АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 3

УДК 534.23

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ГАРМОНИЧЕСКИМ МОНОПОЛЕМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ

В. П. Докучаев

Рассмотрено излучение звука элементарным гармоническим монополем, движущимся по окружности. Получены выражения для возмущений потенциала в волновой зоне излучателя. Показано, что в излучении содержится спектр комбинационных частот, состоящий из собственной частоты монополя и гармоник «звука вращения». Определена диаграмма направленности излучения, распределение интенсивности звука по спектру излучаемых частот, а также полная интенсивность излучения. Показано, что при больших дозвуковых скоростях движения источников по окружности излучение «звука вращения» особенно велико и все его характеристики сильно отличаются от случая малых скоростей движения.

Теоретический анализ «звука вращения», излучаемого твердыми телами, движущимися по окружности и винтовой линии, а также родственные задачи о «звуке вращения» гребных и воздушных винтов, приводится в ряде работ [1—4]. Этот класс задач можно назвать задачами об излучении «звука вращения» источниками постоянной производительности. Более сложным является класс задач об излучении «звука вращения» пульсирующими или осциллирующими излучателями, движущимися по окружности *. Здесь будет рассмотрено излучение звука движущимся по окружности элементарным гармоническим монополем.

Эта задача представляет некоторый интерес для аэро- и гидроакустики. Так, в линейной газодинамике и родственной ей аэроакустике при анализе обтекания вибрирующих тонких тел и быстро вращающихся воздушных винтов большое внимание уделяется исследованию возмущений, создаваемых элементарными источниками массы — быстро движущимися монополями и диполями с постоянной или переменной производительностью. В гидроакустике низкочастотный кавитационный шум, возникающий при обтекании тел жидкостью в кавитационных трубах, обычно имеет некоторую характерную частоту [6]. На основании этого в работе [7] был предложен упрощенный механизм излучения «звука вращения» гребными винтами, работающими в режиме с кавитацией. В основе механизма лежит представление о том, что по винтовой линии движется монополь с некоторой характерной частотой и производительностью, которые определяются условиями кавитационного режима обтекания. Этот механизм позволяет качественно объяснить ряд данных, полученных в работе [8].

Как будет показано ниже, источник (или сток) постоянной производительности — статический монополь, движущийся по окружности, излучает звуковые волны как некоторый эффективный силовой источник [3]. Это позволяет с единой точки зрения исследовать вопрос об излучении «звука вращения» как монополем, так и силовым источником при больших дозву-

---

* Одна из задач, весьма близких к этим, рассмотрена в работе [5], где изучалось излучение зука диполями, вращающимися вокруг оси, проходящей под углом к дипольному моменту.

ковых скоростях движения. В работах [1—4] этот вопрос не выяснялся, хотя для аэроакустики он безусловно представляет интерес. Интенсивное излучение звуковых волн, имеющее место в этом случае, аналогично мощному синхротронному излучению электромагнитных волн электрическими зарядами, движущимися по окружности [9].

Рассмотрим излучение звуковых волн элементарным гармоническим монополем интенсивности $Q(t) = Q_0 \exp(i\omega_1 t)$, движущимся по окружности радиуса a с угловой скоростью ω_0, направленной по оси z цилиндрической системы координат (r, z, φ). Уравнение для возмущений потенциала скорости Φ имеет вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{Q_0 e^{i\omega_1 t}}{\rho_0 r}\delta(z)\delta(r-a)\delta(\varphi-\omega_0 t), \qquad (1)$$

где c — скорость звука в среде. Решение уравнения (1) проведено методом преобразований Фурье — Ханкеля аналогично тому, как это сделано в работах [3, 4]. В волновой зоне от излучателя, используя сферические координаты $z = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$, φ, после простых вычислений, получаем

$$\Phi(R,\theta,\varphi) = \frac{Q_0}{4\pi R}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left[\frac{n\omega_0-\omega_1}{c}a\sin\theta\right]\exp(i\gamma_n),$$
$$\gamma_n = (n\omega_0-\omega_1)\left(t-\frac{R}{c}\right) - in\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

где J_n — функция Бесселя порядка n. Как следует из этого выражения, излучение состоит из спектра комбинационных частот

$$\omega_n = \omega_1 \pm n\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (3)$$

Отметим, что источник (или сток) массы постоянной интенсивности $Q(t) = Q_0(\omega_1 = 0)$ при движении по окружности генерирует обычный «звук вращения» со спектром $n\omega_0$.

Интенсивность излучения звука в телесный угол $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ выражается через поток излучения $N_R = c^2\rho v_R$ следующим образом [1]:

$$dI = c^2\rho_0 R^2 \frac{\partial\Phi}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)^* d\Omega, \qquad (4)$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину. Подставляя в формулу (4) выражение (2) для Φ и усредняя по периоду вращения монополя $T = 2\pi/\omega_0$, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q_0^2}{16\pi^2\rho_0 c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n\omega_0-\omega_1)^2 J_n^2\left[\frac{n\omega_0-\omega_1}{c}a\sin\theta\right]. \qquad (5)$$

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. При $\omega_1 = 0$ выражение (5) дает излучение звука источником массы постоянной интенсивности и переходит в выражение (28) работы [3] с заменой Q_0 на эквивалентный силовой источник $F_e = a\omega_0 Q_0 = V_0 Q_0$. Таким образом, в смысле излучения звуковых волн источник массы постоянной интенсивности Q_0, движущийся по окружности, вполне эквивалентен силовому источнику указанной выше интенсивности, также движущемуся по окружности *.

* В работе [10] подробно обсуждается роль силовых источников, источников и стоков массы для плоских задач газодинамики. Укажем только, что силовые источники, в отличие от источников массы, создают вихревые следы за телами. В линейном приближении эти следы являются ламинарными.

Для определения диаграммы направленности излучения в формуле (5) необходимо провести суммирование по n. Способ суммирования ряда дан в Приложении. Воспользовавшись значением суммы (п. 9), получим

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{Q_0^2}{16\pi^2\rho_0 c}\left[\omega_0^2\frac{M^2\sin^2\theta\,(4+M^2\sin^2\theta)}{8(1-M^2\sin^2\theta)^{7/2}}+\omega_1^2\frac{2+M^2\sin^2\theta}{2(1-M^2\sin^2\theta)^{5/2}}\right], \tag{6}$$

где введено число Маха $M=a\omega_0/c$. Первое слагаемое в формуле (6) полностью обусловлено вращательным движением монополя и, по сути дела, дает «звук вращения» источника массы при $\omega_1=0$. Второе слагаемое отражает влияние движения на излучение монополя с собственной частотой ω_1. Первый член при $M\ll 1$ дает дипольную часть излучения, пропорциональную $\sin^2\theta$, а второй член — изотропную, монопольную, часть диаграммы направленности. Отношение интенсивностей излучения под углами $\theta=0$ и $\pi/2$ имеет вид

$$\left[\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{\theta=\pi/2}\Big/\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{\theta=0}\right]=\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\,\frac{M^2(4+M^2)}{8(1-M^2)^{7/2}}+\frac{2+M^2}{2(1-M^2)^{5/2}} \tag{7}$$

Отсюда видно, что при M близких к единице диаграмма сильно прижата к плоскости движения. Угловое распределение (6) может быть измерено с помощью достаточно широкополосного приемного устройства, в идеальном случае принимающего без искажений весь спектр излучаемых частот ω_n (3). Однако, как будет показано ниже, при $M\ll 1$ основная часть излучения приходится на частоту ω_1 и близлежащие комбинационные частоты $\omega_1\pm\omega_0$. При M близких к единице и $\omega_1<\omega_0$ основное излучение приходится на частоту $\omega\sim\omega_0(1-M^2)^{-3/2}$.

Полная интенсивность излучения получается из формулы (6) путем интегрирования по телесному углу $d\Omega$:

$$I=\frac{Q_0^2}{4\pi\rho_0 c}\left[\frac{\omega_0^2M^2}{3(1-M^2)^3}+\frac{\omega_1^2}{(1-M^2)^2}\right]. \tag{8}$$

Как предельные случаи из формулы (8), получаются результаты работ [3, 11]. Действительно, при $\omega_1=0$, используя указанную выше замену $Q_0=F/a\omega_0$, мы получаем формулу (31) работы [3]. Более интересен другой предельный случай. Устремим ω_0 к нулю, а радиус окружности a к бесконечности, но так, что $a\omega_0=V_0$, где V_0 — постоянная величина. Тогда из формулы (8) получим формулу для интенсивности излучения монополя частоты ω_1, прямолинейно движущегося с постоянной скоростью V_0, а именно $I=\omega_1^2Q_0^2/4\pi\rho_0 c(1-M^2)^2$ [11].

Перейдем к вопросу о распределении интенсивности излучения по спектру излучаемых частот ω_n (3). Для этого в формуле (5) необходимо выполнить интегрирование по телесному углу $d\Omega$ для каждой гармоники номера n

$$I_n(\omega_n)=\frac{\omega_n^2Q_0^2}{8\pi\rho_0 c}\int\limits_0^\pi \sin\theta\, J_n^2\left(\frac{a\omega_n}{c}\sin\theta\right)d\theta. \tag{9}$$

Воспользуемся известным преобразованием интеграла в формуле (9) [9]:

$$\int\limits_0^\pi \sin\theta J_n^2\left[\frac{a\omega_n}{c}\sin\theta\right]d\theta=\frac{2c}{a\omega_n}\int\limits_0^{(a\omega_n/c)} J_{2n}(2x)\,dx.$$

Тогда мы получим

$$I_n(\omega_n)=\frac{\omega_n Q_0^2}{4\pi\rho_0 a}\int\limits_0^{a\omega_n/c} J_{2n}(2x)\,dx. \tag{10}$$

При условии малых скоростей $a\omega_0 \ll c$ и $a\omega_1 \ll c$ воспользуемся асимптотикой бесселевых функций

$$J_{2n}(2x) \simeq \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \int\limits_0^{a\omega_n/c} J_{2n}(2x)\,dx = \left(\frac{a\omega_n}{c}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)}. \tag{11}$$

С помощью соотношений (11) из выражения (10) мы получим

$$I_n(\omega_n) \simeq \frac{cQ_0^2}{4\pi\rho_0 a^2 (2n+1)!} \left(\frac{n\omega_0 \pm \omega_1}{c} a\right)^{2(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Для комбинационных частот вблизи собственной частоты монополя ω_1 получаются выражения:

$$I_0(\omega_1) = \frac{\omega_1^2 Q_0^2}{4\pi\rho_0 c}; \quad I_1(\omega_0 \pm \omega_1) = \frac{1}{6} I_0(\omega_1) \left(1 \pm \frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^4 \left(\frac{a\omega_1}{c}\right)^2. \tag{13}$$

Таким образом, при малых скоростях вращения $M \ll 1$ и малом параметре $(a\omega_1 / c)$ максимум излучения приходится на частоту ω_1 и близлежащий дублет $\omega_1 \pm \omega_0$.

Для аэроакустики представляет интерес случай больших дозвуковых скоростей движения источника звука, когда число $M \lessapprox 1$. Выделяя нулевую гармонику $n = 0$, перепишем соотношение (10) в виде

$$I_0 = \frac{\omega_1 Q_0}{4\pi\rho_0 a} \int\limits_0^{a\omega_1/c} J_0(x)\,dx, \quad I_n = \frac{\omega_0^2 Q_0^2}{4\pi\rho_0 c} \frac{n}{M} \int\limits_0^{nM} J_{2n}(2x)\,dx. \tag{14}$$

Так как по условию $\omega_1 < \omega_0$ и $M \leqslant 1$, то первый интеграл дает $I_0(\omega_1)$ (13), а второй удобно преобразовать к виду

$$I_n = \frac{\omega_0^2 Q_0^2}{4\pi\rho_0 c} \frac{n^2}{M} \int\limits_0^M J_{2n}(2n\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Этот интеграл подробно исследован в теории синхротронного излучения релятивистских электронов и при $M \lessapprox 1$ преобразуется следующим образом [12]. Асимптотика бесселевой функции дает

$$J_{2n}(2n\tau) \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{3}} (1-\tau^2)^{1/2} K_{1/3}\left[\frac{2n}{3}(1-\tau^2)^{3/2}\right], \tag{16}$$

где $K_{1/3}$ — функция Макдональда, связанная с более известной функцией Эйри $\mathscr{E}_i$ [9, 13]:

$$\mathscr{E}_i(x) = \int\limits_0^\pi \cos(t^3 + xt)\,dt = \frac{\sqrt{x}}{3} K_{1/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3^{3/2}}\right). \tag{17}$$

Пользуясь представлением (16), перепишем выражение (15):

$$I_n \simeq \frac{\omega_0^2 Q_0^2}{8\pi^2 \sqrt{3}\rho_0 c M} n \int\limits_{\frac{2}{3} n (1-M^2)^{3/2}}^{2n/3} \frac{K_{1/3}(\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-(3\xi/2n)^{2/3}}}. \tag{18}$$

Интеграл в этой формуле сходится и упрощается предельным переходом $n \to \infty$ под радикалом и у верхнего предела [9, 12]:

$$I_n \simeq \frac{\omega_0^2 Q_0^2}{8\sqrt{3}\pi^2\rho_0 c M} n \int\limits_{\frac{2n}{3}(1-M^2)^{3/2}}^{\infty} K_{1/3}(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Покажем, что I_n как функция от номера гармоники n имеет максимум при

$$n_{\text{кр}} = \frac{3}{2(1-M^2)^{3/2}}. \tag{20}$$

С этой целью получим два предельных выражения для I_n. При $n \gg 1$ и $[2n(1-M^2)^{3/2}] \ll 3$, нижний предел в формуле (19) заменяем нулем. Интеграл легко вычисляется:

$$\int\limits_0^\infty K_{1/3}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \pi/\sqrt{3}.$$

В результате из формулы (19) получаем

$$I_n \simeq \frac{\omega_0{}^2 Q_0{}^2}{24\pi\rho_0 cM}\,n, \quad 1 \ll n \ll n_{\text{кр}}. \tag{21}$$

С другой стороны, при $n \gg n_{\text{кр}}$ нижний предел в формуле (18) больше единицы и, пользуясь асимптотикой $K_{1/3}(x) \simeq (\pi/2x)^{1/2}\exp(-x)$, из формулы (18) имеем

$$I_n \simeq \frac{\omega_0{}^2 Q_0{}^2}{16\pi^{3/2}\rho_0 cM}\,\frac{n^{1/2}}{(1-M^2)^{3/4}}\,e^{-\frac{2n(1-M^2)^{3/2}}{3}}, \quad n \gg n_{\text{кр}}. \tag{22}$$

Таким образом, из формул (21) и (22) следует, что при $M \lesssim 1$ и $n \gg 1$ имеет место вначале линейный рост I_n с ростом n до $n \sim n_{\text{кр}}$, а при дальнейшем увеличении $n (n > n_{\text{кр}})$ экспоненциальное уменьшение интенсивности I_n. Следовательно, при $n \sim n_{\text{кр}}$ расположен максимум интенсивности излучения. Критическая частота, соответствующая $n_{\text{кр}}$,

$$\omega_{\text{кр}} = n_{\text{кр}}\omega_0 = \frac{2}{3}\,\frac{\omega_0}{(1-M^2)^{3/2}}, \tag{23}$$

значительно превосходит расстояние между соседними гармониками $\Delta\omega = \omega_0 \ll \omega_{\text{кр}}$, и, следовательно, спектр можно считать квазинепрерывным. Вводя безразмерную частоту

$$\zeta = \frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{n}{n_{\text{кр}}}, \quad d\zeta = \frac{dn}{n_{\text{кр}}}, \tag{24}$$

перепишем выражение (19) в виде

$$\frac{dI}{d\zeta} = \frac{\omega_0{}^2 Q_0{}^2 n_{\text{кр}}{}^2}{8\pi^2\sqrt{3}\,\rho_0 cM}\,\zeta \int\limits_\zeta^\infty K_{1/3}(\xi)\,d\xi. \tag{25}$$

Выполним интегрирование по ζ в формуле (25):

$$\int\limits_0^{+\infty} \zeta \int\limits_\zeta^\infty K_{1/3}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^2 K_{1/3}(x)\,dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Получим окончательно следующую формулу для полной интенсивности излучения:

$$I = \frac{\omega_0{}^2 Q_0{}^2}{12\pi\rho_0 c(1-M^2)^3}, \quad M \lesssim 1. \tag{26}$$

Это выражение совпадает с первым слагаемым формулы (8) при $M \sim 1$, что является дополнительным подтверждением корректности целого ряда асимптотических приближений, использованных при анализе выражения (10). Результаты исследования выражения (10) при $M \sim 1$ переносятся также на «звук вращения», генерируемый силовым источником с заменой $Q_0 = F / a\omega_0$ в формулах (21) — (26).

Таким образом, источники «звука вращения» при больших дозвуковых скоростях движения особенно интенсивно излучают звуковые волны на частотах, близких к $\omega_{кр}$ (23) и излучение сконцентрировано вблизи орбитальной плоскости движения этих источников (6). Следует лишний раз подчеркнуть глубокую аналогию между «звуком вращения» и синхротронным излучением электрических зарядов, движущихся по круговым орбитам в магнитном поле [9, 12].

В связи с формулами (8), (20) и (26) сделаем ряд замечаний о границах их применимости при $M \sim 1$. В теории излучения быстро движущихся источников звука интенсивность звука обычно пропорциональна фактору $(1 - M^2)^{-n}$, где $M = V_0 / c$, n — некоторое положительное целое число [3, 11—15]. Возникает вопрос о корректности таких соотношений. Действительно, при $M \to 1$, интенсивность растет до бесконечности, возмущения в среде становятся большими и линейные уравнения акустики перестают быть справедливыми. Вопрос о границах применимости линейного приближения при $M \sim 1$ можно достаточно строго решить только для протяженных источников, например, как это делается в линейной газодинамике [16]. Для элементарных источников возмущений в среде, которые вводятся в уравнения в виде δ-функций Дирака, на этот вопрос можно ответить только приближенно. Будем исходить из условия, что возмущения давления $p \ll p_0 \sim c^2\rho_0$. Заметим, что «давление излучения», или волновое давление, просто связано с интенсивностью I: $\overline{pp^*} \sim \rho_0 cI / R^2$, где I дается соотношением (8). Если средний характерный размер монополя — l (радиус пульсирующей сферы), то условие $p \ll p_0$ вблизи излучателя принимает вид

$$(\rho_0 cI)^{1/2} \ll l\rho_0 c^2. \tag{27}$$

Пусть монополь движется равномерно и прямолинейно со скоростью V_0, когда $I = \omega_1^2 Q_0^2 / 4\pi\rho_0 c(1 - M^2)^2$. Замечая, что $Q_0 \sim \omega_1 \rho_0 l^3$, из формулы (27) получим

$$\frac{\omega_1^2 l^2}{c^2(1 - M^2)} \ll 1. \tag{28}$$

В другом предельном случае формулы (8), когда $\omega_1 = 0$ и $Q = dm / dt \sim \sim \rho_0 l^3 T^{-1}$, где T — характерное время изменения массы источника, условие (27) дает

$$\frac{\omega_0 l^2 M}{c^2 T(1 - M^2)^{3/2}} \ll 1. \tag{29}$$

Таким образом, линейное рассмотрение справедливо и при $M \sim 1$, если характерный размер источников звука l достаточно мал *, а характерные времена T и $T_1 = 2\pi / \omega_1$ — велики.

Последнее замечание касается условий применимости понятия элементарности излучателя звука в рассмотренной задаче. Как известно, источники звука можно считать элементарными и вводить их в уравнения акустики в виде δ-функций, если их размеры много меньше длины излучаемой волны. При малых скоростях движения монополя по окружности основная часть излучаемой энергии приходится на частоту ω_1 и $\omega_1 \pm \omega_0$ (12)—(13). Следовательно, излучатель можно считать элементарным при условии, что его средний размер $l \ll c / (\omega_1 + \omega_0)$. Если $M = (a\omega_0 / c) \sim 1$, то основное излучение приходится на частоты около $\omega_{кр}$ (23). При этом условие элементарности излучателя принимает вид

$$l \ll \frac{c(1 - M^2)^{3/2}}{\omega_0} \sim a(1 - M^2)^{3/2}, \quad M \lessapprox 1, \tag{30}$$

где a — радиус окружности.

* В линейной газодинамике уточняется, что источники возмущений, в частности, движущиеся тела, должны иметь малую удельную толщину $(l_\perp / l_\parallel) \ll 1$, где $l_\perp$ — размер миделева сечения, $l_\parallel$ — длина тела вдоль по потоку.

Результаты этой работы просто обобщаются на случай движения монополя по винтовой линии, как это сделано для силовых источников «звука вращения» в работе [4].

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. М. Бреховских, М. А. Исаковичу и И. А. Урусовскому за полезное обсуждение ряда вопросов, связанных с этой работой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Требуется просуммировать ряд

$$S=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+\alpha)^2 J_n{}^2[(n+\alpha)x], \tag{П.1}$$

который при $\alpha=0$ переходит в известный ряд Шотта [12, 13]. Заметим, что доказательство сходимости и суммируемости рядов этого вида основано на сложных тауберовых теоремах и здесь не рассматривается. Наиболее простой способ суммирования вытекает из теории обобщенных функций [17, 18]. Пользуясь известным интегральным выражением для $J_n{}^2$ [13], перепишем выражение (П.1) в виде

$$S=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+\alpha)^2 J_{2n}[2(n+\alpha)x\cos\varphi]\right\}d\varphi. \tag{П.2}$$

Просуммируем вспомогательный подынтегральный ряд, относящийся к типу рядов Каптейна:

$$S_1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+\alpha)^2 J_{2n}[2(n+\alpha)\varepsilon],\qquad \varepsilon=x\cos\varphi. \tag{П.3}$$

Для функции J_{2n} вновь воспользуемся известным интегральным представлением:

$$S_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{2i\alpha\varepsilon\sin\theta}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+\alpha)^2 e^{-2in(\theta-\varepsilon\sin\theta)}\right]d\theta. \tag{П.4}$$

Выражение (П.4) перепишем следующим образом:

$$S_1=-\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{2i\alpha\theta}\,d\theta}{1-\varepsilon\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{1-\varepsilon\cos\theta}\frac{d}{d\theta}e^{-2i\alpha\theta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2in(\theta-\varepsilon\sin\theta)}. \tag{П.5}$$

Ряд в (П.5) сходится в обобщенном смысле к периодической обобщенной функции

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2in(\theta-\varepsilon\sin\theta)}=\delta[2(\theta-\varepsilon\sin\theta)]. \tag{П.6}$$

Используем свойство обобщенной δ-функции Дирака [17]:

$$\delta[2(\theta-\varepsilon\sin\theta)]=\sum_{s=1}^{N}\frac{\delta(\theta-\theta_s)}{2(1-\varepsilon\cos\theta_s)},\qquad \theta_s-\varepsilon\sin\theta_s=0. \tag{П.7}$$

С учетом выражений (П.6) — (П.7) и при условии $\varepsilon<1$, интеграл в формуле (П.5) легко вычисляется:

$$S_1=\frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^4}+\frac{\alpha^2(1+3\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3}. \tag{П.8}$$

Подставляя выражение (П.8) в формулу (П.2) и выполняя интегрирование по φ, получаем окончательный результат:

$$S = \frac{x^2(4+x^2)}{8(1-x^2)^{7/2}} + \frac{\alpha^2(2+x^2)}{2(1-x^2)^{5/2}}. \tag{П.9}$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ суммы S_1 и S переходят в известные [12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Блохинцев. Акустика неоднородных движущихся сред. М.— Л., ГТТИ, 1946.
2. Л. Я. Гутин. О «звуке вращения» воздушного винта. Ж. техн. физ., 1942, **12**, 76—85.
3. В. П. Докучаев. Излучение звуковых волн телом, движущимся по окружности. Акуст. ж., 1965, **11**, 3, 324—333.
4. В. П. Докучаев. Излучение звуковых волн телами, движущимися по винтовым линиям. Акуст. ж., 1967, **13**, 2, 192—198.
5. Л. Н. Сретенский. Излучение звука вращающимся диполем. Акуст. ж., 1956, **2**, 1, 93—98.
6. А. Д. Перник. Проблемы кавитации. Л., Судпромгиз, 1963.
7. В. П. Докучаев. К теории «звука вращения» гребных винтов при наличии кавитации. Доклад на VI Всесоюзной акустической конференции. М., 1968.
8. И. А. Александров. О физической природе «звука вращения» гребного винта в режиме кавитации. Акуст. ж., 1962, **8**, 1, 34—41.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
10. В. П. Докучаев. К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах. Ж. эксп. и теор. физ., 1962, **43**, 8, 595—605.
11. В. П. Докучаев. Энергия и сопротивление излучения движущегося акустического монополя. Акуст. ж., 1966, **12**, 1, 112—114.
12. Синхротронное излучение. Сб. под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.
13. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, т. I. М., ИЛ, 1949.
14. Л. А. Чернов. Поток и плотность акустической энергии в движущейся среде. Ж. техн. физ., 1946, **16**, 733—736.
15. M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc., 1952, **A211**, 564—587.
16. В. П. Докучаев. К линейной теории обтекания тел. Метод силовых источников. Прикл. матем. и мех., 1966, **30**, 6, 1006—1014.
17. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, вып. I. М., Физматгиз, 1958.
18. Л. Шварц. Математические методы для физических наук. М., «Мир», 1965.

Н.-и. радиофизический институт
при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию
7 октября 1968 г.