АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 2

УДК 534.26

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ МЕТОДОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ДИФФУЗИИ

А. В. Попов

Рассматриваются асимптотические свойства приближения поперечной диффузии в задаче о дифракции на клине и вопросы, связанные с его вычислением. Параболическое уравнение в лучевых координатах решается методом конечных разностей. Проводится численное сравнение с точным решением задачи, показывающее эффективность приближения поперечной диффузии, начиная с расстояния порядка одной длины волны от ребра клина.

В работе Малюжинца [1] для асимптотического решения коротковолновых задач дифракции было предложено уравнение поперечной диффузии в лучевых координатах (ξ, η, ζ)

$$2ik\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\zeta}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\right]+$$

$$+ik\frac{\partial \ln(h_\eta h_\zeta)}{\partial \xi}u=0, \qquad (1)$$

являющееся обобщением параболического уравнения, введенного ранее Леонтовичем и Фоком [2]. Одним из примеров использования уравнения (1), рассматриваемым в работе [1], была задача о дифракции плоской волны на клине. Было показано, что переход от уравнения Гельмгольца к уравнению поперечной диффузии приводит к результату, асимптотически совпадающему с точным решением задачи. Более детально решение параболического уравнения исследовано в работе Уфимцева [3], где метод поперечной диффузии применен также для приближенного решения задачи о дифракции цилиндрической волны на клине.

В настоящей работе мы вернемся к задаче о дифракции плоской волны на клине. Будет получена равномерная асимптотическая оценка погрешности метода поперечной диффузии, уточняющая результат работы [3]. Мы рассмотрим также вопросы, связанные с решением параболического уравнения в лучевых координатах методом конечных разностей. Целью является непосредственное численное сравнение приближения поперечной диффузии с точным решением задачи и определение области его практической применимости.

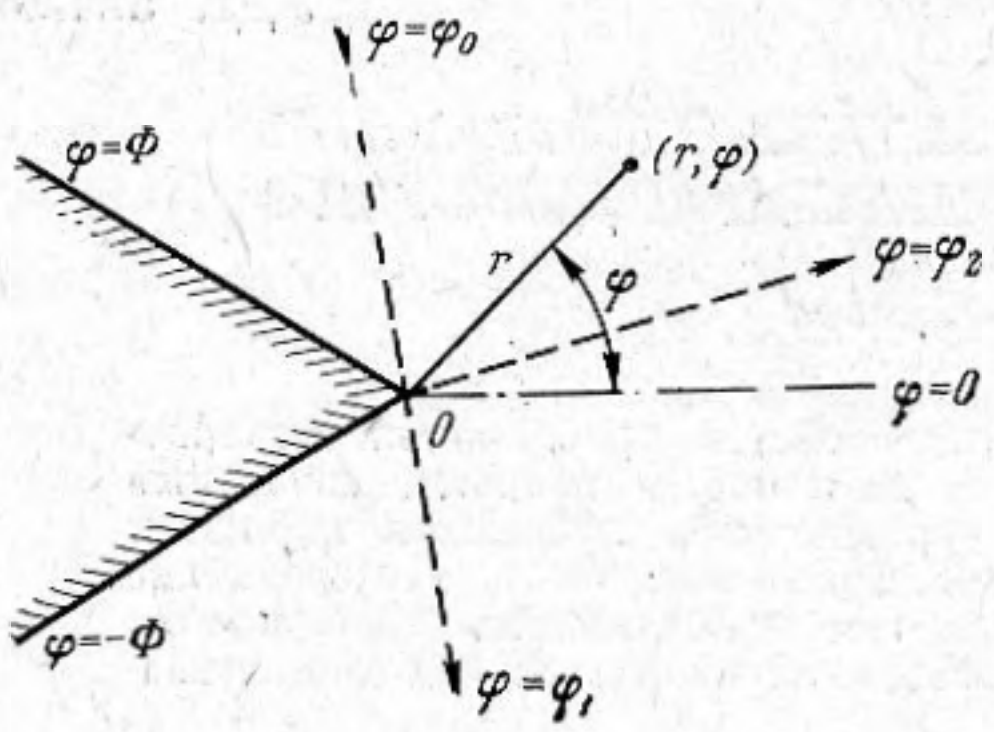
Рассмотрим задачу о дифракции плоской звуковой волны на клине с идеально жесткими гранями *. Пусть в полярных координатах (r, φ) грани клина определяются равенствами $\varphi=\pm\Phi$, а первичная плоская волна приходит из бесконечности под углом φ_0 к лучу $\varphi=0$ (см. фиг. 1). Ограничимся для определенности случаем, когда первичная волна падает толь-

* Все излагаемые ниже результаты с очевидными изменениями переносятся на случай идеально мягкого клина.

ко на одну грань клина ($\pi/2 < \Phi \leqslant \pi$, $\pi - \Phi < \varphi_0 < \Phi$). Тогда в приближении геометрической акустики поле звукового давления $P(r, \varphi)$ в области D: $\{r > 0, -\Phi < \varphi < \Phi\}$ имеет вид

$$p_{\text{г}}(r, \varphi) = \begin{cases} e^{ikr\cos(\varphi-\varphi_1)}, & \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 - \Phi < \varphi < \varphi_1 \\ e^{ikr\cos(\varphi-\varphi_1)} + e^{ikr\cos(\varphi-\varphi_2)}, & \varphi_2 < \varphi < \Phi, \end{cases} \tag{2}$$

учитывающий краевое условие $\frac{\partial P}{\partial \varphi}(r, \pm\Phi) = 0$, выражающее обращение в нуль нормальной составляющей скорости на гранях клина. Здесь $\varphi_1 = -\pi + \varphi_0$ и $\varphi_2 = -\pi + 2\Phi - \varphi_0$ — геометрические границы тени для падающей и отраженной плоских волн, $k = \omega/c$ — волновое число (множитель $e^{-i\omega t}$, характеризующий гармоническую зависимость от времени мы всюду опускаем).



Фиг. 1

Чтобы найти точное решение задачи, представим полное звуковое поле $p(r, \varphi)$ в виде суммы

$$p(r, \varphi) = p_{\text{г}}(r, \varphi) + p_{\text{д}}(r, \varphi) \tag{3}$$

геометро-акустического поля $p_{\text{г}}$ и некоторого «дифракционного» члена $p_{\text{д}}$. Дифракционная часть поля $p_{\text{д}}(r, \varphi)$ в подобластях D_1: $\{-\Phi < \varphi < \varphi_1\}$, D_2: $\{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$, D_3: $\{\varphi_2 < \varphi < \Phi\}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p_{\text{д}} + k^2 p = 0. \tag{4}$$

При $\varphi = \pm\Phi$ выполняется краевое условие

$$\frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial \varphi}(r, \pm\Phi) = 0. \tag{5}$$

На границах тени $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ дифракционное поле $p_{\text{д}}$ компенсирует разрывы функции $p_{\text{г}}$

$$p_{\text{д}}(r, \varphi_{1,2} - 0) - p_{\text{д}}(r, \varphi_{1,2} + 0) = e^{ikr}, \tag{6}$$

в то время как его нормальная производная на этих лучах остается непрерывной

$$\frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial \varphi}(r, \varphi_{1,2} - 0) - \frac{\partial p_{\text{д}}}{\partial \varphi}(r, \varphi_{1,2} + 0) = 0. \tag{7}$$

Это обеспечивает гладкость суммарного поля $p(r, \varphi)$.

Требование непрерывности поля $p(r, \varphi)$ в замкнутой области $\bar{D}\{r \geqslant 0, -\Phi \geqslant \varphi \geqslant \Phi\}$ и его аналитической зависимости от параметра k и условие погашаемости, состоящее в равномерной ограниченности дифракционного поля $p_{\text{д}}(r, \varphi)$ при комплексных значениях k, таких что $\operatorname{Im} k > 0$, определяют единственное решение задачи (4)—(7). Это решение, эквивалентное известному решению Зоммерфельда (см. [2, 4]), выражается интегралом

$$p_{\text{д}}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{ikr\cos\alpha} s(\alpha + \varphi)\, d\alpha, \tag{8}$$

где

$$s(\alpha) = \frac{\pi}{2\Phi} \left\{ \frac{\cos\frac{\pi}{2\Phi}\varphi_1}{\sin\frac{\pi}{2\Phi}\varphi_1 - \sin\frac{\pi}{2\Phi}\alpha} + \frac{\cos\frac{\pi}{2\Phi}\varphi_2}{\sin\frac{\pi}{2\Phi}\varphi_2 - \sin\frac{\pi}{2\Phi}\alpha} \right\}. \tag{9}$$

Асимптотическое исследование выражения (8) показывает, что для дифракционного поля $p_д$ главной лучевой координатой является r. Это значит, что при $kr \to \infty$ в представлении

$$p_д(r, \varphi) = e^{ikr} \cdot U(r, \varphi) \tag{10}$$

главным осциллирующим множителем является e^{ikr}, а волновая амплитуда

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{-ikr2\sin^2\frac{\alpha}{2}} s(\alpha + \varphi)\, d\alpha \tag{11}$$

есть сравнительно медленно изменяющаяся функция в том смысле, что при $kr \to \infty$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = O(kU), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = O\left(k \frac{\partial U}{\partial r}\right). \tag{12}$$

Эти оценки вытекают из асимптотического представления

$$U(r, \varphi) = \frac{e^{i\pi/\varphi}}{\sqrt{2\pi kr}} \cdot s(\varphi) + O[(kr)^{-3/2}], \tag{13}$$

справедливого для всех значений $\varphi \neq \varphi_{1,2}$.

Соотношения (12) показывают, что для нахождения асимптотического представления точного решения задачи (11) при $kr \to \infty$ можно в уравнении

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2ik \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + ikU\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{14}$$

определяющем функцию $U(r, \varphi)$, пренебречь первыми членами в скобках и перейти к параболическому уравнению

$$2ik \frac{\partial u}{\partial r} + ik \frac{u}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{15}$$

являющемуся частным случаем уравнения поперечной диффузии в лучевых координатах (1). Малюжинцем [1] было показано, что решение уравнения (15)

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{-ikr\frac{\alpha^2}{2}} s(\alpha + \varphi)\, d\alpha, \tag{16}$$

удовлетворяющее граничным условиям и условиям скачка на границах тени, описывается той же асимптотической формулой (13), что и точное решение $U(r, \varphi)$ и, следовательно, эквивалентно ему при $kr \to \infty$.

Асимптотическое представление (13) не является равномерным по угловой переменной φ и теряет смысл при $\varphi = \varphi_{1,2}$. В работе Уфимцева [3] исследовано поведение функции $u(r, \varphi)$ вблизи границ тени $\varphi = \varphi_{1,2}$. Используя метод работы [3], можно получить равномерную по углу оценку погрешности поперечно-диффузионного приближения $|u - U|$. Оказывается, что при $kr \to \infty$ разность $u(r, \varphi) - U(r, \varphi)$ имеет асимптотическое выражение:

$$u(r, \varphi) - U(r, \varphi) \sim \sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4} \frac{\sin\frac{\pi^2}{2\Phi}}{8\Phi kr} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left|\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\right| \cdot F_1\left(\sqrt{2kr}\left|\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\right|\right)}{\cos\frac{\pi^2}{2\Phi} - \cos\frac{\pi(\varphi - \varphi_1 - \pi)}{2\Phi}} + \right.$$

$$+\frac{\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_2}{2}\right|\cdot F_1\left(\sqrt{2kr}\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_2}{2}\right|\right)}{\cos\frac{\pi^2}{2\Phi}-\cos\frac{\pi(\varphi-\varphi_2-\pi)}{2\Phi}}\Bigg\}, \tag{17}$$

где

$$F_1(\tau)=\tau^2e^{-i\tau^2}\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{ix^2}\frac{dx}{x^2}.$$

Функции $F_1\left(\sqrt{2kr}\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_{1,2}}{2}\right|\right)$ и $\dfrac{\sin\frac{\varphi-\varphi_{1,2}}{2}}{\cos\frac{\pi^2}{2\Phi}-\cos\pi\frac{(\varphi-\varphi_{1,2}-\pi)}{2\Phi}}$ допускают оценку, не зависящую от величин r и φ. Заменяя их абсолютные величины максимальными значениями, получим равномерную по φ асимптотическую оценку погрешности

$$|u(r,\varphi)-U(r,\varphi)|_{kr\to\infty}=O\left(\frac{1}{kr}\right). \tag{18}$$

Этим уточняется результат, полученный в работе [3].

Соотношения (13) и (18) описывают характер приближения поперечной диффузии на больших расстояниях от ребра клина. Для определения фактической величины погрешности при умеренных значениях kr и уточнения границы практической применимости метода параболического уравнения целесообразно провести непосредственное численное сравнение приближенного выражения волновой амплитуды $u(r,\varphi)$ с точным решением $U(r,\varphi)$. Эффективным способом вычисления функции $u(r,\varphi)$ является численное интегрирование параболического уравнения (15) методом конечных разностей.

Сформулируем краевую задачу для уравнения поперечной диффузии (15), переходя к безразмерным переменным (ρ,φ), где $\rho=kr$, и учитывая граничные условия (5) и условия сопряжения на границах тени (6), (7):

$$2i\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{u}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0,\quad \rho>0;\quad -\Phi<\varphi<\varphi_1,$$

$$\varphi_1<\varphi<\varphi_2,\quad \varphi_2<\varphi<\Phi, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}(\rho,\pm\Phi)=0, \tag{20}$$

$$u(\rho,\varphi_{1,2}-0)-u(\rho,\varphi_{1,2}+0)=1, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,\varphi_{1,2}-0)-\frac{\partial u}{\partial\varphi}(\rho,\varphi_{1,2}+0)=0. \tag{22}$$

Для обеспечения единственности решения задачи потребуем, чтобы оно было ограниченным на ребре клина:

$$u(\rho,\varphi)_{\rho\to0}=O(1) \tag{23}$$

(условие на бесконечности, вытекающее из принципа погашаемости, автоматически выполняется для решения уравнения (19) и может специально не оговариваться). Единственность следует из энергетического тождества

$$I(\rho)\equiv\rho\int\limits_{-\Phi}^{\Phi}|w(\rho,\varphi)|^2\,d\varphi=\text{const}, \tag{24}$$

справедливого для разности $w = u_1 - u_2$ двух решений уравнения (19), удовлетворяющих условиям (20)—(22). Если u_1 и u_2 ограничены, то $I(0) = 0$ и, следовательно, $I(\rho) \equiv 0$. Это значит, что $u_1(\rho, \varphi)$ и $u_2(\rho, \varphi)$ тождественно равны.

Если искать ограниченное решение уравнения (19) в виде формального степенного ряда

$$u(\rho, \varphi) \approx \sum_{s=0}^{\infty} u_s(\varphi)\rho^s, \tag{25}$$

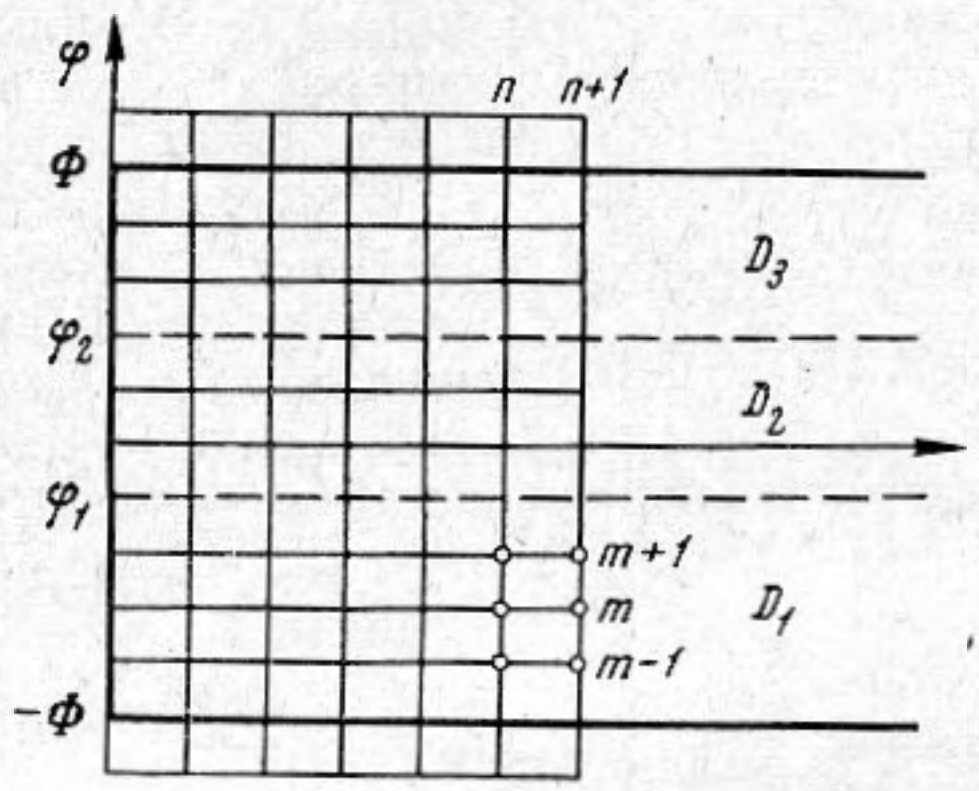
пригодного в окрестности точки $\rho = 0$, для коэффициентов $u_s(\varphi)$ будем иметь рекуррентную систему уравнений:

$$u_0''(\varphi) = 0; \quad u_s''(\varphi) = i(1-2s)u_{s-1}(\varphi), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Интегрирование уравнений (26) с учетом дополнительных условий (20)—(22) позволяет определить значение функции $u(\rho, \varphi)$ при $\rho = 0$:

$$u(0, \varphi) = u_0(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\Phi}, & -\Phi < \varphi < \varphi_1 \\ \dfrac{\pi}{\Phi} - 1, & \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \\ \dfrac{\pi}{\Phi} - 2, & \varphi_2 < \varphi < \Phi \end{cases} \tag{27}$$

и заменить условие ограниченности (23) начальным условием (27) *. Таким образом, мы приходим к обычной для параболического уравнения смешанной задаче, непосредственно пригодной для численного решения.



Фиг. 2

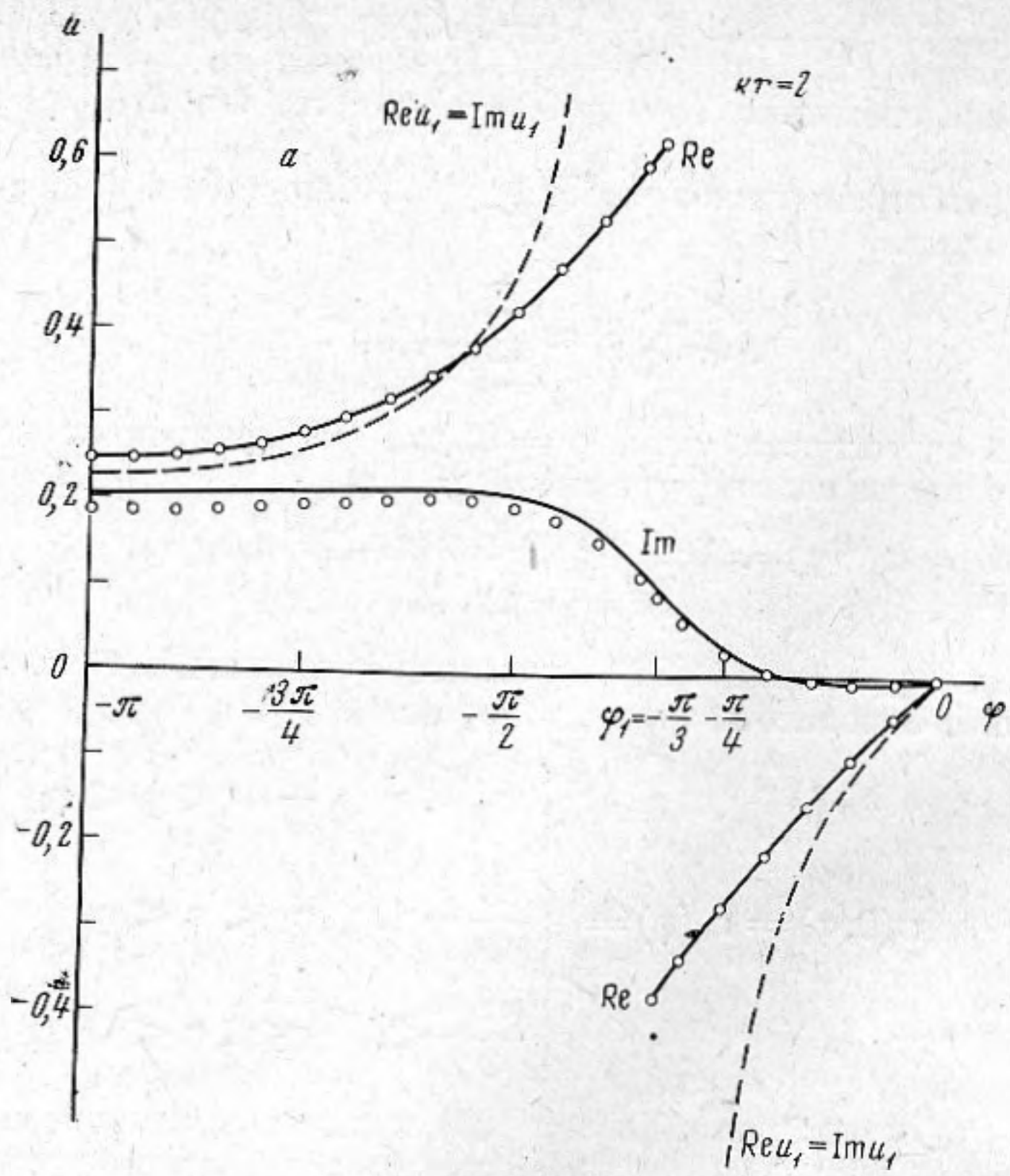
Приступая к решению задачи (19) — (22), (27) методом конечных разностей (см., например, работу [5]), в области D, изображенной на фиг. 2 в плоскости (ρ, φ), введем прямоугольную сетку $D_{\tau h}$: $\rho = h\tau$, $\varphi = mh$; n, m — целые числа (τ и h — шаги сетки в направлении осей ρ и φ). Функции $u(\rho, \varphi)$ сопоставим функцию дискретных аргументов n и m, заданную на сетке $D_{\tau h}$:

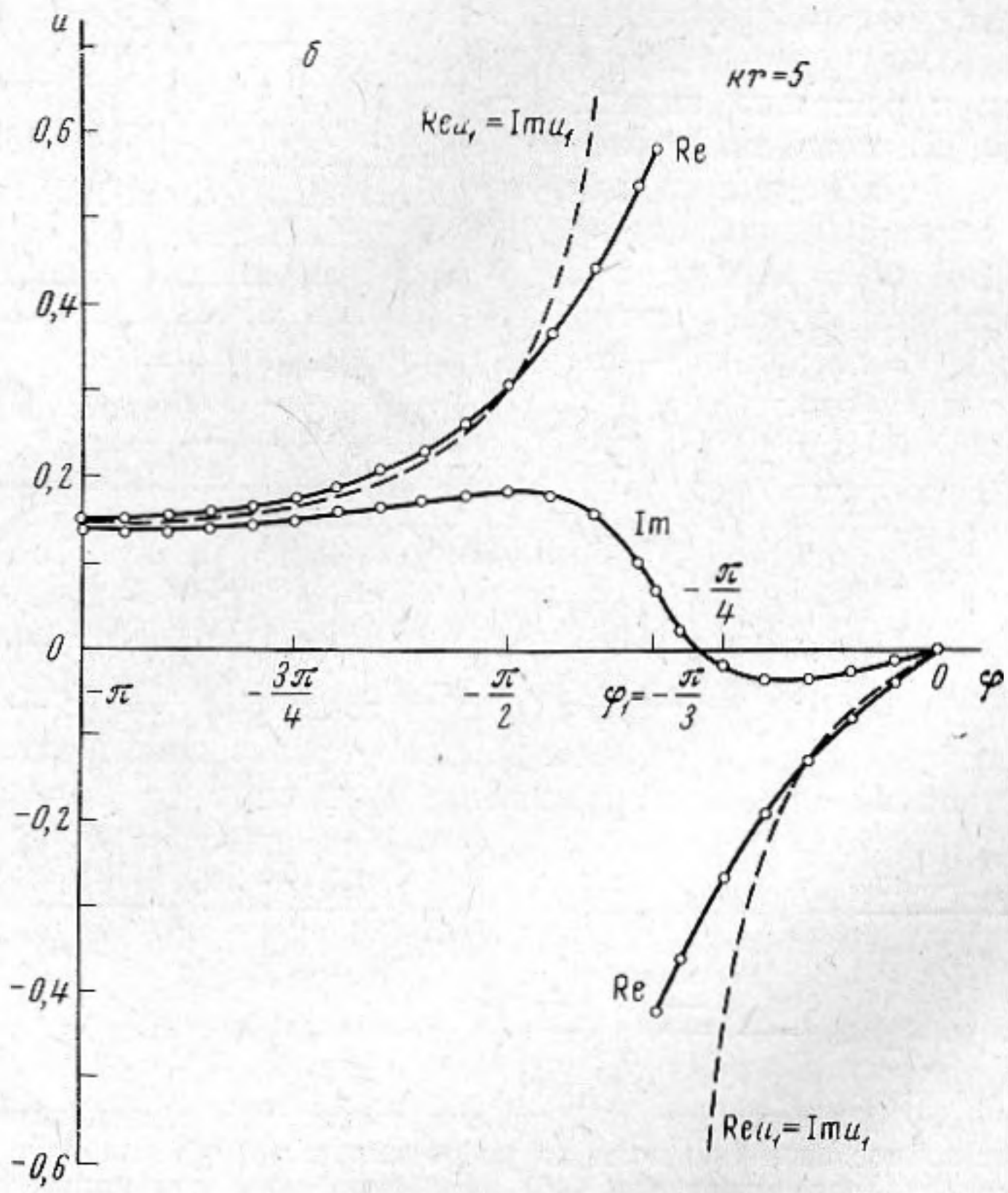
$$u(n\tau, mh) \sim u_m^n. \tag{28}$$

Заменяя в формуле (19) функцию $u(\rho, \varphi)$ в точке $\rho_{n+1/2} = (n + 1/2)\tau$, $\varphi = mh$ средним значением, а ее производные — разностными отношениями, получим шеститочечное конечноразностное уравнение

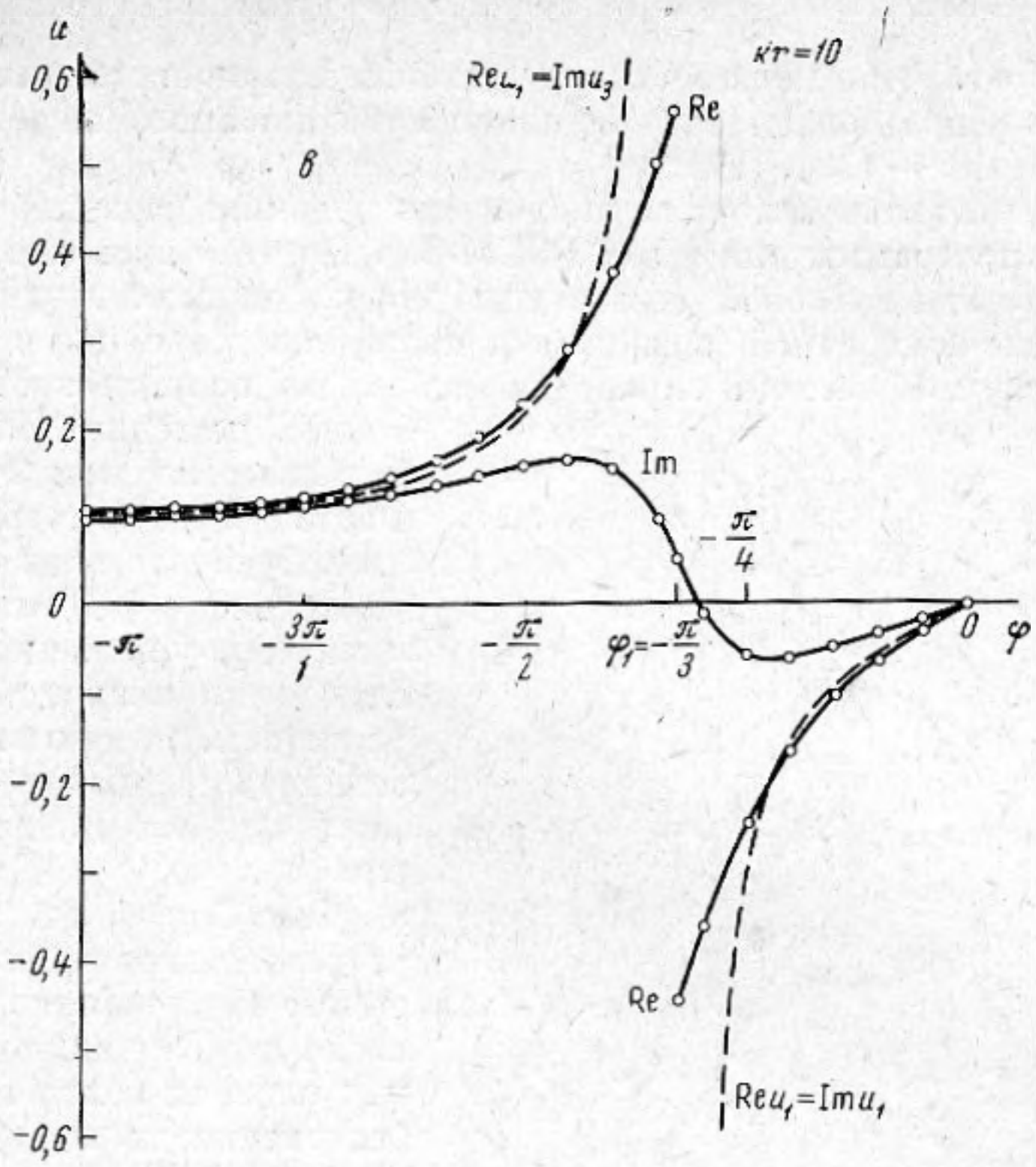
$$2i\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + i\frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2\rho_{n+1/2}} + \frac{1}{2\rho_{n+1/2}^2}\left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}\right) = 0, \tag{29}$$

* Прибавляя к (27) величину $p_\Gamma(0, \varphi)$, мы видим, что метод параболического уравнения дает точное значение поля на ребре клина $p(0, \varphi)$, равное π / Φ. Однако, поскольку замена точного уравнения (14) параболическим при малых ρ незаконна, это совпадение является в известном смысле случайным.


u
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
а
кr=2
Reu₁=Imu₁
Re
Im
-π
-3π/4
-π/2
φ₁=-π/3
-π/4
0
φ
Re
Reu₁=Imu₁


u
б
кr=5
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
Reu₁=Imu₁
Re
Im
-π/4
-π
-3π/4
-π/2
φ₁=-π/3
0
φ
Re
Reu₁=Imu₁

Фиг. 3 (*а*, *б*)



Фиг. 3 (*в*)

аппроксимирующее параболическое уравнение (19) при τ, $h \to 0$ и при фиксированных $\rho \neq 0$, φ с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$. Граничные условия (20) и условия сопряжения (21) — (22) также аппроксимируются уравнениями в конечных разностях с погрешностью $O(h^2)$, что достигается введением «фиктивных» узлов сетки, лежащих за пределами подобластей D_1, D_2, D_3, и гладким продолжением решения задачи $u(\rho, \varphi)$ через границы $\varphi = -\Phi$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $\varphi = \Phi$ (ср. [6]).

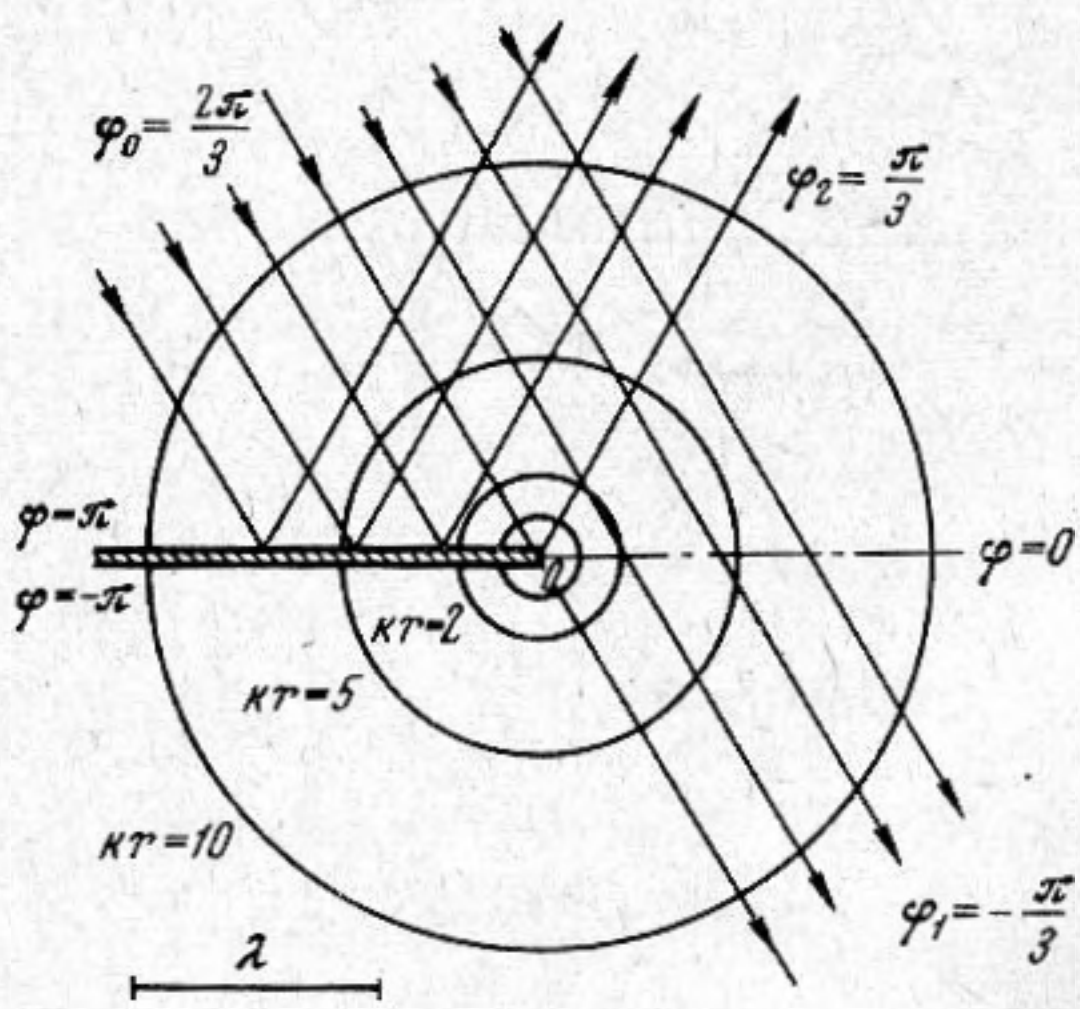
Уравнение (29), где индекс m пробегает значения $m = -M, -M + 1, \ldots, M - 1, M (M = \Phi / h)$, вместе с уравнениями, аппроксимирующими дополнительные условия (20) — (22), при фиксированном n образуют систему линейных уравнений, определяющих величины u_m^{n+1} ($m = -M - 1, -M, \ldots, M, M + 1$), если уже известны значения u_m^n (матрица этой системы является тридиагональной, поэтому для ее решения можно использовать известный метод прогонки). Отправляясь от начальной функции u_m^0, значения которой непосредственно берутся из условия (27), можно, переходя от n к $n + 1$, последовательно находить величины u_m^1, u_m^2, ... и таким образом определить функцию u_m^n на любом заданном расстоянии $\rho = n\tau$.

Как уже указывалось, конечно-разностное уравнение (29) является формальной аппроксимацией параболического уравнения (19) при любом фиксированном $\rho \neq 0$ и при τ, $h \to 0$. В силу того, что коэффициенты уравнения (19) имеют особенность при $\rho = 0$, «вблизи» этой точки (т. е. при $\rho = n\tau$, где n фиксировано) аппроксимация нарушается и погрешность не стремится к нулю при τ, $h \to 0$, оставаясь лишь ограниченной. Оказывается, что такое локальное отсутствие аппроксимации не нарушает сходимости разностной схемы. При неограниченном уменьшении шага сетки (τ, $h \to 0$, $r / n = \text{const}$) значения сеточной функции u_m^n стремятся к значениям решения уравнения (19) в соответствующих точках области *. По-

* Доказательство сходимости описанной разностной схемы со скоростью $O(\tau)$ и ее устойчивости приведено в статье [7].

этому при достаточно мелкой сетке $D_{\tau h}$ конечно-разностное уравнение (29) может быть использовано для получения приближенного численного решения задачи (19) — (22), (27).

Описанный выше алгоритм численного решения задачи был реализован в виде программы для ЦВМ БЭСМ-3М. По этой программе были выполнены расчеты волновой амплитуды дифракционного поля $p_д(r, \varphi)$ в приближении поперечной диффузии и проведено сравнение с точным решением задачи. В частном случае дифракции на полуплоскости ($\Phi = \pi$) точное решение (11), которое, как известно, при $\Phi = \pi$ выражается через интегралы Френеля, вычислялось на машине параллельно с решением параболического уравнения (19). Для случая клиновидной области с раствором, отличным от 2π, проводилось сравнение с численными результатами других авторов [8].



Фиг. 4

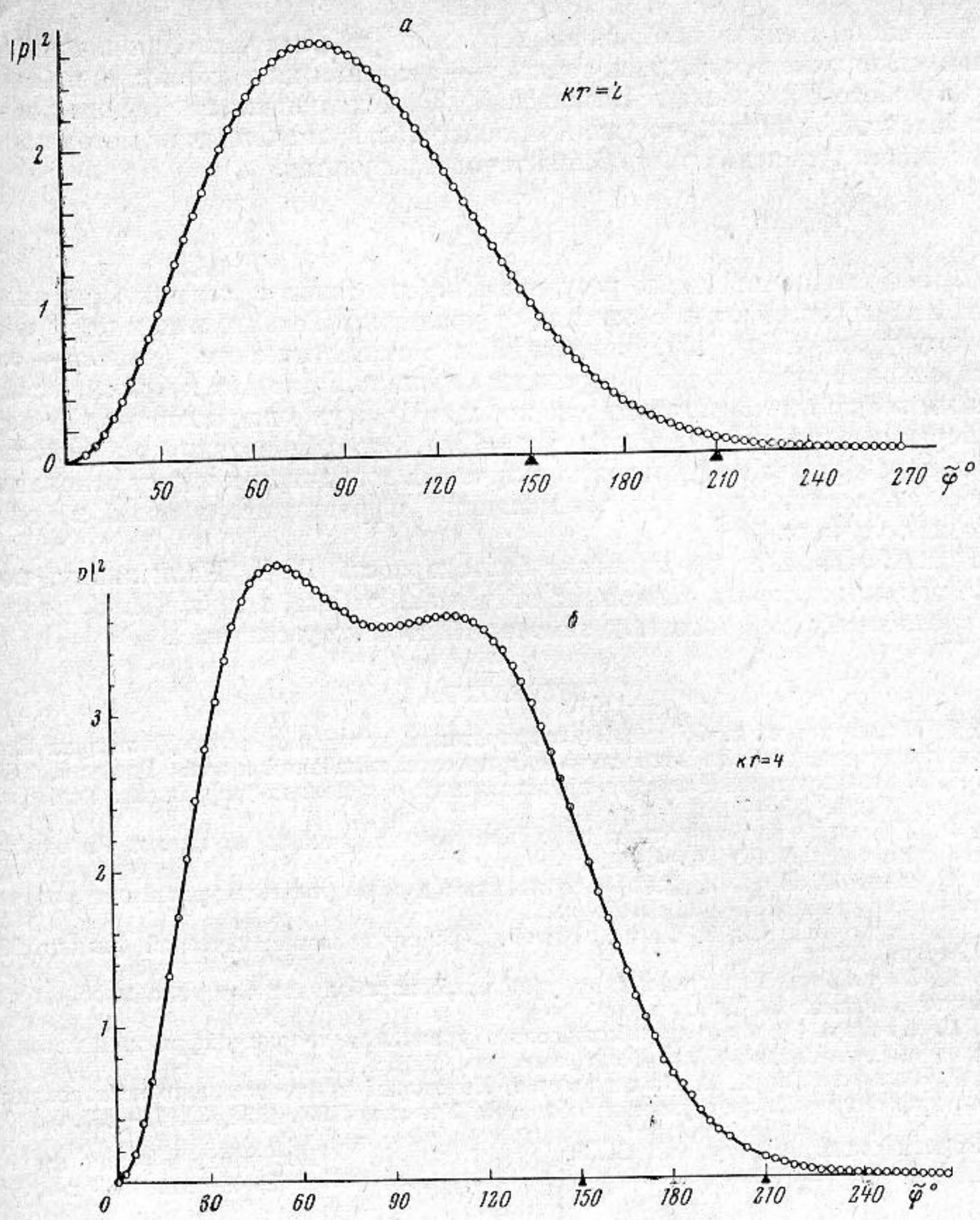
Фиг. 3, *а*, *б*, *в* иллюстрируют результаты расчета дифракционного поля жесткой полуплоскости для случая, когда первичная плоская волна приходит из бесконечности под углом $\varphi_0 = 2\pi/3$ (фиг. 4). Границами тени для падающей и отраженной волн являются лучи $\varphi_1 = -\pi/3$, $\varphi_2 = \pi/3$. На графиках изображены вещественная и мнимая части волновой амплитуды $U(r, \varphi)$ как функции угла φ на окружностях $kr = \text{const}$, для значений $kr = 2, 5, 10$ (так как при $\Phi = \pi U(r, \varphi)$ является нечетной функцией угла φ, графики начерчены лишь для интервала углов $-\pi < \varphi < 0$).

Сплошными линиями показано приближение поперечной диффузии $u(r, \varphi)$, найденное путем численного решения задачи (19) — (22), (27), а точками — точные значения волновой амплитуды $U(r, \varphi)$, определяемой выражением (11). Видно, что функции $u(r, \varphi)$ и $U(r, \varphi)$ довольно близки уже для $kr = 2$ (фиг. 3, *а*), а при $kr = 5$ и, тем более, при $kr = 10$ (фиг. 3, *б*, *в*) их можно считать практически совпадающими. При дальнейшем увеличении kr происходит монотонное уменьшение погрешности в соответствии с оценкой (18).

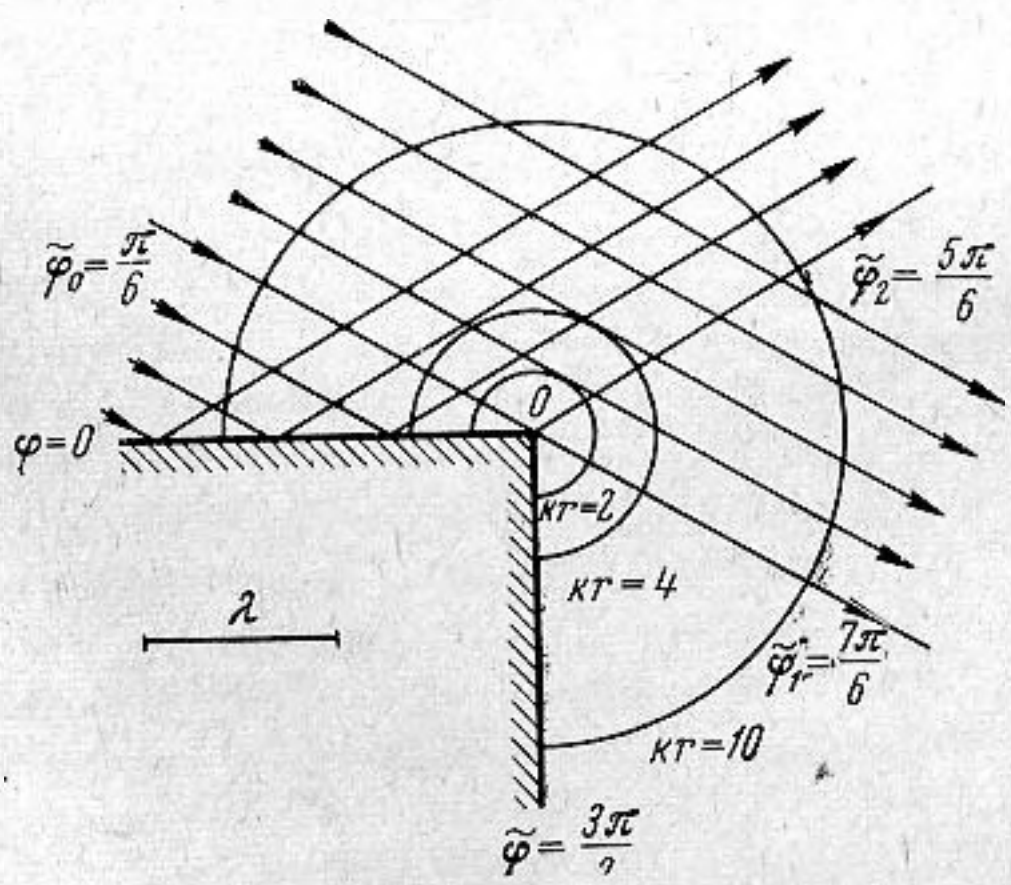
Штриховой линией на фиг. 3 показано приближенное значение волновой амплитуды (обозначенное здесь как $u_1(r, \varphi)$), определяемое асимптотической формулой (13). При $\varphi = \varphi_1$ представление (13) теряет смысл, так как $u_1(r, \varphi)$ обращается в бесконечность. Мы видим также, что и вдали от границы тени $u_1(r, \varphi)$ является более грубым приближением к точному решению, чем приближение поперечной диффузии $u(r, \varphi)$.

Для нахождения полного звукового поля $p(r, \varphi)$ следует, в соответствии с формулами (10) и (3), умножить величину $U(r, \varphi)$ на фазовый множитель e^{ikr} и сложить с полем геометрической акустики (2). Пример приближенного расчета суммарного поля $p(r, \varphi)$ дают фиг. 5, *а*, *б*, где показано распределение интенсивности $|p|^2$ звукового поля, возникающего при дифракции плоской волны на идеально мягком клине. Соответствующая геометрическая картина показана на фиг. 6. Интенсивность $|\Phi(r, \tilde{\varphi})|^2$ представлена как функция угла $\tilde{\varphi}$* на окружностях $kr = 2$, $kr = 4$.

* Здесь принято иное, чем в предыдущем примере, обозначение условных переменных, ясное из фиг. 6.


а
$|p|^2$
$kr=2$
0
1
2
50
60
90
120
150
180
210
240
270
$\tilde{\varphi}°$
б
$|p|^2$
$kr=4$
0
1
2
3
0
30
60
90
120
150
180
210
240
$\tilde{\varphi}°$

Фиг. 5


$\tilde{\varphi}_0=\frac{\pi}{6}$
$\tilde{\varphi}_2=\frac{5\pi}{6}$
$\varphi=0$
0
$kr=2$
$kr=4$
λ
$\tilde{\varphi}_1=\frac{7\pi}{6}$
$kr=10$
$\tilde{\varphi}=\frac{3\pi}{2}$

Фиг. 6

Сплошной линией изображена величина $|p|^2$, вычисленная в приближении поперечной диффузии, точками — значения интенсивности, найденные в работе Николаева и Васильевой [8], исходивших из точного решения задачи. Мы видим, что уже при таких малых значениях kr метод параболического уравнения дает весьма точный результат.

Выводы

Приведенные численные результаты в сочетании с асимптотическими оценками показывают, что переход от уравнения Гельмгольца к параболическому уравнению (15), являющийся асимптотическим (для $kr \to \infty$) методом решения задачи о дифракции на клине, приводит к практическим точным результатам (погрешность порядка 1%) уже на расстоянии от ребра порядка одной длины волны ($kr = 2\pi$). Это демонстрирует эффективность параболического уравнения в лучевых координатах и дает основание для использования его при вычислении дифракционных полей в более сложных случаях.

В заключение автор приносит благодарность Г. Д. Малюжинцу, под руководством которого выполнена настоящая работа, а также И. Б. Егорову, сделавшему ряд полезных замечаний по тексту статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец. Об одной интерпретации поведения волн. Доклад на Всесоюзном совещании по вопросам электрических колебаний и волн, Горький, 1946.
2. Г. Д. Малюжинец. Развитие представлений о явлениях дифракции. Усп. физ. наук, 1959, 69, 321—334.
3. П. Я. Уфимцев. Поперечная диффузия при дифракции на клине. Радиотехн. и электрон., 1965, 10, 1013—1022.
4. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.— Л., ОНТИ, 1936.
5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966.
6. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
7. А. В. Попов. Решение параболического уравнения теории дифракции методом конечных разностей. Ж. выч. мат., мат. физ., 1968, 8, 1140—1144.
8. Б. Г. Николаев, М. В. Васильева. Некоторые количественные исследования по дифракции волн от угловых областей. Уч. зап. ЛГУ, 1958, 32, 71—165.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
29 апреля 1968 г.