АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 1

УДК 534.2:551.46

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В. Д. Крупин

Для модели океана с плавно изменяющейся плотностью среды исследуется частотная зависимость волновых чисел и групповых скоростей внутренних волн. Эти характеристики внутренних волн выражаются через собственные значения задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения Фьельдстада с краевым условием Лэмба на поверхности океана. Методом интегральных соотношений для собственных значений доказывается, что групповые скорости внутренних волн достигают максимальных значений на некоторых частотах. Приводятся метод численного решения задачи Штурма — Лиувилля в применении к рассматриваемой задаче и численный пример.

Одной из причин наблюдаемых в океане периодических во времени флюктуаций температуры [1] могут быть внутренние волны. Как известно, внутренние волны возникают благодаря изменяющейся плотности воды по глубине океана. Для трехслойной модели океана в работе [1] были рассмотрены групповые скорости внутренних волн, и было установлено, что эти групповые скорости имеют максимальные значения на некоторых частотах. Было показано также, что распространение внутренних волн происходит в основном на частотах, близких к частотам экстремумов. Заметим также, что в последнее время стало известно, что внутренние волны существенно влияют на рефракцию звука в воде [2]. Поэтому важно более подробное изучение указанного свойства групповой скорости внутренних волн для случаев, более бизких к реальному океану.

Для модели океана с плавно изменяющейся по глубине плотностью воды в работе [3] были использованы асимптотические решения (в приближении ВКБ) дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (уравнение Фьельдстада), описывающего поле внутренних волн. Были рассмотрены решения при наличии двух точек поворота. Анализ приближенных решений показал, что и в этом случае групповые скорости имеют максимум на соответствующих частотах.

В настоящей работе это свойство внутренних волн исследуется методом интегральных соотношений для собственных функций и собственных значений краевой задачи Штурма — Лиувилля для уравнения Фьельдстада с краевым условием на поверхности океана, зависящим от спектрального параметра (условие Лэмба). Без применения асимптотических решений удается показать существование, по крайней мере, одного максимума групповой скорости внутренних волн для класса дифференцируемых функций, характеризующих изменение плотности по глубине океана.

Параллельно с аналитическим рассмотрением свойства внутренних волн используется в применении к данной задаче развитый ранее [4] численный метод решения краевых задач Штурма — Лиувилля. Этот метод позволяет получить численные характеристики внутренних волн (фазовую и групповую скорости, распределение по глубине амплитуд внутренних волн) в стратифицированном океане. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков.

Рассмотрим в декартовой системе координат $0xz$ параллельный слой жидкости: $0 \leqslant z \leqslant H$, $-\infty < x < \infty$. Система координат вращается с угловой скоростью Ω (инерционная частота) относительно оси $0z$. Жидкость характеризуется переменной плотностью, зависящей от координаты z, как дважды дифференцируемая функция $\rho(z)$, а также частотой Вяисяля [5] (частота колебаний бесконечно малого объема жидкости) $N(z)$, которая связана с плотностью $\rho(z)$ соотношением

$$N(z) = \left[-\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz} \right]^{1/2} > 0, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения. Относительно функции $N(z)$ предположим, что она достигает одного максимального значения $N = N_m$ при $z = z_m$.

Исследуем случай волнового движения, когда вертикальное смещение во внутренней волне зависит от координаты x и времени t, согласно множителю $\exp(ikx - i\omega t)$, где k обозначает волновое число, ω — циклическую частоту. Амплитуда вертикального смещения w, зависящая от z, удовлетворяет внутри слоя $0 \leqslant z \leqslant H$ дифференциальному уравнению Фьельдстада [6]:

$$\frac{1}{\rho(z)}\frac{d}{dz}\left(\rho\frac{dw}{dz}\right) + \frac{k^2}{\omega^2 - \Omega^2}[N^2(z) - \omega^2]\,w = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям:

$$\left[\frac{dw}{dz} + g\frac{k^2}{\omega^2 - \Omega^2}w\right]_{z=0} = 0, \tag{3}$$

$$w|_{z=H} = 0. \tag{4}$$

Введем для удобства безразмерную переменную $\zeta = \zeta(z)$:

$$\zeta = \left[\int_0^z \frac{ds}{\rho(s)}\right]\left[\int_0^H \frac{ds}{\rho(s)}\right]^{-1}. \tag{5}$$

Заменив в уравнении (2) и граничном условии (3) переменную z на ζ, после некоторых преобразований приходим к краевой задаче Штурма — Лиувилля на отрезке $[0, 1]$:

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2} + \lambda r(\zeta, \omega)\,w = 0, \tag{6}$$

$$\left[\alpha\frac{dw}{d\zeta} + \lambda w\right]_{\zeta=0} = 0, \tag{7}$$

$$w|_{\zeta=1} = 0. \tag{8}$$

В формулах (6) — (7) введены обозначения:

$$\lambda = \frac{k^2}{\omega^2 - \Omega^2}\left[\int_0^H \frac{ds}{\rho(s)}\right]^2, \tag{9}$$

$$r(\zeta, \omega) = \rho^2(\zeta)[N^2(\zeta) - \omega^2], \tag{10}$$

$$\alpha = \rho^{-1}(0)g^{-1}\left[\int_0^H \frac{1}{\rho(s)}ds\right] > 0. \tag{11}$$

Для задачи (6) — (8) существует бесконечная последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ вещественных чисел (собственные значения), такая, что при значениях спектрального параметра $\lambda = \lambda_n$, уравнение (6) имеет ненулевые решения (собственные функции), удовлетворяющие условиям (7) — (8). Так как функция $r(\zeta, \omega)$ является знакопеременной на отрезке $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, собственные значения, согласно работе [7], могут иметь две точки сгущения: $\lambda = -\infty$, $\lambda = +\infty$. Если λ_n^+, λ_n^- — положительные и отрицательные собственные значения, то соответствующие им собственные функции w_n^+. w_n^- имеют ровно n-нулей на отрезке [0, 1]. Исследуем, как изменяется спектр задачи (6) — (8) в зависимости от параметра ω, ограничиваясь случаем $\Omega < N_m$.

Для частот ω, удовлетворяющих условию $\omega < \Omega$, существуют как положительные, так и отрицательные собственные значения. Положительным собственным значениям λ_n^+ соответствуют внутренние волны, экспоненциально затухающие согласно множителю

$$\exp\left[-\lambda_n^+ \sqrt{\Omega^2 - \omega^2}\left(\int_0^H \frac{1}{\rho}\, ds\right)|x|\right],$$

а отрицательным собственным значениям λ_n^- — бегущие волны:

$$\exp\left[i\,|\lambda_n^-|\sqrt{\Omega^2 - \omega^2}\left(\int_0^H \frac{1}{\rho}\, ds\right)^{-1}|x|\right].$$

Если $\omega > N_m$, то функция $r(\zeta, \omega)$ имеет отрицательный знак. Поэтому для того, чтобы решения дифференциального уравнения (6) при этих значениях имели на интервале [0, 1] колебательный характер (т. е. являлись собственными функциями), все собственные значения должны быть отрицательными. Внутренние волны для рассматриваемых частот экспоненциально затухают согласно множителю $\exp\left[\lambda_n^- \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\left(\int_0^H \frac{1}{\rho}\, ds\right)|x|\right]$, что не представляет интереса с физической точки зрения.

Наконец, для оставшейся полосы частот $\Omega < \omega < N_m$ существует бесконечное число положительных и отрицательных собственных значений. Из них мы рассмотрим ниже положительные собственные значения, которым соответствуют бегущие внутренние волны. Эти волны реально наблюдаются в океане [1] и под внутренними волнами, как правило, имеют в виду именно эти волны.

Пусть λ_n и $w_n(\lambda_n, \zeta)$ — положительное собственное значение и собственная функция краевой задачи (6) — (8). Умножим обе части дифференциального уравнения $\frac{d^2 w_n}{d\zeta^2} + \lambda_n r w_n = 0$ на функцию $w_n(\lambda_n, \zeta)$, затем проинтегрируем их по ζ в пределах от нуля до единицы и воспользуемся условиями (7) — (8). После этих преобразований получаем следующее интегральное соотношение:

$$\lambda_n(\omega) = \frac{\int_0^1 \left(\frac{d}{d\zeta} w_n\right)^2 d\zeta}{\int_0^1 r(\zeta, \omega)\, w_n^2(\zeta, \lambda_n)\, d\zeta + \alpha^{-1} w_n^2(0, \lambda_n)} \tag{12}$$

Продифференцировав формулу (12) по параметру ω, приходим к тождеству:

$$\dot{\lambda}_n \left[\int_0^1 r w_n^2 d\zeta + \alpha^{-1} w_n^2(0) \right] + 2\lambda_n \left[\int_0^1 r w_n \dot{w}_n d\zeta - \omega \int_0^1 \rho^2 w_n^2 d\zeta + \right.$$

$$\left. + \alpha^{-1} w_n(0) \dot{w}_n(0) \right] = 2 \int_0^1 \frac{dw_n}{d\zeta} \cdot \frac{d\dot{w}_n}{d\zeta} d\zeta, \tag{13}$$

в котором точка обозначает операцию дифференцирования по ω. Проинтегрируем теперь по частям правую часть формулы (13), а вместо второй производной $d^2 w_n / d\zeta^2$, появляющейся при интегрировании, подставим величину $(-\lambda_n r w_n)$. Тогда правая часть оказывается равной

$$2 \int_0^1 \frac{dw_n}{d\zeta} \frac{d\dot{w}_n}{d\zeta} d\zeta = 2 \frac{dw_n}{d\zeta} \dot{w}_n \Big|_0^1 + 2\lambda_n \int_0^1 r w_n \dot{w}_n d\zeta. \tag{14}$$

Принимая во внимание граничное условие для функции $\dot{w}_n(\zeta, \lambda_n)$ $(\dot{w}_n(1, \lambda_n) = 0)$ и подставляя формулы (7), (14) в тождество (13), после несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\lambda_n}{d\omega} = \frac{2\omega\lambda_n(\omega) \int_0^1 \rho^2 w_n^2 d\zeta}{\int_0^1 r w_n^2 d\zeta + \alpha^{-1} w_n^2(0, \lambda_n)}. \tag{15}$$

Потребуем, чтобы собственные функции $w_n(\zeta, \lambda_n)$ удовлетворяли условию нормировки:

$$\int_0^1 \rho^2(\zeta) w_n^2(\zeta, \lambda_n) d\zeta = 1. \tag{16}$$

Тогда дифференциальное уравнение (15) принимает более простой вид:

$$\frac{d\lambda_n}{d\omega} = \frac{2\omega\lambda_n(\omega)}{\int_0^1 r(\zeta, \omega) w_n^2(\zeta, \lambda_n) d\zeta + \alpha^{-1} w_n^2(0, \lambda_n)}. \tag{17}$$

Проинтегрируем это уравнение считая, что при $\omega = \Omega$ имеет место начальное условие $\lambda_n(\omega = \Omega) = c(n)$, где $c(n)$ — функция целочисленного аргумента n. Тогда для $\lambda_n(\omega)$ получаем выражение:

$$\lambda_n(\omega) = c(n) \exp \left[2 \int_\Omega^\omega \frac{\omega d\omega}{\int_0^1 r w_n^2 d\zeta + \alpha^{-1} w_n^2(0, \lambda_n)} \right]. \tag{18}$$

Соответствующие собственному значению $\lambda_n(\omega)$ волновое число $k_n(\omega)$ (формула (10)) и групповая скорость $u_n(\omega)$ внутренней моды номера n оказываются равными

$$k_n(\omega) = c(n) \left[\int_0^H \frac{1}{\rho} ds \right]^{-1} \cdot \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\, e^{F(\omega)}, \tag{19}$$

$$u_n(\omega)=\left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)^{-1}=$$

$$=c^{-1}(n)\left[\int_0^H \frac{1}{\rho}ds\right]\left[\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Omega^2}}+\sqrt{\omega^2-\Omega^2}\frac{d}{d\omega}F(\omega)\right]^{-1}e^{-F(\omega)}, \quad (20)$$

$$F(\omega)=2\int_\Omega^\omega \frac{\omega\, d\omega}{\int_0^1 r(\zeta,\omega)w_n^2 d\zeta+\alpha^{-1}w_n^2(0,\lambda_n)}. \quad (21)$$

Из формулы (20) следует, что при $\omega\to\Omega$ групповая скорость $u_n(\omega)$ стремится к нулю:

$$\lim_{\omega\to\Omega} u_n(\omega)=0. \quad (22)$$

Выясним теперь, какое предельное значение имеет функция $u_n(\omega)$, когда $\omega\to N_n$. Рассмотрим следующую задачу — вспомогательную задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{d\zeta^2}+\mu r(\zeta,\omega)v=0, & \left[-\alpha\dfrac{dv}{d\zeta}+\mu v\right]_{\zeta=0}=0, \\ v|_{\zeta=1}=0. \end{cases} \quad (23)$$

Пусть μ_n, $v_n(\zeta,\mu_n)$ — положительное собственное значение и собственная функция задачи (23), удовлетворяющая условию (16). Тогда для величины $\mu_n(\omega)$ имеет место интегральное соотношение, аналогичное соотношению (18):

$$\mu_n(\omega)=\mu_n(\Omega)e^{\Phi(\omega)}, \quad (24)$$

$$\Phi(\omega)=2\int_\Omega^\omega \frac{\omega\, d\omega}{\int_0^1 rv_n^2 d\zeta-\alpha^{-1}v_n^2(0,\mu_n)}. \quad (25)$$

Так как рассматриваемые собственные значения $\lambda_n(\omega)$, $\mu_n(\omega)$ являются положительными, то из формулы (12), полученной ранее для величины $\lambda_n(\omega)$, но которая справедлива и для величины $\mu_n(\omega)$, следует, что выражения

$$\int_0^1 rw_n^2 d\zeta+\alpha^{-1}w_n^2(0,\lambda_n), \qquad \int_0^1 rv_n^2 d\zeta-\alpha^{-1}v_n^2(0,\lambda_n)$$

также положительны. Поэтому функции $F(\omega)$, $\Phi(\omega)$ монотонно возрастают на интервале (Ω, N_m). Учитывая сказанное, а также формулу (16), получаем для функции $\Phi(\omega)$ оценку:

$$\Phi(\omega)>2\int_\Omega^\omega \frac{\omega\, d\omega}{\int_0^1 (N_m^2-\omega^2)\rho^2 v_n^2 d\zeta-a^{-1}v_n^2(0,\mu_n)}=$$

$$=2\int_\Omega^\omega \frac{\omega\, d\omega}{N_m^2-\omega^2-\alpha^{-1}v_n^2(0,\mu_n)}>\int_\Omega^\omega \frac{\omega\, d\omega}{N_m^2-\omega^2}=\ln\left(\frac{N_m^2-\Omega^2}{N_m^2-\omega^2}\right)^{1/2}, \quad (26)$$

которая показывает, что функция $\Phi(\omega)$ при $\omega \to N_m$ стремится к плюс бесконечности, и следовательно, имеет место

$$\lim_{\omega \to N_m} \mu_n(\omega) = +\infty. \tag{27}$$

Для того, чтобы получить оценку для функции $F(\omega)$ при $\omega \to N_m$, поступим следующим образом. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2w}{d\zeta^2} + \lambda r(\zeta\ \omega) w = 0, \\ \left[s \dfrac{dw}{d\zeta} + \lambda w \right]_{\zeta=0} = 0, \\ w|_{\zeta=1} = 0, \end{cases} \tag{28}$$

которая отличается от задачи (6) — (8) тем, что теперь параметр ω является фиксированным, а параметр s в первом граничном условии принимает вещественные значения: $-\alpha \leqslant s \leqslant \alpha$. Собственные значения задачи (28) $\lambda_n(s|\omega)$ определяются интегральным соотношением:

$$\lambda_n(s|\omega) = \frac{\int\limits_0^1 \left[\dfrac{d}{d\zeta} w_n(\zeta, \omega, s) \right]^2 d\zeta}{\int\limits_0^1 r w_n^2(\zeta, \omega, s)\, d\zeta + s^{-1} w_n^2(0, s, \omega)}, \tag{29}$$

где $w_n(\zeta, s, \omega)$ — собственная функция задачи (28), удовлетворяющая условию (16). Эта функция является аналитической функцией параметра s. Поэтому величины $\lambda_n(s|\omega)$, также являются аналитическими функциями от s. Исключение представляет собственное значение λ_0, которому соответствует поверхностная волна и которое существует при $s \neq 0$.

Нас по-прежнему интересуют положительные собственные значения $\lambda_n(s|\omega)$ $(n = 1, 2 \ldots)$. Поэтому знаменатель выражения (29) мы будем считать положительным. Дифференцируя соотношение (29) по параметру s и выполняя те же самые преобразования, что и при выводе уравнения (25), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\lambda_n(s|\omega)}{ds} = \frac{w_n^2(0, s, \omega)\, \lambda_n(s|\omega)}{s^2 \left[\int\limits_0^1 r w_n^2\, d\zeta + s^{-1} w_n^2(0, s, \omega) \right]}. \tag{30}$$

Это уравнение справедливо при всех значениях s: $-\alpha \leqslant s \leqslant \alpha$. В частности, при $s = 0$ правая часть уравнения (30) является конечной и равной

$$\left(\frac{dw_n^2}{ds} \right)^2_{s=0} \cdot \lambda_n(0|\omega) \left[\int\limits_0^1 r w_n^2 d\zeta \right]^{-1}_{s=0}.$$

Рассмотренные выше величины $\lambda_n(\omega)$, $\mu_n(\omega)$ принадлежат множеству значений функции $\lambda_n(s|\omega)$: $\lambda_n(\omega) = \lambda_n(\alpha|\omega)$, $\mu_n(\omega) = \lambda_n(-\alpha|\omega)$.

Интегрируя уравнение (30) с начальным условием $\lambda_n(s|\omega)|_{s=-\alpha} = \mu_n(\omega)$, получаем соотношение:

$$\lambda_n(\omega) = \mu_n(\omega) \exp\left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{w_n^2(0, s, \omega)\, ds}{s^2 \left[\int_0^1 r w_n^2 d\zeta + s^1 w_n^2(0, s, \omega) \right]} \right\}, \tag{31}$$

из которого с учетом соотношения (27) следует, что при $\omega \to N_m$, собственные значения $\lambda_n(\omega)$, а следовательно, и функция $F(\omega)$ стремятся к плюс бесконечности. Таким образом, групповая скорость $u_n(\omega)$ экспоненциально стремится к нулю:

$$\lim_{\omega \to N_m} u_n(\omega) = 0. \tag{32}$$

В итоге, учитывая поведение функции $u_n(\omega)$ в двух предельных случаях ($\omega \to \Omega$, $\omega \to N_m$), заключаем, что внутри интервала частот $\Omega < \omega < N_m$ найдется, по крайней мере, одно значение ω, при котором групповая скорость $u_n(\omega)$ достигает максимального значения.

Указанное свойство подтверждается результатами численных расчетов характеристик внутренних волн на ЭВМ, представленных в виде графиков на фиг. 1 и 2. Вычисления были произведены по программе для ЭВМ «Минск-2», в которой в качестве метода определения собственных функций был использован так называемый метод начальной задачи Коши [8]. Этот метод основан на аналитических свойствах решения дифференциального уравнения (6), содержащего параметр λ. Пусть функция $\varphi(\zeta, \lambda)$ есть решение начальной задачи Коши:

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + \lambda r(\zeta, \omega)\varphi = 0, \ \varphi(1) = 0; \ \left.\frac{d\varphi}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 1. \tag{33}$$

Тогда функция $\vartheta(\lambda)$, определенная через решение задачи (33) как

$$\vartheta(\lambda) \equiv \left[\alpha \frac{d\varphi}{d\zeta} + \lambda\varphi \right]_{\zeta=0}, \tag{34}$$

является целой аналитической функцией λ. Ее нули совпадают с искомыми собственными значениями λ_m задачи Штурма — Лиувилля (6) — (8). Как известно, одним из эффективных численных методов решения начальной задачи Коши является метод Рунге — Кутта, который дает локальную абсолютную погрешность интегрирования $O(h^4)$, где h — шаг интегрирования. Описание метода Рунге — Кутта, а также стандартной программы, реализующей этот метод на ЭВМ «Минск-2» приведены в работах [9, 10]. Эта программа построена таким образом, что на каждом шаге интегрирования оценивается относительная погрешность численного решения и сравнивается с требуемой точностью ε. При этом шаг интегрирования автоматически делится пополам, если вычисленная погрешность превосходит величину ε и дальнейший процесс интегрирования выполняется на ЭВМ с шагом меньшей длины.

Для того, чтобы можно было воспользоваться стандартной программой [9], задачу Коши (33) необходимо заменить начальной задачей для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_1}{d\zeta} = -r(\zeta, \omega)\lambda y_2; \quad y_1(1) = 0 \quad \frac{dy_2}{d\zeta} = y_1; \tag{35}$$

$$y_2(1) = 0.$$

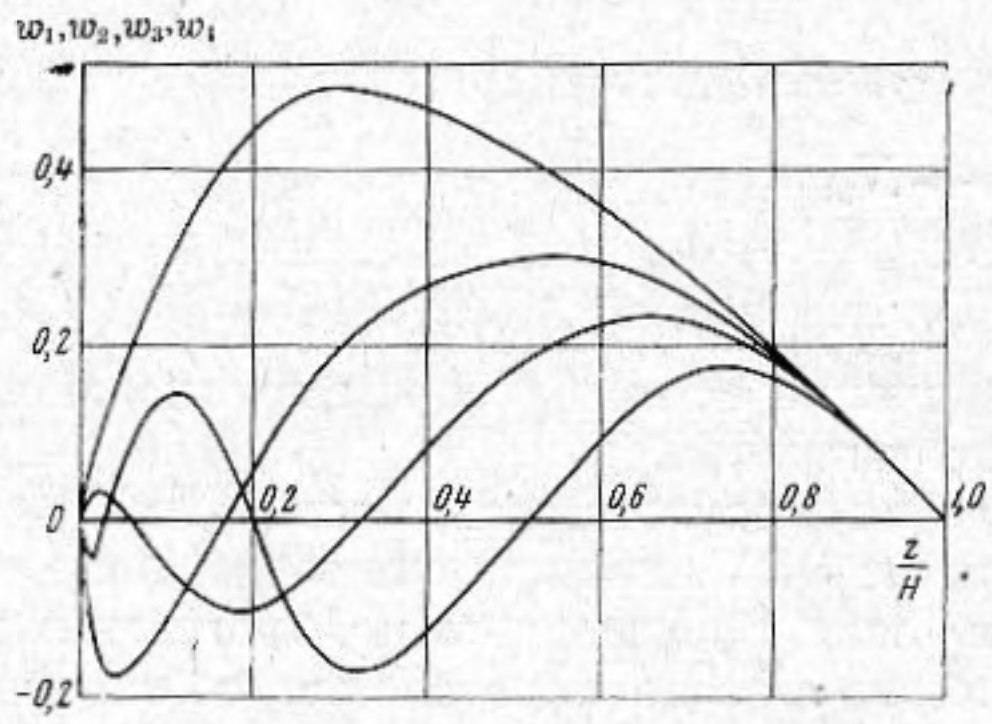
где

$$y_1 = \varphi(\zeta, \lambda); \quad y_2 = \frac{d\varphi(\zeta, \lambda)}{d\zeta}$$

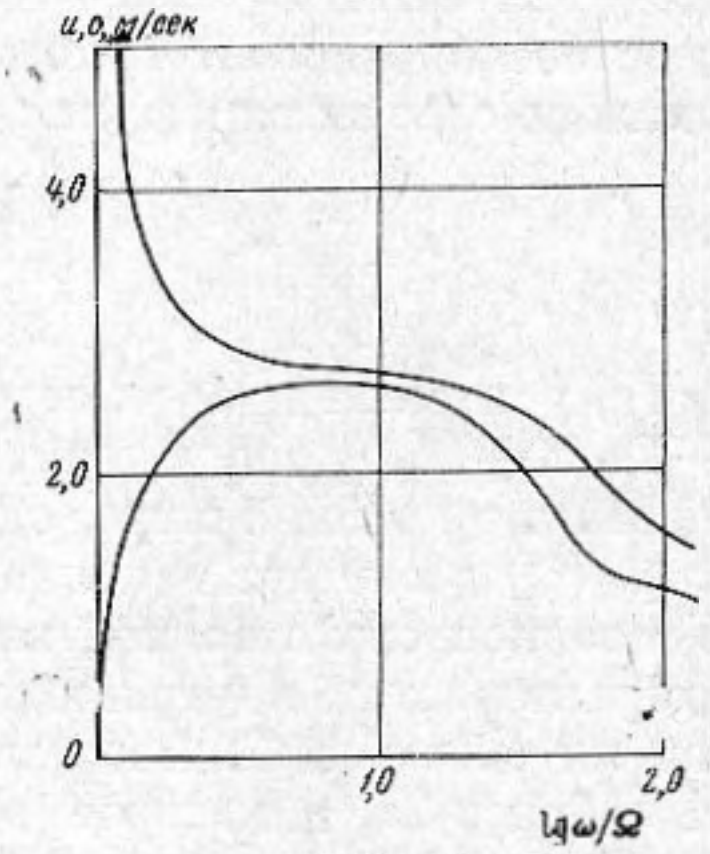
Тогда функцию $\vartheta(\lambda)$ можно записать в следующем виде:

$$\vartheta(\lambda) = [\alpha y_2 + \lambda y_1]_{\zeta=0}. \tag{36}$$

Применяемый для численного интегрирования задачи Коши (35) метод Рунге — Кутта удобен в том отношении, что он одновременно позволяет вычислить как функцию $\varphi(\zeta, \lambda)$, так и функцию $d\varphi / d\zeta$, которые обе необходимы для вычисления функции $\vartheta(\lambda)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве метода численного определения нулей вычисляемой указанным способом функции $\vartheta(\lambda)$, был использован метод деления интервала пополам. Комбинируя метод Рунге — Кутта с этим методом, можно найти нужное число собственных значений λ_n. После того, как вычислены величины λ_n, собственные функции $w_n(\zeta, \lambda_n) = \varphi(\zeta, \lambda_n)$, удовлетворяющие условиям $\left.\frac{d\varphi}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 1$, $\varphi(1) = 0$, могут быть рассчитаны посредством интегрирования системы (35) при $\lambda = \lambda_n$. При желании из этих собственных функций можно получить нормированные собственные функции. Для этого необходимо вычислить величину $M = [\int_0^1 \rho^2 \varphi^2(\lambda_n \zeta)\, d\zeta]^{1/2}$, причем интегральная сумма может быть накоплена в процессе интегрирования начальной задачи Коши. Таким образом, программа для ЭВМ, реализующая описанный алгоритм поиска собственных значений и собственных функций на всех вычисленных этапах, использует одну и ту же подпрограмму численного интегрирования начальной задачи Коши.

При расчетах фиг. 1 и 2 была использована эмпирическая зависимость частот Вяисяля $N(z)$, полученная во время экспедиции на научно-исследовательском судне «Сергей Вавилов» в 1964 г. в Бразильском районе Атлантического океана. Эта зависимость представлена в таблице.

Параметры H и Ω полагались равными: $H = 5600$ *м*, $\Omega = 0{,}251 \cdot 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$. На фиг. 1 показаны первые четыре внутренние моды, рассчитанные для $\omega = 1{,}401 \cdot 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$ (период 12 *час*). По оси ординат отложены амплитуды w_1, w_2, w_3, w_4 внутренних мод, удовлетворяющих условиям $\left.\frac{dw_n}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 1$, $w_n(1) = 0$; по оси абсцисс — безразмерная величина z / H. Волновые числа $k_n(\omega)$ и фазовые скорости c_n ($n = 1, 2, 3, 4$) для этих мод соответственно равны: $k_1 = 0{,}5122 \cdot 10^{-4}$ *м*$^{-1}$, $k_2 = 0{,}8746 \cdot 10^{-4}$ *м*$^{-1}$, $k_3 = 0{,}11834 \cdot 10^{-3}$ *м*$^{-1}$, $k_4 = 0{,}1695 \cdot 10^{-3}$ *м*$^{-1}$, $c_1 = 2{,}7429$ *м/сек*, $c_2 = 1{,}6064$ *м/сек*, $c_3 = 1{,}1872$ *м/сек*, $c_4 = 0{,}8289$ *м/сек*.

z, м	$N\times10^3$ сек$^{-1}$	z, м	$N\times10^3$ сек$^{-1}$	z, м	$N\times10^3$ сек$^{-1}$	z, м	$N\times10^3$ сек$^{-1}$
0	0	800	2,57	200	8,00	3000	1,00
26	10,25	1000	2,54	262	5,44	4000	1,00
50	14,40	1208	2,52	300	4,00	4300	1,00
78	15,56	1400	2,26	356	3,27	4500	0,96
100	15,00	1600	1,90	400	2,95	5000	0,80
131	11,60	1800	1,50	475	2,62	5600	0,6
150	10,60	2000	1,25	600	2,60		
184	9,28	2200	1,00				

На фиг. 1 не показана поверхностная волна, соответствующая волновому числу $k_0 = 0{,}6198\cdot10^{-6}$ *м*$^{-1}$, $c_0 = 226{,}782$ *м/сек*. Амплитуда этой волны монотонно (практически линейно) возрастает от дна к поверхности.

На фиг. 2 показаны частотные зависимости групповой $u(\omega)$ и фазовой скорости $c(\omega)$ для первой внутренней моды. По оси абсцисс отложена величина $\lg \omega/\Omega$. Как видно из этой фигуры, групповая скорость, действительно, достигает экстремального значения.

Автор выражает благодарность К. Д. Сабинину за постановку задачи и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Д. Сабинин. О связи короткопериодных внутренних волн с вертикальным градиентом плотности в море. Изв. АН СССР, физ. атмосф. и океана, 1966, 2, 8, 872—881.
2. О. С. Ли. Влияние внутренних волн на распространение звука в океане. Сб. «Внутренние волны». М., «Мир», 1964, 289—300.
3. В. Д. Крупин. О групповой скорости внутренних волн. Докл. на VI Всесоюзной акустической конференции, секция АУ-3, М., 1968.
4. Ю. В. Завадский, В. Д. Крупин. К развитию одного метода вычисления полей в слоисто-неоднородных волноводах с идеальными и поглощающими границами. Докл. на VI Всесоюзной акустической конференции, секция АУ-4, М., 1968.
5. К. Эккарт. Гидродинамика атмосферы и океана. М., ИЛ, 1963.
6. J. E. Fjeldstad. Interne wellen. Geophys. Publ., 10 (6) 1—35, Oslo 1933.
7. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гос. Научно-технич. изд-во Украины, Харьков, 1933.
8. R. Bellman. On the determination of characteristic values for a class of Sturm-Liouville problems. Illinois J. Math., 1958, 2, 4A, 577—585.
9. Дж. Н. Ланс. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962.
10. Стандартные программы для ЭВМ «Минск-2» (под ред. А. А. Пальцева). Минск, «Наука и техника», 1967 г.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
12 мая 1968 г.