АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 2

УДК 534.23

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ИСКРИВЛЕННЫХ ГРАНИЦ

А. Д. Лапин

Рассмотрена плоская задача о распространении поверхностных волн вдоль искривленной поверхности, характеризующейся импеданцем, и вдоль искривленной границы жидкость — твердое тело. Предполагается, что радиус кривизны поверхности велик по сравнению с длиной волны и мало изменяется на расстоянии нескольких зон Френеля, построенных из центра кривизны. Исследовано влияние кривизны поверхности на затухание и скорость распространения поверхностных волн.

В последнее время в прикладной акустике и технике сверхвысоких частот широко используются поверхностные волны [1—3]. Эти волны применяют в линиях задержки, для целей дефектоскопии и сейсморазведки и так далее. Теория этих волн хорошо разработана лишь для плоских границ. Представляет теоретический и практический интерес рассмотреть задачу о распространении поверхностных волн вдоль искривленных границ. Эта задача возникает, например, при исследовании волн, распространяющихся в земной коре при землетрясениях. Ниже рассмотрена плоская задача о распространении поверхностных волн вдоль искривленной поверхности, характеризующейся упругим импеданцем, и вдоль искривленной границы жидкость — твердое тело. Сперва задача решена для поверхности с постоянной кривизной (цилиндр и цилиндрическая полость), а затем при использовании найденного решения, исследованы поверхностные волны, распространяющиеся вдоль неровной поверхности с переменной кривизной. Во всех случаях рассматриваются лишь те поверхностные волны, которые при безграничном увеличении радиуса кривизны поверхности переходят в поверхностные волны на плоскости. При исследовании поверхностных волн на цилиндре используется метод, изложенный в работе [4].

Пусть цилиндр с радиусом R находится в жидкости. Мы будем считать, что поверхность этого цилиндра характеризуется безразмерной податливостью η [2] и будем искать потенциал гармонической поверхностной волны в жидкости ($r > R$) в виде

$$\Phi(r, \theta) = Ae^{ip\theta}H_p^{(1)}(kr),$$

где $p = KR$, K — волновое число поверхностной волны, $k = w/c$ — волновое число в жидкости, $H_p^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода порядка p. Из граничного условия на поверхности цилиндра мы получим дисперсионное уравнение:

$$H_{p-1}^{(1)}(Z) - H_{p+1}^{(1)}(Z) + 2\eta H_p^{(1)}(Z) = 0, \tag{1}$$

где $Z = kR$.

Вычислим волновое число поверхностной волны на цилиндре большого радиуса ($|p| \gg 1$), используя при расчете асимптотические разложения

цилиндрических функций, полученные для случая, когда аргумент меньше индекса (см. [5, 6]). Подставляя эти разложения в дисперсионное уравнение (1), найдем

$$K \approx K_0 + \varkappa + i\alpha_1,$$

где K_0 — волновое число поверхностной волны на плоской границе,

$$\varkappa = \frac{k}{2\eta p_0} > 0, \qquad \alpha_1 = \frac{b_0^2}{K_0} \exp[-2\gamma(p_0, Z)] > 0,$$

$$\gamma(p_0, Z) = p_0\{\operatorname{arc\,th}(b_0/K_0) - (b_0/K_0)\}, \quad b = \sqrt{K^2 - k^2}.$$

Индекс 0 означает, что данная величина берется при $K = K_0$.

Отсюда видно, что поверхностная волна на цилиндре распространяется медленнее, чем на плоскости и, кроме того, она затухает вследствие излучения в жидкость.

Аналогичным способом решается задача о распространении поверхностных волн в цилиндрической полости с импедансными стенками, заполненной жидкостью. Дисперсионное уравнение для этого случая мы получим из уравнения (1), заменяя в нем η на $(-\eta)$ и функции Ганкеля на функции Бесселя. При большом радиусе полости решение дисперсионного уравнения можно написать в виде $K \approx K_0 - \varkappa$, где $\varkappa$ вычисляется по той же формуле, что и для цилиндра. Таким образом, поверхностная волна распространяется по стенке цилиндрической полости без затухания; скорость этой волны больше скорости поверхностной волны на плоскости.

Применим полученные результаты для исследования поверхностных волн, распространяющихся вдоль неровной границы с переменной кривизной. Пусть неровная поверхность $z = \zeta(x)$, ограничивающая жидкое однородное полупространство $(z > \zeta)$, характеризуется безразмерной податливостью η. Мы будем предполагать, что радиус кривизны этой поверхности велик по сравнению с длиной волны $(KR \gg 1)$ и мало изменяется на расстоянии нескольких зон Френеля, построенных из центра кривизны $(R'\sqrt{R\lambda}/R \ll 1)$. Тогда приближенно можно считать, что поверхностная волна в каждой точке неровной поверхности ведет себя так же, как если бы она распространялась по поверхности круглого прямого цилиндра (при $\zeta'' < 0$) или по поверхности цилиндрической полости круглого сечения (при $\zeta'' > 0$) с радиусом, равным радиусу кривизны неровной поверхности в этой точке. При этом допущении средний коэффициент затухания поверхностной волны, распространяющейся вдоль неровной поверхности, можно написать в виде

$$\langle\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi) w(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

где $\xi = [1 + (\zeta')^2]^{-3/2}\zeta''$ — кривизна поверхности, $w(\xi)$ — плотность вероятности величины ξ,

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при} \quad \xi < 0 \\ 0 & \text{при} \quad \xi > 0 \end{cases}.$$

Пусть величина ξ распределена по нормальному закону:

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}\right\}, \text{ где } \sigma_1^2 = \langle\xi^2\rangle.$$

Тогда средний коэффициент затухания можно представить в виде

$$\langle\alpha\rangle = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{K_0\beta_1}{\xi} - \frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}\right\} d\xi, \tag{3}$$

где $a_1 = \alpha_1 \exp[2\gamma(p_0, Z)] = b_0^2 / K_0$, $\beta_1 = \frac{2}{p_0}\gamma(p_0, Z)$. Вычисляя интеграл в формуле (3) методом перевала, считая, что $K_0\beta_1 / \sigma_1 \gg 1$, получим

$$\langle\alpha\rangle = \frac{a_1}{\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{K_0\beta_1}{\sigma_1}\right)^{2/3}\right\}. \tag{4}$$

Из этой формулы видно, что средний коэффициент затухания поверхностной волны, распространяющийся вдоль неровной поверхности с малой кривизной ($K_0\beta_1 / \sigma_1 \gg 1$), очень мал.

Предположим, что наклоны поверхности малы, т. е. $|\zeta'| \ll 1$. Тогда приближенно кривизну поверхности можно считать равной ζ''. В этом случае величина σ_1^2 связана с функцией корреляции неровностей

$$r(\tau) = \langle\zeta(x)\zeta(x+\tau)\rangle$$

следующим соотношением (см. [7]):

$$\sigma_1^2 = \langle(\zeta'')^2\rangle = \left\{\frac{d^4r}{d\tau^4}\right\}_{\tau=0}.$$

Например, при

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp(-\tau^2 / \tau_0^2), \tag{5}$$

где $\sigma^2 = \langle\zeta^2\rangle$, τ_0 — характерный масштаб неровностей, имеем $\sigma_1^2 = 12\ \sigma^2 / \tau_0^2$.

Используя это соотношение, формулу (4) можно представить в виде

$$\langle\alpha\rangle = \frac{a_1}{\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{3}{2}\left[\frac{\beta_1^2(K_0\tau_0)^4}{12(K_0\sigma)^2}\right]^{1/3}\right\}.$$

Перейдем к рассмотрению поверхностных волн, распространяющихся вдоль искривленной границы жидкость — твердое тело. Пусть твердый цилиндр с радиусом R находится в жидкости. Обозначим через φ и ψ — соответственно потенциалы продольных и поперечных волн в твердом теле. Поверхностные волны будем искать в виде

$$\Phi = Ae^{ip\theta}H_p^{(1)}(kr),\ \varphi = Be^{ip\theta}J_p(k_lr),\ \psi = Ce^{ip\theta}J_p(k_tr), \tag{6}$$

где $k_l = \omega / c_l$ и $k_t = \omega / c_t$ — соответственно волновые числа продольной и поперечной волн в твердом теле, J_p — функция Бесселя порядка p. Подстановка решения в форме (6) в граничные условия при $r = R$ дает однородную систему алгебраических уравнений для амплитуд A, B и C. Приравнивая определитель этой системы уравнений нулю, мы получим дисперсионное уравнение для волнового числа поверхностной волны:

$$m\frac{k}{k_t}[H_{p-1}^{(1)}(Z) - H_{p+1}^{(1)}(Z)]\left\{\left[J_{p-2}(X) + J_{p+2}(X) - 2\left(\frac{k_t^2}{k_l^2} - 1\right)J_p(X)\right]\times\right.$$
$$\left.\times[J_{p-2}(Y) + J_{p+2}(Y)] - [J_{p-2}(X) - J_{p+2}(X)][J_{p-2}(Y) - J_{p+2}(Y)]\right\} +$$
$$+ 2H_p^{(1)}(Z)\left\{\frac{k_t}{k_l}[J_{p-1}(X) - J_{p+1}(X)][J_{p-2}(Y) + J_{p+2}(Y)] -\right.$$
$$\left.- 2K/k_tJ_p(Y)[J_{p-2}(X) - J_{p+2}(X)]\right\} = 0, \tag{7}$$

где $X = k_lR$, $Y = k_tR$, $Z = kR$, $m = \rho_1 / \rho$, ρ и ρ_1 — соответственно плотности жидкости и твердого тела. При $R \to \infty$ уравнение (7) переходит в дисперсионное уравнение поверхностных волн на плоской границе жидкость — твердое тело:

$$\left\{(2K^2 - K_t^2)^2 - 4K^2qs + \frac{qk_t^4}{mb}\right\} = 0, \tag{8}$$

где $q = \sqrt{K^2 - k_l^2}$, $s = \sqrt{K^2 - k_t^2}$, $b = \sqrt{K^2 - k^2}$.

Как известно [8], уравнение (8) имеет два корня — вещественный и комплексный. Эти корни дают волновые числа соответственно для незатухающей и затухающей поверхностных волн на плоской границе. Поверхностные волны на искривленной поверхности, переходящие при безграничном увеличении радиуса кривизны этой поверхности в незатухающую и затухающую волны на плоской границе, мы будем называть соответственно первой и второй поверхностной волной. В дальнейшем все величины, характеризующие вторую поверхностную волну, мы будем отмечать чертой.

При большом радиусе цилиндра решение уравнения (7) можно представить в виде

$$K \approx K_0 + \varkappa + i\alpha_1, \qquad \tilde{K} \approx \tilde{K}_0 + \tilde{\varkappa},$$

где K_0 и $\tilde{K}_0$ — соответственно вещественный и комплексный корни уравнения (8),

$$\varkappa = \frac{1}{2q_0 s_0 b_0 p_0} \{4mb_0^4 [q_0^3 k_t^4 + s_0^3 (K_0^2 k_l^2 - q_0^2 k_t^2)] + \\ + k_l^2 s_0^2 b_0^3 [4q_0^2 (K_0^2 - s_0 q_0) - k_l^2 k_t^2] - k^2 k_t^4 q_0^3 s_0^2\} \times \\ \times \{4mb_0^3 [2q_0 s_0 (K_0^2 + s_0^2) + 3K_0^2 (k_l^2 + k_t^2) - 2k_l^2 k_t^2 - 4K_0^4] + \\ + k_t^4 s_0 (k_l^2 - k^2)\}^{-1}, \tag{9}$$

$$\alpha_1 = k_t^4 q_0^2 b_0^2 s_0 K_0^{-1} \{4mb_0^3 [K_0^2 (q_0^2 + s_0^2) + 2s_0^2 q_0^2 - \\ - 2q_0 s_0 (K_0^2 + s_0^2)] + k_t^4 s_0 (k^2 - k_l^2)\}^{-1} \exp[-2\gamma(p_0, Z)]. \tag{10}$$

Величина $\tilde{\varkappa}$ вычисляется по формуле (9) при замене в ней K_0 на $\tilde{K}_0$. Эта комплексная величина характеризует влияние кривизны поверхности на затухание и скорость распространения второй поверхностной волны. Из сравнения α_1 и $\operatorname{Im} \tilde{\varkappa}$ видно, что кривизна поверхности по-разному влияет на затухание первой и второй поверхностных волн: $\alpha_1 \sim \exp(-K_0 R)$, $\operatorname{Im} \tilde{\varkappa} \sim (K_0 R)^{-1}$. Задача о распространении поверхностных волн на круглом твердом цилиндре в жидкости рассматривалась также в работе [9]. Однако в этой работе не найден коэффициент затухания первой поверхностной волны.

Поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границы цилиндрической полости в твердом теле, заполненной жидкостью, ищем в виде

$$\Phi = Ae^{ip\theta} J_p(kr), \qquad \varphi = Be^{ip\theta} H_p^{(1)}(k_l r), \qquad \psi = Ce^{ip\theta} H_p^{(1)}(k_t r).$$

Дисперсионное уравнение для волнового числа поверхностной волны мы получим из уравнения (7), заменяя в нем функции Бесселя функциями Ганкеля и наоборот. При большом радиусе полости ($|p| \gg 1$) решение дисперсионного уравнения принимает вид $K \approx K_0 - \varkappa + i\alpha_2$, $\tilde{K} \approx \tilde{K}_0 - \tilde{\varkappa}$, где

$$\alpha_2 = q_0 s_0 b_0^2 K_0^{-1} \{mb_0 (K_0^2 + s_0^2) + k_t^4 q_0\} \{4mb_0^3 (q_0 - s_0) [K_0^2 (q_0 - s_0) + \\ + 2q_0 s_0^2] + k_t^4 s_0 (k^2 - k_l^2)\}^{-1} \exp[-2\gamma(p_0, Y)], \tag{11}$$

$$\gamma(p_0, Y) = p_0 \{\operatorname{arc\,th}(s_0 / K_0) - (s_0 / K_0)\}.$$

Величины $\varkappa$ и $\tilde{\varkappa}$ имеют те же значения, что для цилиндра. При $m \to \infty$ (граница твердое тело — вакуум) формулы (9), (10) и (11) переходят в соответственные формулы работы [10].

Применим полученные результаты для расчета среднего коэффициента затухания поверхностной волны, распространяющейся вдоль неровной границы жидкость — твердое тело. При расчете мы будем предполагать, что кривизна поверхности имеет нормальное распределение.

Воспользуемся формулой (2), считая, что

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при} \quad \xi < 0, \\ \alpha_2 & \text{при} \quad \xi > 0. \end{cases}$$

Тогда средний коэффициент затухания для первой поверхностной волны выразится так:

$$\langle\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{2} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{K_0\beta_n}{\xi} - \frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}\right\} d\xi, \tag{12}$$

где $a_1 = \alpha_1 \exp\,[2\gamma(p_0, Z)]$, $a_2 = \alpha_2 \exp\,(2\gamma(p_0, Y)]$,

$$\beta_1 = 2 / p_0\gamma(p_0, Z), \quad \beta_2 = 2 / p_0\gamma(p_0, Y).$$

Вычисляя интегралы в формуле (12) методом перевала, считая, что $K_0\beta_n / \sigma_1 \gg 1$, получим

$$\langle\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{2} \frac{a_n}{\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{K_0\beta_n}{\sigma_1}\right)^{2/3}\right\}. \tag{13}$$

Для пологой поверхности с функцией корреляции, заданной в форме (5), формула (13) принимает вид

$$\langle\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{2} \frac{a_n}{\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{3}{2}\left[\frac{\beta_n^2 (K_0\tau_0)^4}{12\,(K_0\sigma)^2}\right]^{1/3}\right\}.$$

Аналогичным способом можно получить средний коэффициент затухания для второй поверхностной волны. Расчеты показывают, что в первом приближении этот коэффициент равен $\operatorname{Im} K_0$.

Найденные коэффициенты затухания поверхностных волн можно использовать при оценке границ применимости принципа Кирхгофа для неровной поверхности твердого тела. Как показано в работе [11], границы применимости этого принципа определяются коэффициентом затухания поверхностных волн, возникающих на неровной поверхности. Наибольшие ограничения дают поверхностные волны, имеющие малое затухание. Например, на границе жидкость — твердое тело такой волной является первая поверхностная волна. По затуханию именно этой волны следует определять границы применимости принципа Кирхгофа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. М., «Сов. радио», 1957.
2. Л. М. Бреховских. Поверхностные волны в акустике. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 4—13.
3. И. А. Викторов. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., «Наука», 1966.
4. М. А. Миллер, В. И. Таланов. Поверхностные электромагнитные волны, направляемые границей с малой кривизной. Ж. техн. физ., 1956, 26, 12, 2755—2765.
5. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I. М., ИЛ., 1949.
6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Л.— М., ГТТИ, 1949.
7. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. 1. М., «Сов. радио», 1961.
8. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
9. O. D. Grace, R. R. Goodman. Circumferential waves on solid cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1966, 39, 1, 173—174.
10. И. А. Викторов. Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях. Акуст. ж., 1958, 4, 2, 131—136.
11. А. Д. Лапин. О применимости принципа Кирхгофа для расчета рассеяния звука на неровной поверхности твердого тела. Акуст. ж., 1968, 15, 1, 92—97.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
16 апреля 1967 г.