АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 3

УДК 534.26

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ОБОЛОЧЕК

Л. Н. Комарова

Исследованы особенности излучения звука искривленными вибрирующими оболочками. Показано, что в излучении тонких оболочек, в отличие от излучения плоских пластин, преимущественную роль могут играть волны продольного типа в оболочке. Поэтому обычно применяемые меры для демпфирования изгибных колебаний в оболочке могут не приводить к ожидаемому снижению излучения, поскольку по отношению к волнам продольного типа оболочка обладает значительно большей жесткостью, чем по отношению к волнам изгибного типа.

Для борьбы с шумом, излучаемым колеблющимися пластинами и оболочками, применяют, помимо звукоизоляции, демпфирование колебаний при помощи вибропоглощающих слоев. Такие слои рассчитаны на поглощение энергии изгибных волн и достаточно эффективны для этой цели. Для плоских пластин они решают и задачу о подавлении излучения в окружающую среду. В оболочках, в отличие от плоских пластин, нормальные смещения средней линии создаются не только изгибными, но и продольными и сдвиговыми волнами, которые поэтому вносят свой вклад в излучение звука оболочкой *. Особенно велика относительная роль этого излучения, не связанного с изгибными волнами, для тонких оболочек (соответственно — для низких частот), для которых скорость изгибных волн меньше скорости звука в окружающей среде. Как известно, в этом случае плоская изгибная волна на бесконечной плоской пластине вообще не излучала бы звук в среду и создавала бы только экспоненциально спадающее поле вблизи пластины. Для искривленной оболочки излучение, обусловленное изгибными волнами, в нуль не обращается, но все же становится малым, так что основная энергия излучения будет обусловлена волнами других типов, скорость которых всегда больше скорости звука в среде. Таким образом, действие обычных вибропоглощающих слоев на оболочке будет отличаться от действия таких слоев на плоских пластинах: хотя амплитуда вибраций оболочки по нормали будет резко снижена вследствие демпфирования изгибных волн, но излучение оболочки может оказаться сниженным в недостаточной степени, поскольку волны других типов, по отношению к которым оболочка обладает значительно большей жесткостью, будут подавляться слабее, чем волны изгибного типа. Изложенные соображения важны в практическом отношении, поскольку демпфирование, необходимое для достаточного снижения суммарного излучения может потребовать, по крайней мере количественно, других мер, чем те, которые применяются в настоящее время для подавления изгибных вибраций [1].

Подтвердим изложенные качественные соображения оценочным расчетом. Интересующие нас вопросы можно выяснить на простейшем при-

* Продольная волна в плоской пластине также создает излучение (вследствие изменения толщины пластины благодаря эффекту Пуассона), но оно мало по сравнению с рассматриваемым здесь эффектом для искривленных оболочек.

мере излучения звука, обусловленного волнами, распространяющимися вдоль направляющей кругового цилиндра. Рассмотрение удобно вести по схеме, неоднократно применявшейся в задачах о волнах в цилиндрических областях (см. например [2—4]), рассматривая оболочку как неограниченную «многолистную» двухмерную среду. Для волн, распространяющихся вдоль направляющей, можно воспользоваться готовым решением задачи о волнах на круговом стержне [4, 5], заменяя обычный модуль Юнга E «плоским» модулем Юнга $E/1-\sigma^2$ (σ — коэффициент Пуассона). Реакцией среды будем пренебрегать, поскольку для волн, распространяющихся с большой скоростью, которые только и интересуют нас в данном случае, реакция внесет практически только затухание, которое можно учесть обычными методами, а расщепление решений, как можно ожидать, не изменит по порядку величины степени возбуждения интересующих нас волн.

Итак, перенесем на вибрации оболочки теорию [4], развитую для стержней. Вдоль направляющей могут распространяться волны продольного типа (будем приписывать им индекс 1), распространяющиеся волны изгибного типа (индекс 2) и экспоненциальные волны изгибного типа индекс 3). Будем обозначать $k=\sqrt{\dfrac{\rho\omega^2(1-\sigma^2)}{E}}$ и $\varkappa=\sqrt[4]{\dfrac{12\rho\omega^2(1-\sigma^2)}{Eh^2}}$ волновые числа продольных и изгибных волн в плоской пластине из того же материала и той же толщины h, что и оболочка. Будем считать, что на окружности оболочки укладывается много длин изгибных волн в пластине, т. е. положим $\varkappa R\gg 1$. Тогда волновое число волн изгибного типа на оболочке будет также равно $\varkappa$ с точностью малых порядка $1/(\varkappa R)^2$ по сравнению с единицей, а волновое число волн продольного типа q будет равно $q=\sqrt{k^2-1/R^2}$ с еще большей точностью. Касательные смещения оболочки будем обозначать буквой ξ, а нормальные — буквой η, приписывая амплитуде индекс, соответствующий типу волны. Временной множитель выберем в виде $e^{-i\omega t}$.

Связь между амплитудами касательных и нормальных смещений для волн разного типа определяется формулами:

$$\xi_1=\mp iqR\eta_1,\quad \xi_2=\mp i\frac{1}{\varkappa R}\eta_2,\quad \xi_3=\mp\frac{1}{\varkappa R}\eta_3, \tag{1}$$

где верхний знак соответствует распространению волны в сторону возрастания длины s дуги направляющей, а нижний — в сторону ее убывания.

Найдем теперь излучение оболочки, обусловленное каждым типом возбуждаемых на ней волн при воздействии сторонних сил. Для простоты расчета будем считать, что оболочка возбуждается сторонней силой, равномерно распределенной вдоль образующей $s=0$ и наклоненной к радиусу под некоторым определенным углом. Интересующие нас вопросы распределения интенсивности излучения между разными типами волн можно выяснить уже на этом простейшем примере.

Эффект касательной и нормальной составляющей сторонней силы будет количественно различным. Начнем с рассмотрения касательной составляющей F. Амплитуда каждой из волн найдется из условий на образующей $s=0$: нормальное смещение и изгибающий момент должны обращаться в нуль, а растягивающие напряжения должны уравновешивать касательную составляющую сторонней силы. Эти условия можно написать так: $\eta=0$, $\eta_{ss}=0$, $\dfrac{Eh}{1-\sigma^2}\xi_s=\dfrac{F}{2}$. Здесь ξ и η обозначают результирующие смещения, вызванные всеми типами волн, а индекс s обозначает дифференцирование по длине дуги. В развернутом виде эти уравнения можно написать, введя амплитуды волн разных типов, следующим образом:

$$i\frac{1}{qR}\xi_1-\eta_2-\eta_3=0,\; i\frac{q}{\varkappa^2R}\xi_1-\eta_2+\eta_3=0,\; igR\xi_1+\eta_2+\eta_3=fR. \tag{2}$$

Здесь введено обозначение $\frac{F(1-\sigma^2)}{2Eh}=f$. Отбрасывая члены порядка $1/(\varkappa R)^2$ по сравнению с единицей, найдем приближенное решение системы (2):

$$\xi_1=\frac{f}{iq},\quad \eta_2=\eta_3=\frac{1}{2q^2R}f.$$

Наконец, согласно формуле (1) найдем $\eta_1=-\frac{1}{q^2R}f$. Таким образом, амплитуды нормальных смещений для волн всех трех типов будут находиться в отношениях:

$$|\eta_1|:|\eta_2|:|\eta_3|=2:1:1. \tag{3}$$

Нормальное смещение оболочки, обусловленное волной продольного типа, оказывается, при возбуждении касательной силой, вдвое больше, чем смещение, обусловленное каждой из волн изгибного типа. Что же касается относительной доли излучения, вносимой каждым типом волн, то она будет зависеть от того, какая из величин больше: волновое число звука данной частоты в окружающей среде k_0 или волновое число $\varkappa$ изгибных волн на оболочке. Если $\varkappa<k_0$, то излучение, обусловленное бегущими продольной и изгибной волной, будет по порядку величины соответствовать амплитудам этих волн. Однако, если $\varkappa>k_0$, то картина излучения будет совершенно иной. Для оценки получающихся в этом случае соотношений напишем в явном виде выражения для полей, излучаемых при наличии каждой из волн. Решения выразятся функциями Ханкеля первого рода, порядок которых определится периодичностью соответственной волны в оболочке. Амплитуда поля получится из условия равенства нормальной скорости частиц среды у оболочки и нормальной скорости самой оболочки. Поскольку нас интересует излученная энергия, достаточно определить значения полей на большом расстоянии от оболочки, пользуясь для этого асимптотическим разложением функций Ханкеля. Так, для поля излучения, обусловленного продольной волной на оболочке, найдем для больших расстояний r от центра оболочки

$$p_1=-\frac{\rho_0c_0\omega}{q^2R}f\sqrt{\frac{2}{\pi k_0r}}\,\frac{e^{i\left(k_0r-qR\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{-\frac{q}{k_0}H^{(1)}_{qR}(k_0R)+H^{(1)}_{qR-1}(k_0R)}. \tag{4}$$

Для поля обусловленного волной изгибного типа найдем аналогично

$$p_2=\frac{\rho_0c_0\omega}{2q^2R}f\sqrt{\frac{2}{\pi k_0r}}\,\frac{e^{i\left(k_0r-\varkappa R\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{-\frac{\varkappa}{k_0}H^{(1)}_{\varkappa R}(k_0R)+H^{(1)}_{\varkappa R-1}(k_0R)}. \tag{5}$$

Наиболее интересен в практическом отношении случай $k_0R\gg1$. При этом условии, учитывая неравенство $k<k_0<\varkappa$, мы можем для вычисления функций Ханкеля в знаменателе воспользоваться также асимптотическими выражениями:

$$H_{qR}^{(1)}(k_0R)=\sqrt{\frac{2}{\pi k_0R}}\,e^{i\left(k_0R-qR\,\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},\quad H_{qR-1}^{(1)}(k_0R)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi k_0R}}\,e^{i\left[k_0R-(qR-1)\,\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]},\quad H_{\varkappa R}^{(1)}(k_0R)=$$

$$=\frac{e^{-\varkappa R\,(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}}{\sqrt{2\pi\varkappa R\operatorname{th}\alpha}}+i\,\frac{e^{-\varkappa R\,(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\varkappa R\operatorname{th}\alpha}},$$

$$H_{\varkappa R-1}^{(1)}(k_0R)=\frac{e^{-(\varkappa R-1)(\alpha_1-\operatorname{th}\alpha_1)}}{\sqrt{2\pi(\varkappa R-1)\operatorname{th}\alpha_1}}+i\,\frac{e^{(\varkappa R-1)(\alpha_1-\operatorname{th}\alpha)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\,(\varkappa R-1)\operatorname{th}\alpha_1}},$$

где $\dfrac{\varkappa}{k_0}=\operatorname{ch}\alpha$ и $\dfrac{\varkappa R-1}{k_0R}=\operatorname{ch}\alpha_1$. Мы видим, что ханкелевы функции, соответствующие волнам продольного и изгибного типа, ведут себя по-разному. Для волн продольного типа аргумент больше индекса и экспоненты имеют мнимый показатель, так что их модуль равен единице. Для волн изгибного типа аргумент меньше индекса и экспоненты имеют вещественный положительный показатель и могут принимать весьма большие значения. Поэтому давления, создаваемые волной продольного типа, могут во много раз превосходить давления, создаваемые волной изгибного типа.

Для не слишком малых значений разности $\dfrac{\varkappa}{k_0}-1$ оценка при помощи асимптотических выражений дает

$$\left|\frac{p_1}{p_2}\right|>2\sqrt{\frac{\varkappa}{k_0}}\operatorname{cth}\alpha\,e^{\varkappa R(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}. \tag{6}$$

Здесь справа действительно стоит большая величина, что и указывает на преимущественную роль продольных волн в формировании излучения.

Приведем аналогичную оценку для возбуждения оболочки нормальной компонентой силы G. В этом случае условия на образующей требуют обращения в нуль касательного смещения и неизменности направления касательной в точке приложения силы; перерезывающая сила должна уравновешивать нормальную составляющую сторонней силы. Уравнения, выражающие эти условия, имеют вид

$$\xi=0,\quad \eta_s=0,\quad -\frac{E}{1-\sigma^2}\frac{h^3}{12}\eta_{ss}=\frac{G}{2},$$

или, в развернутом виде

$$i\varkappa R\xi_1+\eta_2-i\eta_3=0,\qquad -i\,\frac{1}{\varkappa R}\,\xi_1+\eta_2+i\eta_3=0,$$

$$-i\,\frac{q^2}{\varkappa^3R}\,\xi_1+\eta_2-i\eta_3=-\frac{iq}{\varkappa}. \tag{7}$$

Здесь введено обозначение $\dfrac{6G(1-\sigma^2)}{Eh^3\varkappa^2}=g.$ Решая эту систему, найдем с той же точностью, что и раньше

$$\xi_1=\frac{1}{\varkappa^2R}g;\quad \eta_2=-i\,\frac{1}{2\varkappa}\,g;\quad \eta_3=\frac{1}{2\varkappa}\,g.$$

Пользуясь формулой (1), найдем $\eta_1 = -i\frac{1}{q\varkappa^2R^2}g$. Отношение амплитуд будет теперь

$$|\eta_1|:|\eta_2|:|\eta_3| = \frac{2}{q\varkappa R^2}:1:1. \tag{8}$$

За исключением случаев близости к радиальному резонансу оболочки, амплитуда волны продольного типа оказывается, при возбуждении оболочки нормальной силой, малой по сравнению с амплитудой изгибной волны. Тем не менее, при $\varkappa > k_0$ и в этом случае продольные волны могут играть преобладающую роль в формировании излучения звука. В самом деле, пользуясь снова асимптотическими представлениями, мы получим вместо формулы (6) следующее выражение:

$$\left|\frac{p_1}{p_2}\right| > \frac{2}{q\varkappa R^2}\sqrt{\frac{\varkappa}{k_0}}\operatorname{cth}\alpha\, e^{\varkappa R(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}. \tag{9}$$

И в этом случае, если $\frac{\varkappa}{k_0}-1$ не слишком мало, это отношение будет велико по сравнению с единицей.

Отметим, что для нормальных сторонних сил и при $\varkappa > k_0$ с излучением, обусловленным волной продольного типа, будет конкурировать излучение, обусловленное экспоненциальной изгибной волной. В самом деле, действие локального смещения поверхности, обусловленного этой волной, эквивалентно действию поршня в экране, а поскольку размер деформирующегося участка мал по сравнению с радиусом цилиндра, можно принять это действие эквивалентным излучению цилиндра, совершающего пульсации с объемным погонным смещением, равным двойному интегральному смещению поверхности. Расчет дает для этого случая соотношение $\left|\frac{p_1}{p_3}\right| \approx \frac{4}{qR}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0R}}$. Таким образом, вдали от радиального резонанса может преобладать излучение экспоненциальной волны. Заметим, что при воздействии касательной сторонней силы соответственное соотношение имело бы вид $\left|\frac{p_1}{p_3}\right| \approx 4\varkappa R\sqrt{\frac{\pi}{2k_0R}}$ откуда следует, что в принятых предположениях при воздействии касательной сторонней силы влияние волны продольного типа всегда преобладает в излучении оболочки.

Все вышесказанное об излучении звука вибрирующей оболочкой во внешнее пространство непосредственно переносится и на формирование поля внутри замкнутой оболочки (например, шум, создаваемый внутри кузова автомобиля или фюзеляжа самолета вибрациями обшивки). Соотношения между давлениями, обусловливаемыми разными типами волн, оказываются и здесь такими же, как и для внешней задачи.

Приведенные выше оценки относятся только к «дальнему» полю излучения звука оболочкой. Что же касается «ближнего» поля, на расстоянии от оболочки малом по сравнению с длиной волны звука, либо поля на самой оболочке, то здесь эффект снижения поля, обусловленного волной изгибного типа, вызванный малостью длины этой волны, скажется в меньшей степени, так что в непосредственной близости к оболочке поле, создаваемое изгибными волнами, может оказаться преобладающим, хотя уже на немного большем расстоянии преобладающим станет поле, создаваемое волной продольного типа.

В заключение автор выражает благодарность М. А. Исаковичу за предоставление темы и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Issacovitch, L. N. Komarova. Acoustics of curved rods and shells, The 6-th International Congress of acoustics. 49—52, Tokyo, 1968.
2. И. А. Викторов. Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях. Акуст. ж., 1958, **4**, 2, 131—136.
3. Л. М. Бреховских. О поверхностных волнах в твердом теле. Акуст. ж., 1966, 12, 3, 374—376.
4. М. А. Исакович и Л. Н. Комарова. Продольно-изгибные волны в тонком стержне. Акуст. ж., 1967, **13**, 4, 579—583.
5. L. Filipczynski. Propagation of ultrasonic waves in spirals. Proceedings of vibration problems. Warsaw, 1962, **3**, 3, 241—251.
6. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (формула 8.452). М., Физматгиз, 1963.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 августа 1967 г.