АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 2

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Е. С. Машашвили, И. А. Урусовский

Проведен анализ точного решения плоской задачи дифракции звуковых и электромагнитных плоских волн на периодически неровной границе раздела двух сред для случая достаточно пологой границы. Даны приближенные формулы, описывающие качественные особенности решения. Обнаружено, что в случае малой относительной разности скоростей распространения волн рассматриваемых сред скользящие спектры могут быть весьма интенсивными.

В работе [1] дано точное решение плоской задачи дифракции гармонических звуковых или электромагнитных волн на периодически неровной границе раздела двух однородных сред. Ниже проведен анализ этого решения в случае достаточно пологой границы раздела и плоской падающей волны.

Вместо системы уравнений (29.1) и (30.1) * для компонент Фурье p_n и p_n' поля и нормальной производной поля на границе раздела удобнее рассматривать эквивалентную систему, которая получается путем линейной комбинации уравнений (29.1) и (30.1) и выделения диагональных элементов:

$$\left[1+\sum_s a'_{n,s}b_{s,n}\right]p_n=\gamma_n-\sum_m a'_{n,m}\gamma_m'+$$
$$+\sum_{m\neq n}\left[a_{n,m}-\sum_s a'_{n,s}b_{s,m}\right]p_m+\sum_m\sum_{s\neq m}a'_{n,s}b'_{s,m}p_m', \qquad (1)$$

$$p_n'=\gamma_n'+\sum_m b_{n,m}p_m-\sum_{m\neq n}b'_{n,m}p_m', \qquad (2)$$

где

$$\gamma_n=2MC_n(k_z^0)\,/\,[M+1-M\alpha_0(-k_x^n;k)+\alpha_0(-k_x^n;k_1)],$$

$$\gamma_n'=2C_n(k_z^0)/[\alpha_0'(-k_x^n,k)+M\alpha_0'(-k_x^n,k_1)],$$

$$a_{n,m}=\frac{M\alpha_{n-m}(-k_x^n;k)-\alpha_{n-m}(-k_x^n;k_1)}{M+1-M\alpha_0(-k_x^n;k)+\alpha_0(-k_x^n;k_1)},$$

$$a'_{n,m}=\frac{M[\beta_{n-m}(-k_x^n;k)-\beta_{n-m}(-k_x^n;k_1)]}{M+1-M\alpha_0(-k_x^n;k)+\alpha_0(-k_x^n;k_1)},$$

$$b_{n,m}=\frac{\alpha_{n-m}(-k_x^n;k)+\alpha_{n-m}(-k_x^n;k_1)}{\beta_0(-k_x^n;k)+M\beta_0(-k_x^n;k_1)},$$

$$b'_{n,m}=\frac{\beta_{n-m}(-k_x^n;k)+M\beta_{n-m}(-k_x^n;k_1)}{\beta_0(-k_x^n;k)+M\beta_0(-k_x^n;k_1)}.$$

---

* Формулы цитируемых работ мы снабжаем дополнительным индексом, соответствующим номеру работы.

M — отношение плотности нижней среды к плотности верхней в акустическом случае или отношение диэлектрических либо магнитных проницаемостей соответственно для горизонтальной или вертикальной поляризации падающей волны в электромагнитном случае; остальные обозначения те же, что в работе [1].

В случае пологой поверхности принимаем

$$\zeta' \ll 1,\ k\zeta\zeta' \ll 1,\ k_1\zeta\zeta' \ll 1 \tag{3}$$

и в первом приближении с точностью до квадратичных величин ζ'^2, $k\zeta\zeta'$, $k_1\zeta\zeta'$ можно считать

$$\alpha_n(u, k) \approx i\zeta_n\left[\frac{nqu}{\sqrt{k^2-u^2}} + \sqrt{k^2-(u+nq)^2} - \sqrt{k^2-u^2}\right];$$

$$\beta_n(u, k) \approx i\delta_n/\sqrt{k^2-u^2}.$$

В этом приближении система уравнений (1) и (2) приобретает вид

$$p_n \approx \Gamma_n + \sum_m i\zeta_{n-m}\alpha_{n,m}p_m, \tag{4}$$

$$p_n' \approx -ik_{1z}^n(\Gamma_n/M) + \sum_m \zeta_{n-m}(k_{1z}^n\lambda_{n,m} + k_z^n\mu_{n,m})p_m, \tag{5}$$

где $k_z^n = \sqrt{k^2-(k_x^n)^2}$, $k_{1z}^n = \sqrt{k_1^2-(k_x^n)^2}$, $k_x^n = k_x^0 + nq$;

$$\mathrm{Re,\ Im}\ k_z^n \geqslant 0, \quad \mathrm{Re,\ Im}\ k_{1z}^n \geqslant 0,$$

$$\Gamma_n = 2C_n(k_z^0)Mk_z^n / (k_{1z}^n + Mk_z^n), \quad \alpha_{n,m} = M\lambda_{n,m} - \mu_{n,m},$$

$$\lambda_{n,m} = \frac{k_z^n(k_z^m - k_z^n) + (m-n)qk_x^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n} =$$

$$= -\frac{(n-m)^2q^2k^2}{[k_z^n(k_z^n + k_z^m) + (n-m)qk_x^n][k_{1z}^n + Mk_z^n]},$$

$$\mu_{n,m} = \frac{k_{1z}^n(k_{1z}^m - k_{1z}^n) + (m-n)qk_x^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n} =$$

$$= -\frac{(n-m)^2q^2k_1^2}{[k_{1z}^n(k_{1z}^n + k_{1z}^m) + (n-m)qk_x^n][k_{1z}^n + Mk_z^n]}.$$

При замене системы (1) системой (4) мы пренебрегли в левой части (1) слагаемым, не превышающим величину порядка $\frac{M}{M+1}[(k+k_1)\zeta\zeta']^{3/2}p_n$, а в правой части — величинами порядка $(k+k_1)\zeta\zeta'[\zeta_{n-m}\alpha_{n,m} + \sqrt{(k+k_1)\zeta\zeta'}]p_m$. (Как правило, эти погрешности еще меньше и составляют соответственно величины порядка $\zeta'^3p_nM / (M+1)$, ζ'^3p_m, $\zeta'^2M / (M+1)$.)

Система (4) не зависит от p_n' и имеет такую же структуру, как и соответственная система для величин p_n, получающаяся в теории дифракции волн на импедансной поверхности [2]. Следовательно, для нахождения p_n можно прямо воспользоваться полученными в работе [2] результа-

тами, заменив свободный член на Γ_n и коэффициенты системы на $i\zeta_{n-m}a_{n,m}$. При этом мы получим

$$p_s \approx \Gamma_s + \frac{1}{\Delta(-k_x^s)} \sum_n \left[i\zeta_n a_{s,s-n} - \sum_m \zeta_m \zeta_{n-m} a_{s,s-m} a_{s-m,s-n} \right] \Gamma_{s-n}, \quad (6)$$

где Δ — определитель системы (4), приближенно равный

$$\Delta(-k_x^s) \equiv \Delta(-k_x^0) \approx 1 + \sum_{\nu \geqslant 1} \zeta_\nu \zeta_{-\nu} \sum_m a_{m,m-\nu} a_{m-\nu,m}. \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) мы пренебрегли слагаемыми, состоящими из произведений трех и большего числа недиагональных коэффициентов системы (4). Такое пренебрежение оправдано тем, что при выполнении условий (3) недиагональные коэффициенты системы (4) малы по абсолютной величине сравнительно с единицей и указанные произведения вносят малый вклад в величины p_s и Δ.

Из выражений для $a_{n,m}$ и формулы (7) видно, что всюду, кроме, возможно, малой сравнительно с q окрестности точек $k_x^s = \nu q \pm k$ при целых ν, $|\Delta - 1| \ll 1$. Точнее, последнее неравенство справедливо, если $\varepsilon_\nu \ll 1$ при всех целых ν, где $\varepsilon_\nu = k\zeta\zeta'(M-1)^2 \cdot \sqrt{qk} / [(M+1)|k_{1z}^\nu + Mk_z^\nu|]$. При больших M либо при малых $[(k_1 - k)/k]$ в окрестности точек $k_x^s = \pm k$, когда $\varepsilon_s \gtrsim 1$, Δ существенно отличается от единицы. Тогда, удерживая в формуле (7) лишь главные члены с $m = s, s+\nu$, получим при $k_x^s \approx \pm k$

$$\Delta(-k_x^s) \approx 1 + \sum_m \zeta_m \zeta_{-m} a_{s,s-m} a_{s-m,s}. \quad (8)$$

Вообще говоря, формулы (6) — (8) неприменимы, если сразу две строки матрицы коэффициентов системы (4) содержат большие по абсолютной величине недиагональные элементы, что может быть в случае, когда период поверхности близок к целому числу N полуволн, а именно, если величина ε_ν не мала сравнительно с единицей одновременно для двух целых ν (различающихся на N). Тогда при вычислении Δ следует учитывать также и все существенные произведения, содержащие коэффициенты a с первым индексом, равным $s \mp N$, если $k_x^s \approx \pm k$. Такого рода редкие случаи мы рассматривать не будем.

Из формулы (6) видно, что $|p_s|$ может достигать больших сравнительно с единицей значений, если k_x^s попадает в малую окрестность точек $\pm k$ при больших M, либо малых $|(k_1 - k)/k|$, а именно $|p_s| \gg 1$ при $|\zeta_s a_{s,0}| \gg 1$. Последнему неравенству равносильно условие $\varphi_s \gg 1$, где

$$\varphi_s = |2\zeta_s' M(M-1)k_z^0 k / [(k_{1z}^0 + Mk_z^0)(k_{1z}^s + Mk_z^s)]|,$$

ζ_s' — компонента номера s разложения Фурье функции $\zeta'(x)$. При $\varphi_s \gtrsim 1$ и $\varepsilon_s \lesssim 1$ абсолютные значения коэффициентов p_s, а следовательно, и амплитуд дифратированных спектров, являются величинами того же порядка, что и φ_s. Если же $\varphi_s \gg 1$ и $\varepsilon_s \ll 1$, то с малой относительной ошибкой имеем $|p_s| \approx |A_s| \approx |A_s^{(1)}| \approx \varphi_s$, где A_s и $A_s^{(1)}$ — амплитуды соответственно отраженных и преломленных спектров. Отсюда легко найти условия, при которых $|p_s|$ и амплитуды скользящих спектров могут быть большими сравнительно с амплитудой падающей волны. Поскольку $\varphi_s \lesssim |2\zeta_s' M(M-1)k / [(M+1)\sqrt{k_1^2 - k^2}]|$, то это явление * может наблю-

* Независимо и одновременно это явление, состоящее в образовании интенсивных скользящих спектров при дифракции плоской волны на периодически неровной границе раздела двух сред, было теоретически обнаружено и исследовано Ю. П. Лысановым для случая нормального падения плоской волны на синусоидальную границу раздела при малой сравнительно с длиной волны амплитуде неровностей. Использованный им метод расчета поля представляет уточненную модификацию метода малых возмущений.

даться только в случае малой относительной разницы $\Delta c / c$ скоростей распространения волн в рассматриваемых средах, либо больших значениях M, а именно, при условии $|\zeta_s' M(M-1)/(M+1)| \gtrsim \sqrt{\Delta c / c}$. С другой стороны, если последнее условие выполнено, то этот эффект проявляется лишь для малого диапазона углов скольжения спектра, когда $|k_z^s / k| \lesssim \lesssim |2\zeta_s' M(M-1)/(M+1)^2|$. При

$$|\zeta' M(M-1)/(M+1)| \ll \sqrt{\Delta c / c} \tag{9}$$

эффект отсутствует вовсе.

Наиболее интенсивными скользящие спектры получаются, когда скорости распространения волн в обеих средах одинаковы. В этом случае

$$a_{n,m} = [(M-1)/(M+1)][(m-n)qk_x^n + k_z^n(k_z^m - k_z^n)]/k_z^n,$$

$$\Gamma_n = 2C_n(k_z^0)M/(M+1).$$

Заметим, что коэффициенты и свободные члены системы (4) при $k_1 = k$ отличаются от соответствующих предельных значений при $M \to \infty$ только множителями $(M-1)/(M+1)$ и $M/(M+1)$. Таким образом, искомые коэффициенты p_n можно найти, заменив в формулах для предельных значений этих коэффициентов, полученных в [2], ζ_m на $\zeta_m(M-1)/(M+1)$ и $2C_m(k_z^0)$ на Γ_m. При $k_1 = k$ и малых $|k_z^s / k|$ вместо формулы (6) удобнее пользоваться выражением

$$p_s = \frac{2M}{M+1}\left\{C_s(k_z^0) + \frac{M-1}{M+1}\frac{1}{\Delta}\left[f_s - i\frac{M-1}{M+1}\frac{q}{k_z^s}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_n \frac{(s-n)^2 q\zeta_{s-n} f_n k^2}{k_z^s(k_z^s + k_z^n) + (s-n)qk_x^s}\right]\right\}, \tag{10}$$

где

$$f_n = nC_n(k_z^0)qk_x^n/(k_z^0 k_z^n) + i\sum_m \zeta_{n-m}(k_z^m - k_z^n)C_m(k_z^0).$$

Оно получено тождественным преобразованием правой части формулы (6) на основе тождества [3]:

$$nC_n(\varkappa) = -i\varkappa\sum_m m\zeta_m C_{n-m}(\varkappa). \tag{11}$$

При $k_x^s = \pm k$ $k_z^s = 0$ и выражение для p_s в случае $k_1 = k$ сводится к виду:

$$p_s|_{k_x^s = \pm k} \approx \frac{2M}{S}\left[\pm\frac{s\sqrt{qk}}{(M-1)k_z^0}C_s(k_z^0) - \frac{1}{M+1}\sum_{n\neq 0} C_{s-n}(k_z^0)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m\neq n} mqk\zeta_m\zeta_{n-m}\left(\frac{m+n\mp mn\gamma}{\sqrt{\pm 2m - m^2\gamma}} \mp \sqrt{\pm 2n - n^2\gamma}\right)\right], \tag{12}$$

где

$$\gamma = q/k, \quad S = \sum_{m\geq 1} m^2 qk\zeta_m\zeta_{-m}[(2m - m^2\gamma)^{-1/2} - i(2m + m^2\gamma)^{-1/2}].$$

При $k_x^s = \pm k + \nu q$, где ν — целое, $\nu \neq 0$, находим из формулы (10)

$$p_s \approx 2\frac{M}{M+1}\left\{C_s(k_z^0) + i\nu\zeta_\nu\sqrt{qk}(s-\nu)C_{s-\nu}(k_z^0)\frac{qk}{Sk_z^0 k_z^s}\right\}. \tag{13}$$

В случае $\zeta(x) = a\cos qx$ мы имеем $C_n(\varkappa) = i^{-n}J_n(\varkappa a)$ и формулы (12), (13) упрощаются: при $k_x{}^s = \pm k$

$$p_s \approx 2Mi^{-s}\frac{\sqrt{4-\gamma^2}}{\sqrt{2+\gamma}-i\sqrt{2-\gamma}}\left\{\pm\frac{4s}{(M-1)k_z{}^0\sqrt{qk}\,a^2}J_s(k_z{}^0a)+\right.$$
$$+\frac{1}{M+1}\left[\left(\frac{3\mp 2\gamma}{\sqrt{\pm 2-\gamma}}\mp 2\sqrt{\pm 1-\gamma}\right)J_{s-2}(k_z{}^0a)+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{3\pm 2\gamma}{\sqrt{\mp 2-\gamma}}\pm 2\sqrt{\mp 1-\gamma}\right)J_{s+2}(k_z{}^0a)\right]\right\}, \qquad (14)$$

и при $k_x{}^s = \pm k + \nu q$

$$p_s\big|_{|\nu|=1} \approx i^{-s}\frac{2M}{M+1}\left\{J_s(k_z{}^0a)-\left[\frac{2(s-\nu)}{k_z{}^0a}J_{s-\nu}(k_z{}^0a)\Big/\left(1\pm i\nu\frac{\sqrt{2\pm\nu\gamma}}{\sqrt{2\mp\nu\gamma}}\right)\right]\right\},$$

$$p_s\big|_{|\nu|\geqslant 2} \approx i^{-s}\frac{2M}{M+1}J_s(k_z{}^0a).$$

Величины $p_n{}'$ мы получим, подставляя найденные значения p_m в формулу (5). При $k_1 = k$ она имеет вид

$$p_n{}' \approx \frac{2}{M+1}\left\{-ik_z{}^nC_n(k_z{}^0)+\sum_m \zeta_{n-m}[(m-n)qk_x{}^n+k_z{}^n(k_z{}^m-k_z{}^n)p_m\right\}.$$

Сопоставляя последнее выражение с формулой (4), находим при $k_1 = k$

$$ip_n{}' \approx 2k_z{}^n[p_n - C_n(k_z{}^0)]\,/\,(M-1). \qquad (15)$$

Выражения для амплитуд отраженных и преломленных спектров A_l и $A_l^{(1)}$ получены в работе [1]:

$$A_l = \frac{1}{2}\sum_n\left\{p_{l-n}\left[1+n\frac{qk_x{}^l}{(k_z{}^l)^2}\right]-\frac{i}{k_z{}^l}p'_{l-n}\right\}C_n(k_z{}^l), \qquad (16)$$

$$A_l^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_n\left\{p_{l-n}\left[1+n\frac{qk_x{}^l}{(k_{1z}{}^l)^2}\right]+\frac{iM}{k_{1z}{}^l}p'_{l-n}\right\}C_n(-k_{1z}{}^l). \qquad (17)$$

При малых $k_z{}^l/k$ и $k_{1z}{}^l/k$ эти формулы неудобны для расчета, а в случае скользящего спектра и вовсе неприменимы. Удобные для расчета формулы также даны в работе [1]. В рассматриваемом случае пологой поверхности, в пренебрежении членами порядка $(k_z{}^l\zeta)^2$ в разложении для $C_n(k_z{}^l)$

$$C_n(\varkappa) = \delta_n - i\varkappa\zeta_n - \frac{1}{2}\varkappa^2(\zeta^2)_n + \ldots\frac{1}{m!}(-i\varkappa)^m(\zeta^m)_n + \ldots [3]$$

эти формулы примут вид

$$A_l \approx p_l - C_l(k_z{}^0) - \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\left\{\left[i\zeta_nk_z{}^{l-n}+k_x{}^l\sum_{m\neq n}mq\zeta_m\zeta_{n-m}\right]p_{l-n}+\zeta_np'_{l-n}\right\}, \qquad (18)$$

$$A_l^{(1)} \approx p_l + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\left\{\left[i\zeta_nk_{1z}{}^{l-n}-k_x{}^l\sum_{m\neq n}mq\zeta_m\zeta_{n-m}\right]p_{l-n}-M\zeta_np'_{l-n}\right\}. \qquad (19)$$

В частности, подставляя в формулу (18) выражения (13) и (15), получим при $k_1 = k$ и $k_z^l = 0$

$$A_l \approx p_l - C_l(k_z^0) - \sum_{n\neq 0}\left\{ i\frac{M-1}{M+1}\zeta_n k_z^{l-n} C_{l-n}(k_z^0) + \frac{k_x^l}{2}\sum_{m\neq n} mq\zeta_m\zeta_{n-m}p_{l-n}\right\}. \tag{20}$$

$$A_l^{(1)} \approx A_l + C_l(k_z^0) + \frac{3M-1}{M+1}\sum_{n\neq 0} i\zeta_n k_z^{l-n} C_{l-n}(k_z^0). \tag{21}$$

В случае $\zeta(x) = a\cos qx$ эти формулы принимают вид

$$A_l \approx p_l - i^{-l}\left\{ J_l(k_z^0 a) + \frac{M-1}{M+1}\frac{a}{2}[k_z^{l+1} J_{l+1}(k_z^0 a) - k_z^{l-1} J_{l-1}(k_z^0 a)]\right\} -$$

$$- \frac{M}{M+1} k_x^l q \frac{a^2}{4}[J_{l-2}(k_z^0 a) + J_{l+2}(k_z^0 a)]\Big\}, \tag{22}$$

где p_l при $k_x^l = \pm k$ выражается формулой (14) с заменой s на l,

$$A_l^{(1)} \approx A_l + i^{-l}\left\{ J_l(k_z^0 a) + \frac{3M-1}{M+1}\frac{a}{2}[k_z^{l+1} J_{l+1}(k_z^0 a) - k_z^{l-1} J_{l-1}(k_z^0 a)]\right\}. \tag{23}$$

При $k_z^0\zeta \gg 1$, сохраняя в разложении по степеням k_z^0 функций $C_m(k_z^0)$, содержащихся в формулах (13), (20) и (21), лишь наиболее существенные первые члены и пренебрегая слагаемыми порядка $k\zeta\zeta'$, получим при $k_x^l = \pm k$, $l \neq 0$

$$A_l \approx \frac{2M}{S}\left\{ \mp \frac{l\sqrt{qk}}{M-1}\left(i\zeta_l + \frac{1}{2}\sqrt{qk}\sqrt{\pm 2l - l^2\gamma}\sum_{m\neq 0,\, l}\zeta_m\zeta_{l-m}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{M+1}\sum_{m\neq l} mqk\zeta_m\zeta_{l-m}\left(\frac{m + l \mp lm\gamma}{\sqrt{\pm 2m - m^2\gamma}} \mp \sqrt{\pm 2l - l^2\gamma}\right)\right\} + \frac{2i}{M+1}k_z^0\zeta_l, \tag{24}$$

$$A_l^{(1)} \approx A_l + 2i\frac{M-1}{M+1}k_z^0\zeta_l. \tag{25}$$

Аналогично, в случае синусоидальной границы раздела, при малых $k_z^0 a$ из формулы (14), (22) и (23) находим

$$A_1 \approx M\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}(\sqrt{2-\gamma} - i\sqrt{2+\gamma})\left\{\frac{1}{M-1}\left[\frac{2}{a\sqrt{qk}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{a\sqrt{qk}}{4}(2-\gamma)\right] - \frac{a\sqrt{qk}}{2(M+1)}\left(\frac{3}{2} - \gamma - \sqrt{1-\gamma}\sqrt{2-\gamma}\right)\right\} +$$

$$+ i\frac{\sqrt{2-\gamma}}{M+1}a\sqrt{qk} \quad \text{при} \quad k_x^1 = k, \tag{26}$$

$$A_1^{(1)} \approx A_1 + i\frac{M-1}{M+1}a\sqrt{qk}\sqrt{2-\gamma} \quad \text{при} \quad k_x^1 = k, \tag{27}$$

$$A_2 \approx A_2^{(1)} \approx -\frac{M}{M+1}\left(2 + \gamma + 2i\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\sqrt{1-\gamma}\sqrt{2-\gamma}}{M-1} + \frac{3}{2} - \gamma\right) \quad \text{при} \quad k_x^2 = k.$$

Из формул (12) — (27) видно, что амплитуды интенсивных скользящих спектров в случае одинаковых скоростей распространения волн в обеих средах достигают величины порядка $[M / (M-1)]\zeta_l' / (\zeta'\zeta\sqrt{q}k)$. Эти амплитуды в $M / (M-1)$ раз больше соответственных амплитуд для случая жесткой поверхности. Чем меньше относительная разница в плотностях сред при отсутствии поглощения, тем более интенсивными становятся скользящие спектры. Это и понятно, поскольку по мере уменьшения $|M-1|$ неровности становятся все более прозрачными для волн, первично рассеянных в скользящем направлении и в амплитуду поля в каждой точке наблюдения вносит существенный вклад все большее число ячеек неровной поверхности.

При $k_1 = k$ уменьшение $|M-1|$ сказывается на амплитуде интенсивного спектра так же, как уменьшение амплитуды неровностей в случае дифракции на жесткой поверхности [2]. Именно, амплитуда интенсивного спектра при дифракции плоской волны на границе раздела $Z = \zeta(x)$ равна умноженной на $M / (M+1)$ амплитуде спектра того же номера в случае дифракции на жесткой поверхности $z = [(M-1) / (M+1)]\zeta(x)$. Как и в случае жесткой поверхности, наиболее интенсивным оказывается спектр, для которого $|\zeta_l'|$ наибольшее, а среди всех поверхностей раздела заданной крутизны наклона самый интенсивный спектр возникает в случае синусоидальной поверхности. При выполнении условия (9) $|\Delta - 1| \ll 1$, $|\zeta_n \alpha_{s,\,s-n}| \ll 1$ и в правых частях формул (6), (5) можно, сохраняя лишь наиболее существенные члены, положить

$$\left.\begin{aligned} p_n &\approx 2C_n(k_z^0)\frac{Mk_z^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n} + i\zeta_n(M\lambda_{n,0} - \mu_{n,0})2C_0(k_z^0)\frac{Mk_z^0}{k_{1z}^0 + Mk_z^0}, \\ p_n' &\approx -2iC_n(k_z^0)\frac{k_z^n k_{1z}^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n} + \zeta_n(k_{1z}^n\lambda_{n,0} + k_z^n\mu_{n,0})2C_0(k_z^0)\times \\ &\quad \times\frac{Mk_z^0}{k_{1z}^0 + Mk_z^0}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

а амплитуды спектров мы получим подстановкой этих выражений в формулы (16) — (19). При малых $k_z^0\zeta$, пренебрегая в разложении функций $C_n(k_z^0)$ членами порядка $(k_z^0\zeta)^2$, получим из формулы (28)

$$\left.\begin{aligned} &p_0 \approx 2Mk_z^0/(k_{1z}^0 + Mk_z^0), \qquad p_0' \approx -ik_{1z}^0 p_0/M, \\ &p_n \approx -i2Mk_z^0\zeta_n\left[\frac{k_z^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n} - \frac{M\lambda_{n,0} - \mu_{n,0}}{k_{1z}^0 + Mk_z^0}\right], \\ &p_n' \approx -2k_z^0\zeta_n\left[\frac{k_z^n k_{1z}^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n} - M\frac{k_{1z}^n\lambda_{n,0} + k_z^n\mu_{n,0}}{k_{1z}^0 + Mk_z^0}\right], \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

что совпадает с соответственными результатами метода малых возмущений. Подставляя эти значения в формулы (16), (17) и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными ζ^2, мы получим выражения для амплитуд спектров, также совпадающие с результатами метода возмущений:

$$\left.\begin{aligned} &A_0 \approx (Mk_z^0 - k_{1z}^0)/(Mk_z^0 + k_{1z}^0), \qquad A_0^{(1)} = 2Mk_z^0/(Mk_z^0 + k_{1z}^0), \\ &A_l \approx \frac{1}{2}\left\{p_l - \frac{i}{k_z^l}p_l' - i\zeta_l\left[p_0\frac{(k_z^0)^2 - k_x^0 lq}{k_z^l} - ip_0'\right]\right\}, \\ &A_l^{(1)} \approx \frac{1}{2}\left\{p_l + i\frac{M}{k_{1z}^l}p_l' + i\zeta_l\left[p_0\frac{(k_{1z}^0)^2 - k_x lq}{k_{1z}^l} + iMp_0'\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Формулы (30) применимы, если одновременно выполнены условия (9) и $(k_z^0 + k_z^l)\zeta \ll 1$, $(k_{1z}^0 + k_{1z}^l)\zeta \ll 1$. Если же пользоваться формулами (29)

только для вычисления значений p_n и p_n', а амплитуды спектров вычислять по формулам (16), (17) без дальнейших упрощений, то два последних неравенства можно заменить более слабым условием $k_z^0\zeta \ll 1$.

При $q \ll (k + k_1)$ в правых частях формул (28) можно удерживать лишь первые слагаемые, как наиболее существенные:

$$p_n \approx 2C_n(k_z^0)\frac{Mk_z^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n}, \qquad p_n' \approx -2iC_n(k_z^0)\frac{k_z^n k_{1z}^n}{k_{1z}^n + Mk_z^n}$$

вычисляя амплитуды нескользящих спектров по формулам (16), (17), а амплитуды скользящих, соответствующих наименьшим значениям k_z^l и k_{1z}^l — по формулам (18) и (19). Эти же результаты пригодны и в случае, если условие (9) не выполнено, но $|[\zeta' + (q/k_z^0)](M-1)k/(k_{1z}^m + Mk_z^m)| \ll 1$ при всех m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Машашвили, И. А. Урусовский. Дифракция волн на периодически неровной границе раздела сред. Акуст. ж., 1969, 15, 1, 98—107.
2. И. А. Урусовский. Дифракция синусоидальных волн на неровной и неоднородной периодической поверхности (канд. диссертация), М., Акустический институт АН СССР, 1963.
3. И. А. Урусовский. Дифракция волн на периодической поверхности. Акуст. ж., 1964, 10, 3, 338—346.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
27 апреля 1967 г.