АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 1

УДК 534.26

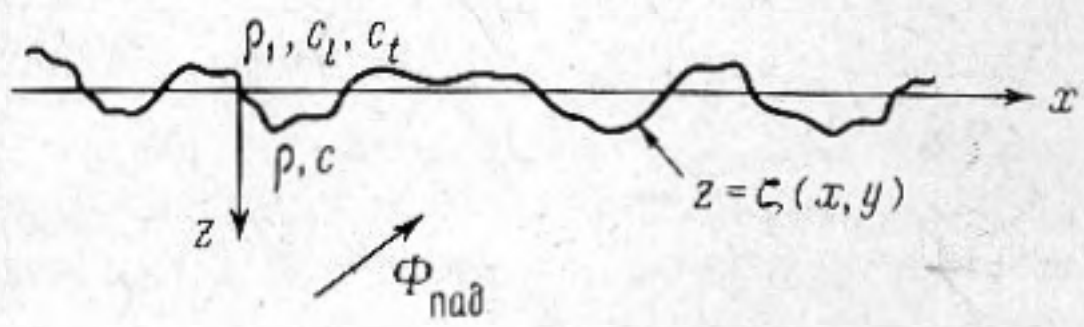
# О ПРИМЕНИМОСТИ ПРИНЦИПА КИРХГОФА ДЛЯ РАСЧЕТА РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*А. Д. Лапин*

Рассмотрена плоская задача о рассеянии звука на неровной границе жидкость — твердое тело. Предполагается, что радиус кривизны неровной поверхности велик по сравнению с длинами волн, распространяющихся в жидкости и в твердом теле (плавные неровности). Исследованы границы применимости принципа Кирхгофа для твердого тела.

В работах [1, 2] дана теория рассеяния волн на поверхностях с плавными неровностями. Эта теория предполагает, что поле в каждой точке рассеивающей поверхности равно сумме полей падающей волны и волны, отраженной по правилам геометрической оптики от плоскости, касательной к поверхности в данной точке. Такое задание поля на границе называют принципом Кирхгофа, принципом локального характера поля [3] или принципом изолированного элемента [4]. Границы применимости этого принципа для неровной поверхности исследованы в работах [1, 2].

Во всех вышеупомянутых работах неявно предполагалось, что на границе раздела сред отсутствуют поверхностные волны. При наличии поверхностных волн достаточно большой амплитуды принципом Кирхгофа для расчета рассеяния пользоваться нельзя. Как известно [5], на границе твердое тело — вакуум, твердое тело — жидкость и твердое тело — твердое тело могут распространяться поверхностные волны. Следовательно, результаты работ [1, 2] применимы для шероховатой поверхности твердого тела лишь в тех случаях, когда эти поверхностные волны или вообще не возбуждаются или их амплитуда очень мала.




В настоящей работе рассмотрена плоская задача о рассеянии звука на неровной поверхности жидкость — твердое тело и исследованы границы применимости принципа Кирхгофа для твердого тела. Пусть на неровную границу раздела между жидким и твердым однородными полупространствами (см. фигуру) падает из жидкости плоская гармоническая волна частоты $\omega$. Потенциал этой волны мы запишем в виде

$$\Phi_{пад}(x, z) = \exp[i(K_x^0 x - K_z^0 z)], \tag{1}$$

где $K_z^0 = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (K_x^0)^2}$, $c$ — скорость звука в жидкости. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее мы будем опускать. Обозначим потенциал рассеянного поля в жидкости через $\Phi$, а потенциалы продольных и поперечных волн в твердом теле соответственно через $\varphi$ и $\Psi$. Эти поля удовлетворяют соответственным волновым уравнениям, а на неровной по-

верхности $z = \zeta(x)$ следующим граничным условиям:

$$\{\mathbf{n}, [\operatorname{grad}(\varphi - \Phi_{\text{пад}} - \Phi) + \operatorname{rot}\Psi]\} = 0, \tag{2}$$

$$\{\sigma_{rs} n_s n_r + i\omega\rho(\Phi_{\text{пад}} + \Phi)\} = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_{rs} n_s \tau_r = 0, \tag{4}$$

где $\sigma_{rs}$ — тензор напряжений [6], $\rho$ — плотность жидкости, $\mathbf{n}$ и $\tau$ — соответственно единичный вектор нормали и касательной. Индексы $r$ и $s$ пробегают везде значения 1 и 2, соответствующие компонентам векторов и тензоров соответственно по осям $x$ и $z$. Граничные условия (2), (3) и (4) означают, что на поверхности раздела между жидкостью и твердым телом нормальные компоненты смещения и силы непрерывны, а касательные компоненты силы отсутствуют.

Предположим, что радиус кривизны неровной поверхности велик по сравнению с длинами волн, распространяющихся в жидкости и в твердом теле (плавные неровности). Как известно [1, 2, 7], это условие является необходимым для применения принципа Кирхгофа. Представим рассеянное поле в виде

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}, \quad \Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)},$$

где индекс 0 означает кирхгофовское приближение, а индекс 1 означает добавочное поле к кирхгофовскому приближению. Из формул (2), (3) и (4) следует, что добавочное поле удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\{\mathbf{n}, [\operatorname{grad}(\varphi^{(1)} - \Phi^{(1)}) + \operatorname{rot}\Psi^{(1)}]\}_{z=\zeta} = F_1(x) \equiv$$

$$\equiv -\{\mathbf{n}, [\operatorname{grad}(\varphi^{(0)} - \Phi_{\text{пад}} - \Phi^{(0)}) + \operatorname{rot}\Psi^{(0)}]\}_{z=\zeta},$$

$$\{\sigma_{rs}^{(1)} n_s n_r + i\omega\rho\Phi^{(1)}\}_{z=\zeta} = F_2(x) \equiv -\{\sigma_{rs}^{(0)} n_s n_r + i\omega\rho(\Phi_{\text{пад}} + \Phi^{(0)})\}_{z=\zeta},$$

$$\{\sigma_{rs}^{(1)} n_s \tau_r\}_{z=\zeta} = F_3(x) \equiv -\{\sigma_{rs}^{(0)} n_s \tau_r\}_{z=\zeta}.$$

На основании этих формул можно считать, что добавочное поле создается сторонними источниками $F_r$, где $r = 1, 2, 3$, распределенными по поверхности $z = \zeta(x)$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь ту часть добавочного поля, которая обусловлена поверхностными волнами, распространяющимися вдоль границы. Из условия малости этой части добавочного поля по сравнению с полем в кирхгофовском приближении мы получим дополнительные ограничения применимости принципа Кирхгофа, обусловленные наличием поверхностных волн.

Поверхностные волны, создаваемые сторонними источниками $F_r$, мы найдем приближенно, используя условие плавности неровной поверхности. При расчете мы примем следующие допущения:

1. Сторонний источник, расположенный в точке $(x_0, \zeta_0)$ поверхности, создает поверхностную волну такой же амплитуды, как если бы он был расположен на плоскости, касательной к поверхности в этой точке.

2. Поверхностная волна в каждой точке неровной поверхности ведет себя так же, как если бы она распространялась по плоскости, касательной к поверхности в этой точке. Дополнительное затухание поверхностной волны, обусловленное ее рассеянием на плавных неровностях, можно рассчитать методом, аналогичным изложенному в работе [8].

Поле поверхностных волн в точке $(x, \zeta)$ поверхности мы будем искать следующим способом. Сперва вычислим поле, создаваемое в этой точке сторонними источниками $F_r(x_0)$, расположенными в точке $(x_0, \zeta_0)$ поверхности, затем проинтегрируем это поле по координате $x_0$ в интервале, содержащем неровности; тогда мы получим полное поле.

Поверхностные волны, создаваемые точечными сторонними источниками $F_r(x_0)$, можно найти методом Фурье. Опуская громоздкие промежуточные вычисления, мы сразу приведем окончательные формулы:

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta, x_0) = V^+(\tilde{K}_x, x_0)\exp[i\tilde{K}_x l(x_0, x)] \quad \text{при} \quad x > x_0,$$

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta, x_0) = V^-(\tilde{K}_x, x_0)\exp[-i\tilde{K}_x l(x_0, x)] \text{ при } x < x_0.$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$V^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0) = \frac{\varkappa}{\rho c_t T'(\tilde{K}_x)}\Big\{\varkappa^2 \tilde{k}_z F_2(x_0) - \frac{\rho_1 c_t}{\varkappa}[(\varkappa^2 - 2\tilde{K}_x^2)^2 +$$

$$+ 4\tilde{k}_z \tilde{\varkappa}_z \tilde{K}_x^2] F_1(x_0) \pm \tilde{K}_x[(\varkappa^2 - 2\tilde{K}_x^2) - 2\tilde{k}_z \tilde{\varkappa}_z] F_3(x_0)\Big\} \tag{5}$$

$$T(K_x) = \{mK_z[(\varkappa^2 - 2K_x^2)^2 + 4k_z\varkappa_z K_x^2] + \varkappa^4 k_z\},$$

$$l(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + p^2(X)}\, dX,$$

причем $p = \dfrac{d\zeta}{dx}$, $K_z = \sqrt{K^2 - K_x^2}$, $k_z = \sqrt{k^2 - K_x^2}$, $\varkappa_z = \sqrt{\varkappa^2 - K_x^2}$,

$$K = \omega / c, \quad k = \omega / c_l, \quad \varkappa = \omega / c_t, \quad m = \rho_1 / \rho,$$

$\rho_1$ — плотность твердого тела, $c_l$ и $c_t$ — соответственно скорости продольной и поперечной волн в твердом теле, $\tilde{K}_x$ — корень уравнения $T(\tilde{K}_x) = 0$.

Пусть неровности заключены в интервале $\{|x| < L\}$. Тогда поверхностные волны можно представить в виде

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta) = \int_{-L}^{L} V_1^+(\tilde{K}_x, x_0)\exp[i\tilde{K}_x l(x_0, x)]\, dx_0 \quad \text{при} \quad x > L, \tag{6}$$

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta) = \int_{-L}^{L} V_1^-(\tilde{K}_x, x_0)\exp[-i\tilde{K}_x l(x_0, x)]\, dx_0 \quad \text{при} \quad x < -L, \tag{7}$$

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta) = \int_{-L}^{x} V_1^+(\tilde{K}_x, x_0)\exp[i\tilde{K}_x l(x_0, x)]\, dx_0 + \int_{x}^{L} V_1^-(\tilde{K}_x, x_0) \times$$

$$\times \exp[-i\tilde{K}_x l(x_0, x)]\, dx_0 \quad \text{при} \quad |x| < L,$$

где $V_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0) = \sqrt{1 + p^2(x_0)}\, V^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)$. Исследуем поле поверхностных волн за пределами нерегулярного участка для периодических и статистических неровностей.

Периодические неровности. Пусть неровности $\zeta$ являются периодической функцией с периодом $\Lambda$. Тогда величина $\sqrt{1 + p^2(x)}$ тоже будет периодической функцией: $\sqrt{1 + p^2(x + \Lambda)} = \sqrt{1 + p^2(x)}$. Представим ее в виде

$$\sqrt{1 + p^2(x)} = b_0 + b_1(x), \tag{8}$$

где $b_0 = \dfrac{1}{\Lambda}\displaystyle\int_0^{\Lambda} \sqrt{1 + p^2(x)}\, dx$ — среднее значение этой величины за период; $b_1(x)$ — периодическая функция, имеющая нулевое среднее значение. На основании формул (5) и (8) имеем

$$l(x_0, x) = b_0[(x - x_0) + b_2(x_0, x)], \tag{9}$$

где $b_2(x_0, x) = \frac{1}{b_0}\int\limits_{x_0}^{x} b_1(x)\,dx$ — периодическая функция, имеющая нулевое среднее значение.

Пользуясь формулами (6), (7) и (9), представим поле поверхностных волн за пределами нерегулярного участка в следующей форме:

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta) = \int\limits_{-L}^{L} V_2^{\pm}(\tilde{K}_x, x, x_0)\exp[i(K_x^0 \mp b\tilde{K}_x)x_0]\,dx_0, \tag{10}$$

где $V_2^{\pm}(\tilde{K}_x, x, x_0) = V_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)\exp\{-iK_x^0 x_0 \pm ib_0\tilde{K}_x[x + b_2(x_0, x)]\}$. Здесь и далее верхний знак выбирается при $x > L$, а нижний знак при $x < -L$. Величина $V_2^{\pm}(\tilde{K}_x, x, x_0)$ является периодической функцией координаты $x_0$. Разложим ее в ряд Фурье

$$V_2^{\pm}(\tilde{K}_x, x, x_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{\pm}(\tilde{K}_x, x)\exp(i\Omega^m x_0), \tag{11}$$

где

$$\Omega^m = \frac{2\pi}{\Lambda}m, \qquad A_m^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0) = \frac{1}{\Lambda}\int\limits_{0}^{\Lambda} V_2^{\pm}(\tilde{K}_x, x, x_0)\exp(-i\Omega^m x_0)\,dx_0.$$

Подставляя разложение (11) в формулу (10), получим

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{\pm}(\tilde{K}_x, x)\int\limits_{-L}^{L}\exp[i(K_x^m \mp b_0\tilde{K}_x)x_0]\,dx_0, \tag{12}$$

где $K_x^m = K_x^0 + \Omega^m$. Выполним в формуле (12) интегрирование по координате $x_0$. Тогда поле можно представить в виде

$$\Phi^{(1)}(x, \zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2A_m^{\pm}(\tilde{K}_x, x)\frac{\sin[(K_x^m \mp b_0\tilde{K}_x)L]}{(K_x^m \mp b_0\tilde{K}_x)}. \tag{13}$$

Из формулы (13) можно сделать следующие выводы. Для плавных неровностей влиянием поверхностных волн можно пренебречь, за исключением тех случаев, когда выполняется соотношение

$$|K_x^m| \approx b_0\tilde{K}_x. \tag{14}$$

Условие (14) означает, что средняя фазовая скорость следа $m$-го спектра вдоль границы равна скорости поверхностной волны или близка к ней. При выполнении условия (14) амплитуда поверхностной волны становится очень большой. В этих случаях пользоваться принципом Кирхгофа для расчета рассеянного поля на неровной границе жидкость — твердое тело нельзя.

Статистические неровности. Пусть $\zeta(x)$ — однородная статистическая функция точки в интервале $\{|x| \leqslant L\}$, имеющая нулевое среднее значение. Тогда сторонние источники $F_r(x_0)$ можно представить в виде

$$F_r(x_0) = \tilde{F}_r(x_0)\exp(iK_x^0 x_0),$$

где $\tilde{F}_r(x_0)$ — однородная статистическая функция. Вычислим величины $\langle\Phi^{(1)}\rangle$ и $\langle|\Phi^{(1)}|^2\rangle$ за пределами нерегулярного участка. При расчете мы используем приближенное соотношение: $l(x_0, x) \approx (x - x_0)$.

Среднее поле поверхностных волн можно представить в виде

$$\langle\Phi^{(1)}\rangle = \int\limits_{-L}^{L}\langle\tilde{V}_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)\rangle\exp\{i[(K_x^0 \mp \tilde{K}_x)x_0 \mp \tilde{K}_x x]\}\,dx_0,$$

где $\tilde{V}_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0) = V_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)\exp[-iK_x^0 x_0]$. Поскольку величины $\langle \tilde{F}_r(x_0)\rangle$ не зависят от координаты $x_0$, то множитель $\langle \tilde{V}_1^{\pm}\rangle$ можно вынести за знак интеграла. Выполняя интегрирование по $x_0$, получим

$$\langle \Phi^{(1)}\rangle = 2\langle \tilde{V}_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)\rangle \frac{\sin[(K_x^0 \mp \tilde{K}_x)L]}{(K_x^0 \mp \tilde{K}_x)} \cdot \exp(\pm i\tilde{K}_x x).$$

На основании этой формулы можно сделать следующее заключение: если фазовая скорость следа падающей волны вдоль границы не совпадает со скоростью поверхностной волны, то среднее поле является малой величиной при любой длине нерегулярного участка.

Найдем средний квадрат поля. Эта величина определяется выражением

$$\langle |\Phi^{(1)}|^2\rangle = \left\langle \left| \int_{-L}^{L} \tilde{V}_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)\exp\{i[K_x^4, x_0 \pm \tilde{K}_x(x - x_0)]\}\, dx_0 \right|^2 \right\rangle$$

Пользуясь формулами для величин $\tilde{V}_1^{\pm}(\tilde{K}_x, x_0)$, перепишем это выражение в виде

$$\langle |\Phi^{(1)}|^2\rangle = \left| \frac{\varkappa}{\rho c_t T'(\tilde{K}_x)} \right|^2 \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \sum_{r,s=1}^{3} U_r U_s^* \langle \tilde{F}_r(x_0)\tilde{F}_s^*(x_0')|^2\rangle \times$$

$$\times \exp[i(K_x^0 \mp \tilde{K}_x')(x_0 - x_0') \mp \tilde{K}_x''(2x - x_0 - x_0')]\, dx_0\, dx_0', \qquad (15)$$

где $U_1 = \varkappa^2 \tilde{k}_z$, $\quad U_2 = -\dfrac{\rho_1 c_t}{\varkappa}[(\varkappa^2 - 2\tilde{K}_x^2)^2 + 4\tilde{k}_z\varkappa_z\tilde{K}_x^2]$,

$$U_3 = \pm\tilde{K}_x[(\varkappa^2 - 2\tilde{K}_x^2) - 2\tilde{k}_z\tilde{\varkappa}_z], \quad \tilde{K}_x' = \operatorname{Re}\tilde{K}_x, \ \tilde{K}_x'' = \operatorname{Im}\tilde{K}_x.$$

Величина $\tilde{K}_x''$ характеризует затухание поверхностных волн на неровной границе жидкость — твердое тело. Введем в формуле (15) новую переменную интегрирования $\tau = (x_0' - x_0)$. Используя свойство однородности функции $\zeta$ и пренебрегая средним полем, получим

$$\langle |\Phi^{(1)}|^2\rangle = \left| \frac{\varkappa}{\rho c_t T'(\tilde{K}_x)} \right|^2 \sum_{r,s=1}^{3} U_r U_s \int_{-L}^{L}\int_{-(L+x_0)}^{(L-x_0)} R_{rs}(\tau) \times$$

$$\times \exp\{-[i(K_x^0 \mp \tilde{K}_x') \mp \tilde{K}_x'']\tau \mp 2\tilde{K}_x''(x - x_0)\}\, d\tau\, dx_0. \qquad (16)$$

Величины $R_{rs}$ определяются по формуле

$$R_{rs}(\tau) = \langle \{\tilde{F}_r(x_0) - \langle \tilde{F}_r(x_0)\rangle\}\{\tilde{F}_s(x_0') - \langle \tilde{F}_s(x_0')\rangle\}^*\rangle.$$

Для вычисления этих величин нужно знать функцию распределения неровностей.

Предположим, что выполнены условия $\tilde{K}_x''\tau_0 \ll 1$, $\tau_0 \ll L$, где $\tau_0$ — характерный масштаб неровностей. Тогда из формулы (16) получим

$$\langle |\Phi^{(1)}|^2\rangle \approx \left| \frac{\varkappa}{\rho c_t T'(\tilde{K}_x)} \right|^2 \sum_{r,s=1}^{3} U_r U_s^* \int_{-L}^{L}\int_{-\infty}^{\infty} R_{rs}(\tau) \times$$

$$\times \exp\{-i(K_x^0 \mp \tilde{K}_x')\tau \mp 2\tilde{K}_x''(x - x_0)\}\, d\tau\, dx_0 = \left| \frac{\varkappa}{\rho c_t T'(\tilde{K}_x)} \right|^2 \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}(2\tilde{K}_x'' L)}{\tilde{K}_x''} \sum_{r,s=1}^{3} U_r U_s^* G_{rs}(K_x^0 \mp \tilde{K}_x')\exp(\mp 2\tilde{K}_x'' x),$$

где $G_{rs}(K_x^0 \mp \tilde{K}_x') = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_{rs}(\tau)\exp[-i(K_x^0 \mp \tilde{K}_x')\tau]\, d\tau.$

Таким образом, интенсивность поверхностных волн определяется спектральным составом сторонних источников. При некоторых типах неровностей коэффициенты $G_{rs}(K_x^0 \mp \tilde{K}_x')$ являются малыми величинами. Тогда влиянием поверхностных волн можно пренебречь и, следовательно, для расчета рассеяния можно использовать принцип Кирхгофа. Например, для малых неровностей ($|\zeta/\lambda| \ll 1$) условие применимости принципа Кирхгофа получает вид

$$|(K_x^0 - \tilde{K}_x')\tau_0| \gg 1.$$

При больших неровностях ($|\zeta/\lambda| \gg 1$) для расчета коэффициентов $G_{rs}$ нужно знать функцию распределения этих неровностей. Пусть неровности имеют нормальное распределение, а их функция корреляции задана в форме $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\tau^2/\tau_0^2)$, где $\sigma^2 = \langle\zeta^2\rangle$, $\tau_0$ — характерный масштаб неровностей. В этом случае условие применимости принципа Кирхгофа имеет вид

$$\left|\frac{(K_x^0 - \tilde{K}_x')\tau_0}{K_\sigma}\right| \gg 1.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л. М. Бреховских. Дифракция волн на неровной поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, 23, 3 (9), 275—304.
2. М. А. Исакович. Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, 23, 3 (9), 305—314.
3. В. А. Фок. Проблемы распространения и рассеяния волн. Вестн. АН СССР, 1946, 3.
4. Г. А. Скуридин. К теории рассеяния упругих волн на криволинейной границе. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, 2, 161—183.
5. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
7. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1966.
8. И. А. Викторов. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., «Наука», 1966.



Акустический институт АН СССР
Москва



Поступила в редакцию
7 марта 1967 г.