в редакцию
16 января 1968 г.