АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Е. С. Машашвили, И. А. Урусовский

Получено точное решение плоской задачи дифракции звуковых и электромагнитных волн на периодической границе раздела двух сред. В частности, рассмотрен случай дифракции волн на синусоидальной границе раздела.

Рассмотрим плоскую задачу о дифракции гармонических звуковых или электромагнитных волн на периодически неровной границе раздела двух однородных сред, используя способ решения, представляющий обобщение метода, изложенного в работе [1].

Положим, что граница раздела описывается периодической функцией $z = \zeta(x)$ с периодом d; для доказательства пригодности применяемого метода достаточно считать функцию $\zeta(x)$ четырежды дифференцируемой.

Пусть поле $p_i(x, z)$ падающей волны задано как суперпозиция расположенных в конечной части верхнего полупространства $z > \zeta(x)$ точечных источников вида функции Ханкеля $H_0^{(1)}(kR_0)$ или ее производных по координатам. Здесь $R_0 = \sqrt{(x - X_0)^2 + (z - Z_0)^2}$, где X_0, Z_0 — координаты источника. Полное поле в верхней среде обозначим через $p = p_i + p_r$, где p_r — поле рассеянных волн. Поле волн, прошедших в нижнюю среду $z < \zeta(x)$, обозначим через $p^{(1)}$. В акустическом случае эти поля имеют смысл звукового давления, а в электромагнитном — означают компоненты электрического или магнитного вектора вдоль оси y. Величины p_r и $p^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с волновыми числами k и k_1 соответственно.

Граничные условия на поверхности раздела таковы:

$$p(x, \zeta) = p^{(1)}(x, \zeta), \quad \frac{\partial}{\partial n} p^{(1)}(x, z) = M \frac{\partial}{\partial n} p(x, z)$$

при $z = \zeta(x)$, где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по нормали к поверхности раздела. Здесь M — отношение плотности нижней среды к плотности верхней в акустическом случае или отношение диэлектрических либо магнитных проницаемостей соответственно для горизонтальной или вертикальной поляризации падающей волны в электромагнитной задаче.

Можно показать, что полученные ниже функции p_r и $p^{(1)}$, удовлетворяющие указанным требованиям, а также условию ограниченности вместе со своими производными, являются единственными при $0 < \arg k < \pi/2$, $0 < \arg k_1 < \pi/2$. (Последние неравенства означают, что в среде имеется хотя бы малое поглощение.) Схема доказательства отнесена в приложение.

По формуле Грина мы имеем

$$p_r(X,Z)=\frac{i}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[p(x,z)\frac{\partial}{\partial n}H_0^{(1)}(kR)-H_0^{(1)}(kR)\frac{\partial}{\partial n}p(x,z)\right]_{z=\zeta(x)}\frac{dx}{n_z(x)},\tag{1}$$

$$p^{(1)}(X,Z)=-\frac{i}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[p(x,z)\frac{\partial}{\partial n}H_0^{(1)}(k_1R)-\right.$$

$$\left.-H_0^{(1)}(k_1R)M\frac{\partial}{\partial n}p(x,z)\right]_{z=\zeta(x)}\frac{dx}{n_z(x)}.\tag{2}$$

Здесь X, Z — координаты точки наблюдения, $R=\sqrt{(X-x)^2+(Z-z)^2}$, $n_z(x)$ — проекция на ось z единичной нормали к поверхности раздела, $n_z>0$, $1/n_z=\sqrt{1+\zeta'^2(x)}$. Отсюда, устремив точку наблюдения к поверхности раздела, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} p[X\zeta(X)]=2p_i[X,\zeta(X)]+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[K(\tau,x;k)p(x,z)-\right.\\ \qquad\left.-Q(\tau,x;k)\dfrac{1}{n_z(x)}\dfrac{\partial}{\partial n}p(x,z)\right]_{z=\zeta(x)}dx,\\ p[X,\zeta(x)]=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[K(\tau,x;k_1)p(x,z)-\right.\\ \qquad\left.-Q(\tau,x;k_1)\dfrac{M}{n_z(x)}\dfrac{\partial}{\partial n}p(x,z)\right]_{z=\zeta(x)}dx,\end{cases}\tag{3}$$

где

$$\tau=X-x,\ K(\tau,x;k)=\frac{ik}{2r}[\zeta(x+\tau)-\zeta(x)-\tau\zeta'(x)]H_1^{(1)}(kr),$$

$$Q(\tau,x;k)=\frac{i}{2}H_0^{(1)}(kr),\quad r=\sqrt{\tau^2+[\zeta(x+\tau)-\zeta(x)]^2}.$$

Существенно, что при фиксированном τ, ядра K и Q системы интегральных уравнений (3) суть периодические функции по x с периодом d. Это позволяет свести систему (3) к системе алгебраических уравнений, разложив функции K и Q в ряды Фурье:

$$K(\tau,x;k)=\sum_n K_n(\tau)e^{inqx},\quad Q(\tau,x;k)=\sum_n Q_n(\tau)e^{inqx},\tag{4}$$

где $q=2\pi/d$. Подставляя выражения (4) в формулы (3) и переходя к спектральному представлению величин p_i, p и $(1/n_z)\partial p/\partial n$ на границе раздела, получим

$$F(u)=2\Pi(u)+\sum_m[\alpha_m(u;k)F(u+mq)-\beta_m(u;k)\Phi(u+mq)],\tag{5}$$

$$F(u)=-\sum_m[\alpha_m(u;k_1)F(u+mq)-M\beta_m(u;k_1)\Phi(u+mq)],\tag{6}$$

где

$$\Pi(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_i[x,\zeta(x)]e^{iux}dx,$$

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} p[x,\zeta(x)]\,e^{iux}dx,\quad \Phi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{n_z(x)}\frac{\partial}{\partial n}p(x,z)\right]_{z=\zeta(x)} e^{iux}dx, \quad (7)$$

$$\alpha_n(u;k)=\frac{1}{d}\int_0^d e^{-inqx}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\tau}\frac{ik}{2r}[\zeta(x+\tau)-\zeta(x)-\tau\zeta'(x)]H_1^{(1)}(kr)\,d\tau, \quad (8)$$

$$\beta_n(u;k)=\frac{1}{d}\int_0^d e^{-inqx}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}H_0^{(1)}(kr)\,e^{iu\tau}d\tau. \quad (9)$$

Интегралы вида (8) и (9) встречаются в задаче дифракции волн на неровной импеданцной поверхности и были исследованы в работах [1, 2]. Воспользовавшись полученными там результатами, удобно выделить из функций $\alpha_n(u;k)$ и $\beta_n(u;k)$ содержащиеся в них особенности при $u=\pm k$. Эти функции можно представить в виде

$$\alpha_n(u;k)=\hat{\alpha}_n(u;k)+\tilde{\alpha}_n(u;k),\qquad \beta_n(u;k)=\hat{\beta}_n(u;k)+\tilde{\beta}_n(u;k), \quad (10)$$

где

$$\hat{\alpha}_n(u;k)=i\zeta_n\left[\frac{nqu}{\sqrt{k^2-u^2}}+\sqrt{k^2-(u+nq)^2}-\sqrt{k^2-u^2}\right]=$$

$$=i\zeta_n n^2q^2k^2/\{\sqrt{k^2-u^2}[u^2-k^2+nqu-\sqrt{k^2-u^2}\sqrt{k^2-(u+nq)^2}\}, \quad (11)$$

$$\hat{\beta}_n(u,k)=\delta_n i/\sqrt{k^2-u^2}, \quad (12)$$

$\mathrm{Re},\mathrm{Im}\sqrt{k^2-u^2}\geqslant 0$, $\delta_0=1$, $\delta_n=0$ при $n\neq 0$, $\zeta_n=\frac{1}{d}\int_0^d\zeta(x)e^{-inqx}dx$,

а функции $\tilde{\alpha}_n(u;k)$, $\tilde{\beta}_n(u;k)$, определяемые соответственно правыми частями формул (8) и (9) с заменой $H_1^{(1)}(kr)/r$ на $H_1^{(1)}(kr)/r-H_1^{(1)}(k|\tau|)/|\tau|$ и $H_0^{(1)}(kr)$ на $H_0^{(1)}(kr)-H_0^{(1)}(k|\tau|)$, ограничены и быстро убывают с ростом $|u|$ и $|n|$. В случае поверхности синусоидальной формы $\zeta(x)=a\cos qx$, согласно работе [2], имеем $\alpha_{2n}\equiv\beta_{2n+1}\equiv 0$,

$$\alpha_{2n+1}(vq;k)=i\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2n+2s)!}{(s+2n)!s!}\left(\frac{ka}{2}\right)^{2n+2s+1}\times$$

$$\times\left[N_{n+s}(v+n)-\frac{s}{s+2n+1}N_{n+s}(-v-n-1)\right]$$

при $n=0,1,2,3,\ldots$,

$$\beta_{2n}(vq,k)=\frac{i}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2n-2s-1)!}{s!(s+2n)!}\times$$

$$\times\left(\frac{ka}{2}\right)^{2(n+s)}[L_{n+s-1}(v+n)-L_{n+s-1}(v+n-1)]$$

при $n=1,2,3,\ldots$,

$$\beta_0(vq,k)=\frac{i}{k}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2\gamma^2}}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s(2s-1)!}{(s!)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{ka}{2}\right)^{2s}[L_{s-1}(v)-L_{s-1}(v-1)]\right\},$$

где $\gamma = q/k(\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\sqrt{1-v^2\gamma^2}) \geqslant 0$, $N_s(v) = (\gamma^2/2)M_s(v) - L_s(v)$,

$$M_0(v) = 2v/\sqrt{1-v^2\gamma^2},\ M_s(v) = \left(1+\frac{v}{s}\right)L_{s-1}(v) + \left(1-\frac{v}{s}\right)L_{s-1}(v-1),$$

$$L_s(v) = \sum_{m=0}^{s} \frac{(-1)^m}{(s+m+1)!\,(s-m)!}\{[1-(v-m)^2\gamma^2]^{s+1/2} - \\ - [1-(v+m+1)^2\gamma^2]^{s+1/2}\},$$

причем $L_s(-v) = -L_s(v-1)$, $M_s(-v) = -M_s(v)$, $\alpha_{-n}(u;k) = \alpha_n(-u;k)$, $\beta_{-n}(u;k) = \beta_n(-u;k)$. Два последних тождества справедливы и в случае любых четных функций $\zeta(x)$. Если $\zeta_{2n} = 0$ при всех целых n, то $\alpha_{2n} = \beta_{2n+1} \equiv 0$. При нечетных $\zeta(x)$ $\alpha_{-n}(u;k) = -\alpha_n(-u;k)$, $\beta_{-n}(u;k) = \beta_n(-u;k)$.

Вместо системы конечноразностных уравнений (5), (6) удобнее рассматривать эквивалентную ей систему, получаемую сложением равенства (6) с умноженным на M равенством (5) и вычитанием равенства (6) из равенства (5). Выделяя в такой системе $F(u)$ и $\Phi(u)$, получим

$$F(u) = 2\Pi(u)f(u) + \sum_{m\neq 0} a_m(u)F(u+mq) - \sum_m a_m^{(1)}(u)\Phi(u+mq), \quad (13)$$

$$\Phi(u) = 2\Pi(u)g(u) + \sum_m b_m(u)F(u+mq) - \sum_{m\neq 0} b_m^{(1)}(u)\Phi(u+mq), \quad (14)$$

где

$$f(u) = M/[M+1-M\alpha_0(u;k)+\alpha_0(u;k_1)],$$
$$g(u) = 1/[\beta_0(u;k)+M\beta_0(u;k_1)],$$
$$a_m(u) = f(u)\left[\alpha_m(u;k) - \frac{1}{M}\alpha_m(u;k_1)\right],$$
$$a_m^{(1)}(u) = f(u)[\beta_m(u;k) - \beta_m(u;k_1)],$$
$$b_m(u) = g(u)[\alpha_m(u;k)+\alpha_m(u;k_1)],\quad b_m^{(1)}(u) = g(u)[\beta_m(u,k)+M\beta_m(u;k_1)].$$

Представляя в системе (13), (14) $F(u)$ и $\Phi(u)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} F(u) &= 2\sum_n \Pi(u+nq)f(u+nq)X_n(u+nq), \\ \Phi(u) &= 2\sum_n \Pi(u+nq)g(u+nq)Y_n(u+nq), \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

группируя члены, пропорциональные $\Pi(u+nq)$, и приравнивая нулю множители при $\Pi(u+nq)$, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n(u) = \delta_n + \sum_{m\neq n} a_{n-m}(u-nq)X_m(u) - \sum_m a_{n-m}^{(1)}(u-nq)\frac{g(u)}{f(u)}Y_m(u), \quad (16)$$

$$Y_n(u) = \delta_n + \sum_m b_{n-m}(u-nq)\frac{f(u)}{g(u)}X_m(u) - \sum_{m\neq n} b_{n-m}^{(1)}(u-nq)Y_m(u). \quad (17)$$

Система связанных уравнений (16), (17) может быть представлена в виде единой бесконечной системы

$$Z_n(u) + \sum_{m\neq n} A_{n,m}(u)Z_m(u) = \delta_{n-1} + \delta_n, \quad (18)$$

где

$$Z_{2n+1}(u) = X_n(u), \quad Z_{2n}(u) = Y_n(u),$$

$$A_{2n+1,\,2m+1}(u) = -a_{n-m}(u - nq), \quad A_{2n+1,2m}(u) = a^{(1)}_{n-m}(u-nq)\,g(u)/f(u),$$

$$A_{2n,\,2m+1}(u) = -b_{n-m}(u - nq)f(u)/g(u),$$

$A_{2n,\,2m}(u) = b^{(1)}_{n-m}(u - nq)$. Решение системы (18) имеет вид

$$Z_j(u) = \Delta_j(u)/\Delta(u), \tag{19}$$

где $\Delta(u)$ — определитель системы, $\Delta_j(u)$ — определитель, получающийся из $\Delta(u)$ заменой столбца, составленного из коэффициентов $A_{n,\,j}(u)$ при неизвестном $Z_j(u)$ столбцом, составленным из свободных членов $\delta_{n-1} + \delta_n$. Значения Δ и Δ_j могут быть вычислены методом редукции.

Из выражений (10) — (12) видно, что элементы некоторых строк определителей Δ и Δ_j обращаются в бесконечность при $k_1 \to k$, $u \to \pm k + lq$. Возникающая здесь неопределенность в выражении (19) раскрывается умножением соответствующих строк обоих определителей на $\sqrt{k^2 - (u - lq)^2}$.

Поле на границе раздела и в обеих средах выразится через значения X_n, Y_n по формулам (15), (7), (3) аналогично тому, как это сделано в работе [1]. Можно, однако, сразу написать выражения для p_r и $p^{(1)}$, воспользовавшись найденными в работе [1] представлениями дифрагированных волн на жесткой и мягкой неровных поверхностях (в электромагнитном случае — на абсолютно проводящей поверхности при вертикальной и горизонтальной поляризации падающей волны) и учитывая, что правые части равенств (1), (2) по виду представляют собой линейные комбинации полей, дифрагированных на жесткой и мягкой поверхностях. Отсюда

$$p_r(X, Z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(Z, \varkappa_x)\,e^{i(\varkappa_x X + \varkappa_z Z)} + \psi(Z, \varkappa_x)\,e^{i(\varkappa_x X - \varkappa_z Z)}]\,d\varkappa_x,$$

$$p^{(1)}(X, Z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi^{(1)}(Z, \varkappa_x)\,e^{i(\varkappa_x X + \varkappa_{1z} Z)} + \psi^{(1)}(Z, \varkappa_x)\,e^{i(\varkappa_x X - \varkappa_{1z} Z)}]\,d\varkappa_x,$$

где $\varkappa_z = \sqrt{k^2 - (\varkappa_x)^2}$, $\varkappa_{1z} = \sqrt{k_1^2 - (\varkappa_x)^2}$; $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\,\varkappa_z \geqslant 0$; $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\,\varkappa_{1z} \geqslant 0$;

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(Z, \varkappa_x) &= \sum_n \left[S_n(Z, \varkappa_x, \varkappa_z)F(nq - \varkappa_x) - iB_n(Z, \varkappa_z)\frac{1}{\varkappa_z}\Phi(nq - \varkappa_x) \right] \\
\psi(Z, \varkappa_x) &= \sum_n \Big\{[S_n(Z, \varkappa_x - \varkappa_z) - S_n(Z_0, \varkappa_x - \varkappa_z)]F(nq - \varkappa_x) + \\
&\qquad + [C_n(-\varkappa_z) - B_n(Z, -\varkappa_z)]\frac{1}{\varkappa_z}\Phi(nq - \varkappa_x)\Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^{(1)}(Z,\varkappa_x)&=\sum_n\Big[-S_n(Z,\varkappa_x,\varkappa_{1z})F(nq-\varkappa_x)+\\
&\qquad+iMB_n(Z,\varkappa_{1z})\frac{1}{\varkappa_{1z}}\Phi(nq-\varkappa_x)\Big],\\
\psi^{(1)}(Z,\varkappa_x)&=\sum_n\Big\{[S_n(Z_0,\varkappa_x,-\varkappa_{1z})-S_n(Z,\varkappa_x,-\varkappa_{1z})]F(nq-\varkappa_q)+\\
&\quad+iM[C_n(-\varkappa_{1z})-B_n(Z,-\varkappa_{1z})]\frac{1}{\varkappa_{1z}}\Phi(nq-\varkappa_x)\Big\},\\
&S_n(Z,\chi,\varkappa)=\sum_m\left(\delta_m-imq\zeta_m\frac{\chi}{\varkappa}\right)B_{n-m}(Z,\varkappa),
\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

$$B_n(Z,\varkappa)=\frac{1}{d}\int_0^d\frac{1+\operatorname{sign}[Z-\zeta(x)]}{2}e^{-i[\varkappa\zeta(x)+nqx]}\,dx,$$

$$C_n(\varkappa)=\frac{1}{d}\int_0^d e^{-i[\varkappa\zeta(x)+nqx]}\,dx,\qquad(22)$$

$Z_0=\max\zeta(x)$. Выражения для p_r при $Z\geqslant\max\zeta(x)$ и $p^{(1)}$ при $Z\leqslant\min\zeta(x)$ сводятся соответственно к виду

$$p_r(X,Z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\varkappa_xX+\varkappa_zZ)}\varphi(\varkappa_x)\,d\varkappa_x,\qquad(23)$$

$$p^{(1)}(X,Z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\varkappa_xX-\varkappa_{1z}Z)}\Psi^{(1)}(\varkappa_x)\,d\varkappa_x,\qquad(24)$$

где

$$\varphi(\varkappa_x)=\sum_n\left[s_n(\varkappa_x,\varkappa_z)F(nq-\varkappa_x)-iC_n(\varkappa_z)\frac{1}{\varkappa_z}\Phi(nq-\varkappa_x)\right],\qquad(25)$$

$$\psi^{(1)}(\varkappa_x)=\sum_n\left[s_n(\varkappa_x-\varkappa_{1z})F(nq-\varkappa_x)+iMC_n(-\varkappa_{1z})\frac{1}{\varkappa_{1z}}\Phi(nq-\varkappa_x)\right],$$

$$s_n(\chi,\varkappa)=\sum_m\left(\delta_m-imq\zeta_m\frac{\chi}{\varkappa}\right)C_{n-m}(\varkappa)\equiv\left(1+nq\frac{\chi}{\varkappa^2}\right)C_n(\varkappa).\qquad(26)$$

Асимптотические представления для функций $B_n(Z,\varkappa)$, $C_n(\varkappa)$ и разложения в степенной ряд приведены в работе [1]. В частности,

$$C_n(\varkappa)=\delta_n-i\varkappa\zeta_n-\frac{1}{2}\varkappa^2(\zeta^2)_n+\ldots+\frac{1}{m!}(-i\varkappa)^m(\zeta^m)_n+\ldots,\qquad(27)$$

где $(\zeta^m)_n$ — коэффициент Фурье n-го номера функции $\zeta^m(x)$. Из формул (22), (23) видно, что рассеянное поле в верхней среде в точках выше неровностей и поле в нижней среде в области ниже неровностей представляются суперпозицией однородных и неоднородных плоских волн, уходящих от средней линии границы раздела либо скользящих вдоль нее.

При $\varkappa_z \to 0$ правые части равенств (20) и (25), вообще говоря, имеют особенности типа $1/\varkappa_z$. Аналогично, выражения (21) и (26) содержат особенности типа $1/\varkappa_{1z}$. Пользуясь тождествами (5), (6) и учитывая равенства (10)—(12), можно преобразовать указанные выражения к формулам, не содержащим особенностей. Так, выражения (25) и (26) преобразуются соответственно к виду

$$\varphi(\varkappa_x) = 2C_0(\varkappa_z)[F(-\varkappa_x) - \Pi(-\varkappa_x)] +$$

$$+ \sum_{n\neq 0} \Big\{ [\tilde{s}_n(\varkappa_x, \varkappa_z) - C_0(\varkappa_z) i\zeta_n(\varkappa_z^{-n} - \varkappa_z)] F(nq - \varkappa_x) -$$

$$- \frac{1}{\varkappa_z} C_n(\varkappa_z) \Phi(nq - \varkappa_x) \Big\} - C_0(\varkappa_z) \sum_n [\tilde{\alpha}_n(-\varkappa_x; k) F(nq - \varkappa_x) -$$

$$- \tilde{\beta}_n(-\varkappa_x; k) \Phi(nq - \varkappa_x) \Big],$$

$$\psi^{(1)}(\varkappa_x) = 2C_0(-\varkappa_{1z}) F(-\varkappa_x) +$$

$$+ \sum_{n\neq 0} \Big\{ [\tilde{s}_n(\varkappa_x, -\varkappa_{1z}) + C_0(-\varkappa_{1z}) i\zeta_n(\varkappa_{1z}^{-n} - \varkappa_{1z})] F(nq - \varkappa_x) +$$

$$+ \frac{iM}{\varkappa_{1z}} C_n(-\varkappa_{1z}) \Phi(nq - \varkappa_x) \Big\} + C_0(-\varkappa_{1z}) \sum_n [\tilde{\alpha}_n(-\varkappa_x; k_1) F(nq - \varkappa_x) -$$

$$- M\tilde{\beta}_n(-\varkappa_x; k_1) \Phi(nq - \varkappa_x)],$$

где $\varkappa_z^m = \sqrt{k^2 - (\varkappa_x + mq)^2}$, $\varkappa_{1z}^m = \sqrt{k_1^2 - (\varkappa_x + mq)^2}$,

$$\tilde{s}_n(\chi, \varkappa) = \sum_{m\neq n} \left(\delta_m - imq\,\zeta_m \frac{\chi}{\varkappa}\right) C_{n-m}(\varkappa) = s_n(\chi, \varkappa) + inq\,\zeta_n \frac{\chi}{\varkappa} C_0(\varkappa)$$

при $n \neq 0$. Функции $\tilde{s}_n(\chi, \varkappa)$ всюду непрерывны.

Решение задачи дифракции для случая падающей плоской волны вида $p_i(x, z) = \exp[i(k_x^0 x - k_z^0 z)]$, где k_x^0, k_z^0 — компоненты волнового вектора, можно получить и более простым способом, подставляя в систему (3) разложения в ряды Фурье функций p_i, p, $(1/n_z)\partial p/\partial n$:

$$p_i(x, \zeta) = \sum_n C_n(k_z^0) e^{ik_x^n x},$$

$$p(x, \zeta) = \sum_n p_n e^{ik_x^n x}, \quad \left[\frac{1}{n_z(x)} \frac{\partial}{\partial n} p(x, z)\right]_{z=\zeta(x)} = \sum_n p_n' e^{ik_x^n x} \quad (28)$$

и разложения (4), где $k_x^n = k_x^0 + nq$. Приравнивая в формуле (3) коэффициенты Фурье в обеих частях равенств, получим

$$p_n = 2C_n(k_z^0) + \sum_m [\alpha_{n-m}(-k_x^n; k) p_m - \beta_{n-m}(-k_x^n; k) p_m], \quad (29)$$

$$p_n = -\sum_m [\alpha_{n-m}(-k_x^n; k_1) p_m - M\beta_{n-m}(-k_x^n; k_1) p_m']. \quad (30)$$

Проведя такие же элементарные преобразования, что и при переходе от системы уравнений (5), (6) к системе (13), (14), запишем систему

(29), (30) в виде

$$p_n = 2C_n(k_z^0) f(-k_x^n) + \sum_{m \neq n} a_{m-n}(-k_x^n) p_m - \sum_m a_{m-n}^{(1)}(-k_x^n) p_m', \quad (31)$$

$$p_n' = 2C_n(k_z^0) g(-k_x^n) + \sum_m b_{m-n}(-k_x^n) p_m - \sum_{m \neq n} b_{m-n}^{(1)}(-k_x^n) p_m'. \quad (32)$$

Эта система связанных уравнений может быть представлена в виде единой системы

$$X_n + \sum_{m \neq n} a_{n,m} X_m = \gamma_n, \quad (33)$$

где $X_{2n+1} = p_n$, $X_{2n} = p_n'$, $a_{2n+1,\,2m+1} = -a_{m-n}(-k_x^n)$,

$$a_{2n+1,\,2m} = a_{m-n}^{(1)}(-k_x^n), \quad a_{2n,\,2m+1} = -b_{m-n}(-k_x^n),$$

$$a_{2n,\,2m} = b_{m-n}^{(1)}(-k_x^n), \quad \gamma_{2n+1} = 2C_n(k_z^0) f(-k_x^n),$$

$$\gamma_{2n} = 2C_n(k_z^0) g(-k_x^n).$$

Решение системы (33) имеет вид $X_j = \Delta_j/\Delta$, где, как и в случае системы (18), Δ — определитель системы, Δ_j — определитель, получающийся из Δ заменой столбца, составленного из коэффициентов $a_{n,j}$ при неизвестном X_j, столбцом, составленным из свободных членов γ_n.

Поле на границе раздела выражается через значения p_n и p_n' по формулам (28). Как и в общем случае, выражения для p_r и $p^{(1)}$ можно получить, пользуясь представлением дифрагированных волн на жесткой и мягкой поверхностях.

В частности, дифрагированные поля над и под неровностями границы раздела представляются в виде суммы брэгговских спектров:

$$p_r(X, Z) = \sum_l A_l e^{i(k_x^l X + k_z^l Z)} \quad \text{при} \quad Z \geqslant \max \zeta(x),$$

$$p^{(1)}(X, Z) = \sum_l A_l^{(1)} e^{i(k_x^l X - k_{1z}^l Z)} \quad \text{при} \quad Z \leqslant \min \zeta(x),$$

где A_l, $A_l^{(1)}$ — соответственно амплитуды отраженных и преломленных спектров, равные

$$A_l = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ p_{l-n} \left[1 + nq \frac{k_x^l}{(k_x^l)^2} \right] - \frac{i}{k_z^l} p_{l-n}' \right\} C_n(k_z^l), \quad (34)$$

$$A_l^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ p_{l-n} \left[1 + nq \frac{k_x^l}{(k_{1z}^l)^2} \right] + \frac{iM}{k_{1z}^l} p_{l-n}' \right\} C_n(-k_{1z}^l), \quad (35)$$

$k_z^l = \sqrt{k^2 - (k_x^l)^2}$, $k_{1z}^l = \sqrt{k_1^2 - (k_x^l)^2}$; $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} k_z^l \geqslant 0$; $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} k_{1z}^l \geqslant 0$. При малых k_z^l формула (34) становится неудобной для расчета амплитуд спектров, а при $k_z^l = 0$ (скользящий спектр) и вовсе неприменимой. То же следует сказать и о формуле (22), когда $k_{1z}^l \to 0$. Однако члены с малыми знаменателями в выражениях (34) и (35) можно исключить,

пользуясь соответственно тождествами (29) и (30) и учитывая формулы (10) — (12). В результате мы получим

$$A_l = C_0(k_z^l)[p_l - C_l(k_z^l)] + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\Big\{[\tilde{s}_n(k_x^l, k_z^l) -$$

$$- i\zeta_n(k_z^{l-n} - k_z^l)C_0(k_z^l)]p_{l-n} - \frac{i}{k_z^l}C_n(k_z^l)p'_{l-n}\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2}C_0(k_z^l)\sum_n[\tilde{\beta}_n(-k_x^l; k)p'_{l-n} - \tilde{\alpha}_n(-k_x^l; k)p_{l-n}], \qquad (36)$$

$$A_l^{(1)} = C_0(-k_{1z}^l)p_l + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\Big\{[\tilde{s}_n(k_x^l - k_{1z}^l) +$$

$$+ i\zeta_n(k_{1z}^{l-n} - k_{1z}^l)C_0(-k_{1z}^l)]p_{l-n} + \frac{iM}{k_{1z}^l}C_n(-k_{1z}^l)p'_{l-n}\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2}C_0(-k_{1z}^l)\sum_n[\tilde{\alpha}_n(-k_x^l; k_1)p_{l-n} - M\tilde{\beta}_n(-k_x^l; k_1)p'_{l-n}]. \qquad (37)$$

Правые части формул (36), (37) не содержат особенностей, поскольку входящие в них отношения типа $C_n(\varkappa)/\varkappa$, как видно из разложения (27), непрерывны.

При $k_1 = k$, когда скорости волн в обеих средах одинаковы, связанные системы уравнений (16), (17) становятся независимыми, поскольку $a_m^{(1)}(u) \equiv 0$. При этом и система (31) не содержит величин p_m'

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем схему доказательства единственности решения рассматриваемой задачи для случая $0 < \arg k < \pi/2$, $0 < \arg k_1 < \pi/2$ и покажем, что полученные значения p_r и $p^{(1)}$ являются решением задачи. Если бы существовало два различных решения задачи, то для их разности φ, также удовлетворяющей уравнениям Гельмгольца, по формуле Грина мы имели бы

$$\left.\begin{aligned} \int_G (k^2\varphi\varphi^* - \nabla\varphi\,\nabla\varphi^*)\,dG &= \oint_{\Gamma+\Gamma_0} \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Gamma, \\ \int_{G_1} (k_1^2\varphi\varphi^* - \nabla\varphi\,\nabla\varphi^*)\,dG_1 &= \oint_{\Gamma+\Gamma_1} \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}\,d\Gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

где G и G_1 — области пространства, занимаемые соответственно верхней и нижней средой, Γ — граница этих сред; Γ_0 и Γ_1 — дуги бесконечно удаленных полуокружностей, замыкающие Γ до замкнутых контуров, охватывающих области G и G_1; $\partial/\partial n$ *и* $\partial/\partial n_1$ означают дифференцирование по внутренней нормали относительно G и G_1. Поскольку $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Im} k_1 > 0$ (имеется поглощение в среде), то функция Хенкеля и их производные убывают с ростом аргумента по экспоненциальному закону, так что в формулах (1), (2) оправдано отбрасывание интегралов по бесконечно удаленным контурам Γ_0 и Γ_1. По той же причине p_r, $p^{(1)}$, а следовательно, и φ экспоненциально стремятся к нулю при удалении точки наблюдения на бесконечность и интегралы по дугам Γ_0 и Γ_1 в равенствах (38) равны

нулю. Отсюда, учитывая, что $\partial / \partial n = -\partial / \partial n_1$, находим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma &= \int_{G} \varphi\varphi^* \operatorname{Im} k^2 \, dG > 0, \\ \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma &= -\int_{G} \varphi\varphi^* \operatorname{Im} k_1^2 \, dG < 0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Полученное противоречие показывает, что $\varphi \equiv 0$. Значит, задача может иметь лишь единственное решение.

При доказательстве существования решения достаточно положить $p_i = H_0^{(1)}(kR_0)$. Экспоненциальное убывание функций Ханкеля с ростом аргумента обеспечивает абсолютную сходимость всех встречающихся в тексте интегралов и рядов. При этом, проводя интегрирование по частям в правых частях равенств (8), (9) и оценивая получающиеся при этом интегралы, нетрудно показать, что $\alpha_n(u)$, $\beta_n(u)$ быстро убывают с ростом индекса или аргумента, так что сумма квадратов модулей недиагональных коэффициентов системы (18) ограничена и система (18) имеет единственное решение, представляемое формулой (19), если $\Delta(u) \neq 0$ [3]. При этом найденные значения p_r и $p^{(1)}$ дают единственное решение задачи.

Остается показать, что $\Delta(u) \neq 0$. Если при некотором значении u определитель системы (18) равен нулю, то, очевидно, и определитель системы (33) обращается в нуль в точках $k_x^0 = u + nq$ и по альтернативе Фредгольма имеет ненулевое решение однородная система, соответствующая системе (33). Подставляя в формулы (1), (2) это ненулевое решение, получаем, что в пространстве существуют всюду ограниченные собственные колебания, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца и граничным условиям. Но из неравенств (39), как было показано, следует невозможность собственных колебаний в рассматриваемом случае. Следовательно, $\Delta(u) \neq 0$.

Заметим, что при отсутствии поглощения в среде при $k_1 = k$ и специальной форме границы раздела, когда $\zeta(x)$ представляет ломаную, составленную из горизонтальных и вертикальных отрезков так, что вертикальные отрезки разнесены на целое число полуволн, в среде могут быть собственные колебания, представляющие стоячую волну $p = \cos kx$. Этот пример показывает, что доказательство единственности решения в отсутствие поглощения оказывается более сложным и должно принимать во внимание форму границы раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Урусовский. Дифракция волн на периодической поверхности. Акуст. ж., 1964, **10**, 3, 338—346.
2. И. А. Урусовский. Дифракция волн на синусоидальной поверхности. Акуст. ж., 1965, **11**, 1, 93—101.
3. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1949.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
14 декабря 1967 г.