АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 1

УДК 534.222.1

КВАЗИПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ

Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов

Выведено приближенное уравнение, описывающее распространение ограниченных звуковых пучков в слабо нелинейных средах без поглощения. Построен один класс асимптотических решений приближенного уравнения, позволяющий проследить деформацию пучка, связанную с нелинейными свойствами среды. Анализ проведен при помощи метода, в основу которого положен факт малости нелинейности среды и расходимости пучка.

В настоящее время сравнительно полно изучен процесс распространения плоских волн конечной амплитуды в слабодиспергирующих средах. Задача о распространении цилиндрических волн [1] и сферических волн [2] была сведена к одномерной. Практический интерес представляют двумерные и трехмерные нелинейные задачи; рассмотрение ограниченных пучков в нелинейных средах, сходящихся и расходящихся пучков, учет дифракционных эффектов. Здесь можно отметить только одну работу, где приводятся оценки возможности самофокусировки звукового пучка вследствие нагрева среды [3]. Однако даже в средах без поглощения ограниченный пучок должен деформироваться из-за дифракционной расходимости и вследствие нелинейности среды. Зависимость акустических свойств среды и, в частности, скорости звука от мгновенных значений возмущения приводит к выводу о невозможности фокусировки или дефокусировки периодического сигнала в предположении обычного нелинейного механизма. В то же время импульсы, только сжатия или только разрежения, локализованные в пространстве в виде пучков, при распространении в нелинейной среде могут расплываться или сужаться в пространстве.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию искажений формы пучка, обусловленных нелинейными свойствами среды. Анализ проведен на основе приближенного уравнения, описывающего процесс распространения ограниченного трехмерного пучка в слабо нелинейной среде без дисперсии и без поглощения. Приближенное уравнение выведено из уравнений гидродинамики в предположении, что форма волны медленно изменяется как вдоль пучка, так и поперек. Этим изменениям приписаны разные порядки малости. Построен один класс асимптотических решений приближенного уравнения, позволяющий в рамках геометрической акустики проследить нелинейное изменение формы пучка. Полученное частное решение для квазиплоской волны при ширине пучка, стремящейся к бесконечности, переходит в римановское решение.

Рассмотрим трехмерный звуковой пучок, распространяющийся в жидкости или в газе без диссипации энергии. Полная система уравнений, описывающих этот процесс, состоит из уравнений непрерывности, уравнения Эйлера и уравнения состояния среды.

Пучок направлен вдоль оси x и на поверхности $x = 0$ задано возмущение скорости или плотности в следующем виде:

при $x = 0$

$$\rho' = \Phi(t, y, z). \tag{1}$$

Для малых возмущений скорости, плотности и давления система гидродинамических уравнений может быть упрощена. Для этого положим

$$\frac{v_x}{c_0} \sim \mu; \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \sim \mu; \quad \frac{p'}{p_0} \sim \mu,$$

где μ — малый безразмерный параметр, c_0 — скорость звука, ρ_0 и p_0 — равновесные значения плотности и давления в газе, для жидкости p_0 — характерное давление.

В случае плоских волн бесконечно малой амплитуды система гидродинамических уравнений имеет решение вида

$$v, p', \rho' = F(t - x / c_0), \tag{2}$$

где F — произвольная функция аргумента.

Нелинейность среды и ограниченность пучка приведут к медленным изменениям формы волны как вдоль направления распространения, так и поперек. Поскольку переход в область тени происходит довольно резко, то следует считать, что изменения всех величин поперек пучка происходят быстрее, чем вдоль [4]. Поэтому для ограниченных пучков, распространяющихся в слабонелинейных средах, естественно искать решение уравнений гидродинамики в виде

$$v_x, p', \rho' = \Psi\left(t - \frac{x}{c_0} \quad \mu x, \sqrt{\mu y}, \sqrt{\mu z}\right). \tag{3}$$

Вводя переменные

$$\tau = t - \frac{x}{c_0}; \; x' = \mu x; \; y' = \sqrt{\mu}\, y; \; z' = \sqrt{\mu}\, z \tag{4}$$

и подставляя их в гидродинамические уравнения, пренебрегая при этом малыми членами, порядок малости которых выше, чем μ^2, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0}\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{v_x}{c_0}\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{\rho'}{c_0}\frac{\partial v_x}{\partial \tau} - \rho_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0}\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = -\frac{\rho_0}{c_0^2} v_x \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{1}{c_0}\rho' \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - (\gamma - 1)\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial \tau} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем штрихи над x, y и z опущены. При выводе уравнений (5) — (8) предполагается, что v_{y/c_0} и v_{z/c_0} имеют порядок малости $\mu\sqrt{\mu}$, так как поперечные компоненты скорости связаны с расходимостью пучка. Из уравнений Эйлера (6), (7) и (8) p исключено при помощи приближенного уравнения состояния $p = p_0 + c_0^2\rho' + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho'^2$, где γ — показатель адиабаты в уравнении состояния.

В уравнениях (5) и (6) слева стоят члены, каждый из которых имеет порядок малости μ, а справа — μ^2. С точностью до членов порядка μ можно написать

$$v_x = \frac{c_0}{\rho_0}\rho'. \tag{9}$$

Уравнения (7) и (8) содержат малые члены порядка $\mu\sqrt{\mu}$. Уравнения (5) — (8) с учетом выражения (9) можно свести к одному уравнению вида

$$\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\rho'^2}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\rho'}{\partial x\partial\tau}+\frac{c_0}{2}\left(\frac{\partial^2\rho'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho'}{\partial r}\right)=0, \tag{10}$$

где $\alpha=\dfrac{\gamma+1}{2\rho_0c_0}$, r — поперечная координата: $r=\sqrt{y^2+z^2}$.

Уравнение (10) является приближенным уравнением нелинейной акустики ограниченных пучков.

Введение одной поперечной координаты r справедливо для пучков, обладающих аксиальной симметрией. В случае плоской волны изменения ρ' вдоль поперечной координаты равны нулю, и уравнение (10) принимает вид

$$\alpha\rho'\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}-\frac{\partial\rho'}{\partial x}=0.$$

Решение этого уравнения описывает процесс распространения плоских волн в слабо нелинейной среде без диссипации энергии [5].

Если можно пренебречь нелинейностью среды $\alpha\to 0$, то уравнение (10) переходит в линейное уравнение, которое сводится к параболическому уравнению для амплитуды гармонической волны [6]:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial x}=\frac{c_0}{2i\omega}\left(\frac{\partial^2\rho'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho'}{\partial r}\right).$$

Таким образом, приближенное уравнение (10) учитывает одновременно и нелинейные свойства среды, и поперечные изменения возмущения, обусловленные дифракционной расходимостью. Поэтому можно утверждать, что уравнение (10) описывает во втором приближении (с точностью до членов порядка μ^2) распространение ограниченных пучков в нелинейных средах без потерь.

Получить общее решение нелинейного уравнения (10) в аналитической форме с граничным условием (1) пока не представляется возможным. Построим поэтому асимптотическое решение, которое позволило бы судить о характере функции $\rho'(\tau, x, r)$, хотя бы в некоторых частных случаях. Для этого допустим, что решение уравнения (10) можно представить в виде, близком к решению Римана для плоских волн:

$$\rho'=F\{\lambda[\tau-S(x,\rho')],\,x,\,r\}, \tag{11}$$

где λ — большой безразмерный параметр, S — неизвестная пока функция переменных x, ρ'.

Вычисляя $\partial\rho'/\partial r$, $\partial\rho'/\partial\tau$, $\partial^2\rho'/\partial\tau^2$, $\partial^2\rho'/\partial\tau\partial x$ и $\partial^2\rho'/\partial r^2$ как производные от неявной функции, подставляя их в уравнение (10) и приравнивая нулю выражения, стоящие при высоких степенях λ, получим следующие уравнения при λ^3 и λ^2:

$$\alpha(S_{\rho'}-\rho'S_{\rho'\rho'})+S_{\rho'}S_{\rho'x}-S_xS_{\rho'\rho'}=0. \tag{12}$$

$$\alpha(\rho'F_{\xi\xi}+F_\xi^2)+(S_x+S_{\rho'}F_x)F_{\xi\xi}-S_{\rho'}F_\xi F_{\xi x}+F_\xi^2(S_{\rho'x}+S_{\rho'\rho'}F_x)+$$
$$+\frac{c_0}{2}\left[S_{\rho'}^2F_r^2F_{\xi\xi}-2S_{\rho'}^2F_rF_\xi F_{\xi r}+F_\xi^2\left(S_{\rho'}^2F_{rr}+\frac{1}{r}F_rS_{\rho'}^2\right)\right]=0. \tag{13}$$

Индекс внизу означает дифференцирование $\xi=\tau-S(x,\rho')$.

Рассматривая уравнения при высоких степенях большого параметра λ, мы ограничиваемся рамками геометрической акустики, что справедливо для достаточно больших радиусов пучка по сравнению с длиной волны, дифракционные эффекты при этом выпадают, так как описываются чле-

нами, стоящими при λ и λ^0. Таким образом, предполагается, что поперечные изменения, обусловленные нелинейными свойствами среды, превосходят дифракционные эффекты.

Уравнения (12) и (13), несмотря на проведенные упрощения, остаются довольно сложными; однако они уже могут быть решены в ряде случаев, представляющих интерес. Уравнение (12) можно один раз проинтегрировать. Разделим все члены уравнения (12) на $S_{\rho'}{}^2$ и запишем его в виде

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\frac{\rho'}{S_{\rho'}}\right)+\frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\frac{S_x}{S_{\rho'}}\right)=0. \tag{14}$$

Интегрируя уравнение (14) по ρ' и полагая произвольную функцию по x равной нулю, получим

$$\alpha\rho' + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$S = -\alpha\rho' x + \Phi(\rho'), \tag{16}$$

где Φ — произвольная функция от ρ'. Произвольная функция Φ позволяет сдвигать начало отчета координаты x. Действительно, представляя произвольную функцию в виде $\Phi = \alpha x_0 \rho'$, имеем

$$S = -\alpha(x - x_0)\rho'. \tag{17}$$

В дальнейшем будем полагать произвольную функцию Φ равной нулю, всегда помня, что выражение (17) тоже является решением уравнения (12).

Если ограничиться рассмотрением только быстрых изменений функции ρ', то можно написать выражение (11) в виде

$$\rho' = F(\tau + \alpha x \rho'). \tag{18}$$

Выражение (18) представляет собой разложение римановского решения для плоской волны. Таким образом, уравнение при самой высокой степени большого параметра λ позволяет определить поправку к скорости распространения почти плоской волны в нелинейной среде.

Подставляя выражение для S в уравнение (13), получим уравнение для функции F:

$$F_\xi F_{\xi x} - F_x F_{\xi\xi} + \frac{\alpha c_0 x}{2}\left(F_r{}^2 F_{\xi\xi} - 2F_r F_\xi F_{\xi r} + F_\xi{}^2 F_r + \frac{1}{r} F_r F_\xi{}^2\right) = 0 \tag{19}$$

Принимая независимую переменную ξ за функцию x, r и F, можно нелинейное уравнение (19) свести к линейному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial F} + \frac{\alpha c_0 x}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = 0. \tag{20}$$

Замена переменных

$$P = F + \beta x^2; \quad Q = F - \beta x^2; \quad S = \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha c_0}} r \tag{21}$$

позволяет привести уравнение (20) к гиперболическому уравнению стандартного вида:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial P^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial S^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial \xi}{\partial S} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial Q^2} = 0, \tag{22}$$

где β — коэффициент, имеющий размерность $[\rho / l^2]$. Вводя новую переменную R

$$R = \sqrt{P^2 + S^2} \tag{23}$$

Здесь будет страниц 44

Здесь будет страница 45

Проведенное построение показывает, что квазиплоский импульс сжатия с «амплитудой», спадающей к краям пучка, при распространении становится расходящимся: центральные точки пучка уходят вперед, а краевые отстают. Кроме того, имеет место сокращение длительности импульса. Передний фронт импульса движется с меньшей скоростью, чем задний фронт. Причиной этому является пространственная расходимость импульса — зависимость ρ' от x имеет примерный вид, изображенный на фиг. 5. Сжатие импульса во времени определяется множителем, стоящим перед произвольной функцией в выражении (30). На оси пучка, т. е. при $r = 0$, выражение (30) принимает вид:

$$\xi = \frac{\rho'}{\rho' + \frac{\alpha c_0 \rho'^2_{\max}}{r_0^2} x^2} \Phi(2\rho'). \tag{31}$$

При $x \neq 0$ множитель перед произвольной функцией меньше единицы. С ростом x этот множитель уменьшается, что и означает сокращение длительности импульса по мере распространения.

Аналогичным построением можно показать, что импульс разрежения, локализованный в виде пучка, распространяясь в нелинейной среде, сужается в пространстве. Ширина пучка определяется выражением

$$r = \pm r_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha c_0 \rho'_{\max}}{r_0^2} x^2}. \tag{32}$$

Решение (30) описывает распространение импульса разрежения до $x < r_0/\sqrt{\alpha c_0 \rho'_{\max}}$. При распространении импульса разрежения длительность его увеличивается.

Подробное исследование распространения однополярных импульсов позволяет сделать некоторые выводы относительно распространения периодического сигнала, ограниченного по поперечной координате. Фокусировка или дефокусировка пучка в среднем не имеет места. Некоторое расплывание пучка в фазе сжатия сменяется его сужением в фазе разрежения. Однако нужно отметить несимметричное искажение фазы сжатия и фазы разрежения: длительность фазы сжатия несколько сокращается, а фазы разрежения удлиняется. Возможно, что ограниченность пучка, распространяющегося в нелинейной среде, является одной из причин несимметричного искажения гармонической волны [7].

Выводы

Распространение ограниченных звуковых пучков в нелинейных гидродинамических и газодинамических средах без потерь описывается приближенным уравнением [10]. Построенное решение позволяет определить в рамках геометрической акустики деформацию пучка и искажение формы сигнала. Согласно решению (30), почти плоский импульс сжатия, ограниченный в пространстве, при распространении расширяется в пространстве и сужается во времени. Ширина пучка определяется выражением (29). Импульс разрежения сужается в пространстве и расплывается во времени. Такое поведение однополярных импульсов дает возможность сделать вывод о несимметричном искажении периодического сигнала. Полученное решение для квазиплоской волны переходит в решение Римана при ширине пучка, стремящейся к бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Цилиндрические волны конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, 1962, 4, 65—71.
2. К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж., 1963, 9, 1, 54—60.
3. Г. А. Аскарьян. Самофокусировка и фокусировка ультра- и гиперзвука. Ж. эксп. и теор. физ., Письма, 1966, 4, 4, 144—147.
4. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов. К теории генерации оптических гармоник в сходящихся пучках. Ж. эксп. и теор. физ., 1966, 50, 2, 474—486.
5. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. О распространении акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, 1961, 3, 52—61.
6. Г. Д. Малюжинец. Развитие представлений о явлениях дифракции. Усп. физ. наук, 1959, 69, 2, 321—334.
7. В. А. Буров, В. А. Красильников. Непосредственное наблюдение искажения формы интенсивных ультразвуковых волн в жидкости. Докл. АН СССР, 1958, 118, 5, 920—923.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16 мая 1968 г.