АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 3

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЫ ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО

А. Д. Лапин

Рассмотрена плоская задача о рассеянии поверхностных волн, распространяющихся вдоль статистически шероховатой границы жидкость — твердое тело. Предполагается, что неровности малы по сравнению с длиной волны и достаточно пологи. Рассеянное поле найдено в первом приближении метода малых возмущений по высоте и наклону неровностей. Рассчитан коэффициент затухания поверхностной волны, распространяющейся вдоль неровной границы вода — лед.

В работе [1] дано решение задачи о рассеянии поверхностных волн, распространяющихся вдоль неровной границы жидкость — твердое тело в предположении, что радиус кривизны неровной границы велик по сравнению с длиной волны и мало изменяется на расстоянии нескольких длин волн (плавные неровности). Представляет интерес рассмотреть эту задачу в другом предельном случае, а именно, когда неровности малы по сравнению с длиной волны и достаточно пологи. Рассеянное поле, обусловленное малыми неровностями, удобно искать методом малых возмущений, принимая в качестве нулевого приближения поверхностную волну, распространяющуюся вдоль плоской границы. В настоящей работе решение найдено в первом приближении по высоте и наклону неровностей.

Задача о рассеянии поверхностных рэлеевских волн, распространяющихся вдоль периодически неровной границы твердое тело — вакуум, рассматривалась ранее в работе [2].

Сформулируем задачу о рассеянии поверхностной волны. Пусть граница раздела между жидкостью и твердым телом описывается уравнением $z = \zeta(x)$, где функция ζ отлична от нуля лишь в интервале $0 < x < L$ (фиг. 1). Из полупространства $x < 0$ на нерегулярный участок падает гармоническая поверхностная волна. Требуется найти рассеянное поле в жидкости и в твердом теле, а также ослабление падающей волны после прохождения нерегулярного участка.

Обозначим через Φ — потенциал звукового поля в жидкости, а через φ и Ψ — соответственно скалярный и векторный потенциалы в твердом теле. Падающую поверхностную волну примем в виде

$$\Phi_0(x,\ z) = A_1 \exp(ipx - \gamma z), \quad \varphi_0(x,\ z) = A_2 \exp(ipx + \alpha z),$$
$$\Psi_0(x,\ z) = A_3 \exp(ipx + \beta z),$$

где

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\gamma}{\alpha \varkappa^2}(2p^2 - \varkappa^2), \quad \frac{A_3}{A_1} = i2\frac{p\gamma}{\varkappa^2}, \quad \gamma = \sqrt{p^2 - K^2}, \quad \alpha = \sqrt{p^2 - k^2}$$

$$\beta = \sqrt{p^2 - \varkappa^2}, \quad K = \omega/c, \quad k = \omega/c_l, \quad \varkappa = \omega c_t,$$

p — волновое число поверхностной волны. Дисперсионное уравнение для величины p имеет вид

$$\left\{(2p^2-\varkappa^2)^2-4\alpha\beta p^2+\frac{\varkappa^4\alpha}{m\gamma}\right\}=0, \tag{1}$$

где $m=\rho_1/\rho$ — отношение плотностей твердого тела и жидкости.

В первом приближении по высоте и наклону неровностей рассеянное поле $\Phi_1=\Phi-\Phi_0$, $\varphi_1=\varphi-\varphi_0$, $\Psi_1=\Psi-\Psi_0$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям:

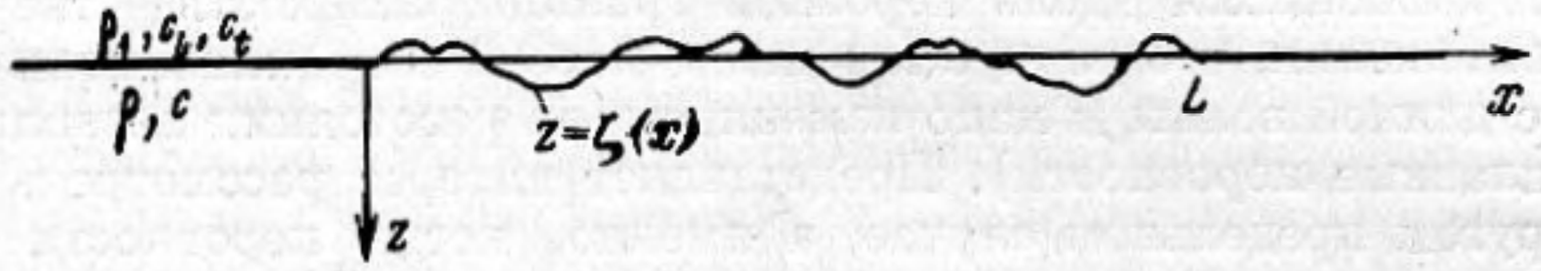
$$\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right\}_{z=0}=F_1(x)\equiv-\left\{\left[\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\right]\zeta+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_0}{\partial z}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right\}_{z=0};$$

$$\{\sigma_{zz}^{(1)}+i\omega\rho\Phi_1\}_{z=0}=F_2(x)\equiv-\left\{\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z}+i\omega\rho\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\right\}_{z=0}\zeta;$$

$$\{\sigma_{zx}^{(1)}\}_{z=0}=F_3(x)\equiv\left\{[\sigma_{xx}^{(0)}+i\omega\rho\Phi_0]\frac{d\zeta}{dx}-\frac{\partial\sigma_{zx}^{(0)}}{\partial z}\zeta\right\}_{z=0}$$

где σ_{ik} — тензор напряжений. На основании этих формул можно считать, что рассеянное поле создается сторонними источниками $F_n(x)$, где $n=$



Фиг. 1

$=1$, 2, 3, распределенными по плоскости $z=0$. Это поле можно найти методом Фурье. Разложим неровную поверхность $\zeta(x)$ на гармоники вида $\zeta_\Omega=a(\Omega)\exp(i\Omega x)$, где $a(\Omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x)\exp(-i\Omega x)\,dx$, и вычислим поля $\Phi_{1\Omega}$, $\varphi_{1\Omega}$ и $\Psi_{1\Omega}$, обусловленные этими гармониками. Рассеянное поле Φ_1 (φ_1, Ψ_1) получим интегрированием полей $\Phi_{1\Omega}(\varphi_{1\Omega}, \Psi_{1\Omega})$.

Выполнив вычисления, аналогичные изложенным в работе [3], найдем, что рассеянное поле на большом расстоянии от нерегулярного участка представляет собой сумму объемной (цилиндрической) волны и незатухающей поверхностной волны. Это поле можно представить в виде

$$\Phi_1=B_1(\theta)\frac{e^{iKr_0}}{\sqrt{r_0}}+N_1^{\pm}\exp(\pm ipx-\gamma z),$$

$$\varphi_1=B_2(\theta)\frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{r_0}}+N_2^{\pm}\exp(\pm ipx+\alpha z),$$

$$\Psi_1=B_3(\theta)\frac{e^{i\varkappa r_0}}{\sqrt{r_0}}+N_3^{\pm}\exp(\pm ipx+\beta z),$$

где введены следующие обозначения:

$$B_n(\theta)=\sqrt{-\frac{iK_n}{2\pi}}\varkappa A_1\sin\theta D_n(K_x=K_n\cos\theta)\tilde\zeta(p-K_n\cos\theta),$$

$$N_1^{\pm}=\pm\varkappa A_1\left\{D_1T\left[\frac{dT}{dK_x}\right]^{-1}\right\}_{K_x=\pm p}\tilde\zeta(p\mp p),$$

$$N_2^{\pm} = \frac{\gamma}{\alpha\varkappa^2}(2p^2 - \varkappa^2)N_1^{\pm}, \quad N_3^{\pm} = \pm i2\frac{p\gamma}{\varkappa^2}N_1^{\pm},$$

$$D_1(K_x) = \frac{m}{T(K_x)}\{i[(\varkappa_z^2 - K_x^2)^2 + 4K_x^2k_z\varkappa_z]M_1 -$$

$$- 2\varkappa^2k_zM_2 + K_x[(\varkappa_z^2 - K_x^2) - 2\varkappa_zk_z]M_3\},$$

$$D_2(K_x) = \frac{1}{T(K_x)}\{(\varkappa_z^2 - K_x^2)[i\varkappa^2M_1 + 2mK_zM_2] + K_x(\varkappa^2 + 2m\varkappa_zK_z)M_3\},$$

$$D_3(K_x) = \frac{1}{T(K_x)}\{[mK_z(\varkappa_z^2 - K_x^2) + \varkappa^2k_z]M_3 - 2K_xk_z[i\varkappa^2M_1 + 2mK_zM_2]\},$$

$$T(K_x) = \{mK_z[\varkappa_z^2 - K_x^2)^2 + 4K_x^2k_z\varkappa_z] + \varkappa^4k_z\},$$

$$M_1 = \frac{\gamma}{\alpha\varkappa^2}\Big\{\alpha[\gamma\varkappa^2 + 2\beta p^2 - \alpha(2p^2 - \varkappa^2)] + p(K_x - p)\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha}{\gamma}\varkappa^2 + 2\alpha\beta - (2p^2 - \varkappa^2)\right]\Big\}, \quad M_2 = \varkappa\gamma\frac{(m-1)}{2m},$$

$$M_3 = i\frac{2\gamma}{\alpha\varkappa^3}\{\alpha p(\beta - \alpha)(2p^2 - \varkappa^2) +$$

$$+ (K_x - p)[4\alpha\beta p^2 - (2p^2 - \varkappa^2)(2p^2 - k^2)]\},$$

$$\tilde{\zeta}(\eta) = \int_0^L \zeta(x)\exp(i\eta x)\,dx, \quad K_1 = K, \quad K_2 = k,$$

$$K_3 = \varkappa, \quad K_z = \sqrt{K^2 - K_x^2}, \quad k_z = \sqrt{k^2 - K_x^2},$$

$$\varkappa_z = \sqrt{\varkappa^2 - K_x^2}, \quad r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{|z|}{(x - x_0)}\right\}.$$

В формулах для поверхностных волн верхний знак следует выбирать при $x > L$, а нижний знак — при $x < 0$.

Предположим, что величина ζ — статистическая однородная функция точки, имеющая нулевое среднее значение. Найдем среднюю (по времени и по ансамблю) энергию, уносимую рассеянным полем из падающей волны в единицу времени. Поскольку рассеянные объемные волны и рассеянная поверхностная волна разделены в пространстве, их энергии аддитивны. Обозначим через $\langle Q^{(1)}_{\text{рас}}\rangle$ — усредненный по времени и по ансамблю поток энергии объемных волн через поверхность цилиндра большого радиуса, а через $\langle Q^{(2)}_{\text{рас}}\rangle$ — усредненный по времени и по ансамблю поток энергии поверхностной волны через плоскость $x = 0$. Эти потоки энергии можно представить в виде

$$\langle Q^{(1)}_{\text{рас}}\rangle = \frac{1}{8}\omega\rho(\varkappa L)|A_1|^2\int_0^\pi\Big\{\frac{K^2}{\varkappa^2}|D_1(K_x = K\cos\theta)|^2G(p - K\cos\theta) +$$

$$+ m\frac{k^2}{\varkappa^2}|D_2(K_x = k\cos\theta)|^2G(p - k\cos\theta) + m|D_3(K_x = \varkappa\cos\theta)|^2G(p -$$

$$- \varkappa\cos\theta)\Big\}\sin^2\theta\,d\theta,$$

$$\langle Q^{(2)}_{\text{рас}}\rangle = \frac{\pi\omega\rho p(\varkappa L)S}{8\varkappa^6\beta\alpha^2}|A_1|^2\left|\frac{D_1T}{T'}\right|^2_{K_x = -p}G(2p),$$

где

$$S=\left\{\varkappa^4(K^2-k^2)\frac{\beta}{|\gamma|}+4m|\gamma|^2[4p^4-3p^2(\varkappa^2+k^2)+\right.$$

$$\left.+2k^2\varkappa^2-2\alpha\beta(2p^2-\varkappa^2)]\right\},$$

$$G(\nu)=\frac{2\varkappa^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{i\nu\tau}\,d\tau,$$

$R(\tau)=\langle\zeta(x+\tau)\zeta(x)\rangle$ — функция корреляции неровной поверхности. Полный поток энергии в рассеянном поле равен $\{\langle Q^{(1)}_{\text{рас}}\rangle+\langle Q^{(2)}_{\text{рас}}\rangle\}$; он пропорционален длине нерегулярного участка.

При некоторых типах неровностей энергия рассеянной поверхностной волны мала по сравнению с энергией рассеянных объемных волн $(\langle Q^{(2)}_{\text{рас}}\rangle\ll\langle Q^{(1)}_{\text{рас}}\rangle)$. Тогда приближенно можно считать, что падающая поверхностная волна рассеивается только в объемные волны, уходящие от неровной поверхности $(\langle Q_{\text{рас}}\rangle\approx\langle Q^{(1)}_{\text{рас}}\rangle)$. В этом случае можно получить формулу, дающую затухание поверхностной волны при любой длине нерегулярного участка. Обозначим через $\langle Q(x)\rangle$ и $\langle Q(x+\Delta x)\rangle$ — усредненный поток энергии подающей поверхностной волны соответственно через плоскости x и $x+\Delta x$, где интервал Δx удовлетворяет следующим условиям:

1. Интервал велик по сравнению с длиной волны и характерным масштабом неровностей;

2. Рассеяние на интервале достаточно мало, так что для расчета рассеянного поля можно применять формулы, полученные в первом приближении метода малых возмущений.

Изменение потока энергии в поверхностной волне после прохождения нерегулярного участка Δx можно представить в виде

$$\langle\Delta Q\rangle=\langle Q(x+\Delta x)\rangle-\langle Q(x)\rangle=-\delta\langle Q(x)\rangle\Delta x,\tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности δ определяется по формуле

$$\delta=\frac{\langle Q^{(1)}_{\text{рас}}\rangle}{LQ_{\text{пад}}}=\frac{\beta\alpha^2\varkappa^5}{2pS}\int_0^{\pi}\left\{\frac{K^2}{\varkappa^2}|D_1(K_x=K\cos\theta)|^2G(p-K\cos\theta)+\right.$$

$$+m\frac{k^2}{\varkappa^2}|D_2(K_x=k\cos\theta)|^2G(p-k\cos\theta)+m|D_3(K_x=\varkappa\cos\theta)|^2\times$$

$$\left.\times G(p-\varkappa\cos\theta)\right\}\sin^2\theta\,d\theta.\tag{3}$$

Решение уравнения (2) имеет вид $\langle Q(x)\rangle=Q_{\text{пад}}e^{-\delta x}$.

Эта формула дает закон затухания поверхностной волны, распространяющейся вдоль статистически шероховатой границы жидкость — твердое тело. Величину коэффициента затухания этой волны можно рассчитать по формуле (3).

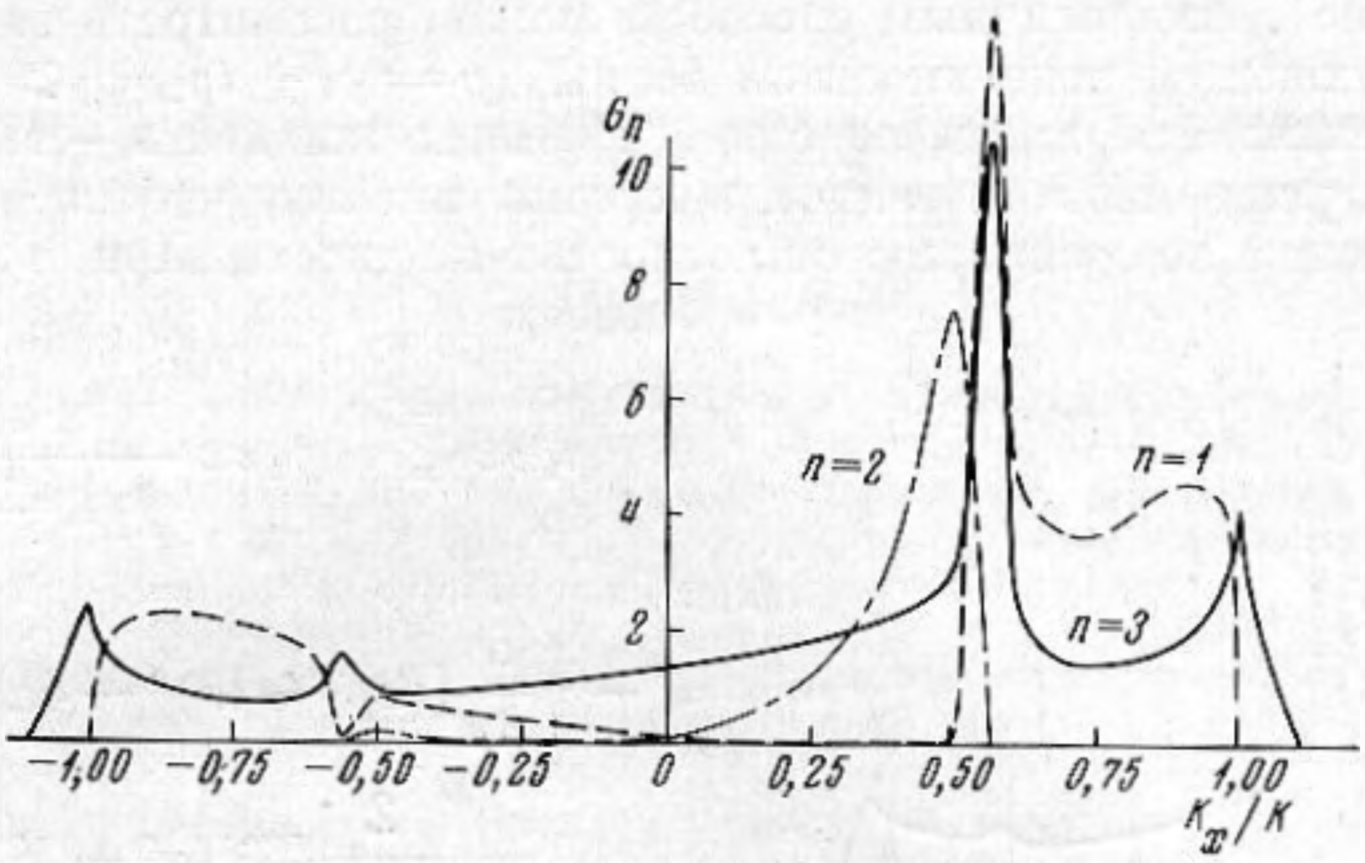
В качестве иллюстрации рассмотрим статистически шероховатую границу, у которой функция корреляции задана в виде

$$R(\tau)=\sigma^2\exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)\cos(q\tau),$$

где $\sigma^2=\langle\zeta^2\rangle$, τ_0 — характерный масштаб неровностей. Мы будем считать, что выполнены следующие соотношения: $|p-q|<k_{\max}$, $(k_{\min}\tau_0)\gg1$, где $k_{\max}\equiv\max\{K,k,\varkappa\}$, $k_{\min}\equiv\min\{K,k,\varkappa\}$. При выбранной функции корреляции мы имеем

$$G(\nu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\varkappa\sigma)^2(\varkappa\tau_0)\exp\left\{-\frac{\tau_0^2}{4}(\nu-q)^2\right\}.$$

В рассматриваемом случае можно пренебречь рассеянной поверхностной волной по сравнению с рассеянными объемными волнами; поэтому затухание падающей поверхностной волны будет происходить по экспоненциальному закону. Найдем коэффициент затухания падающей волны. С этой целью подставим $G(\nu)$ в формулу (3) и выполним в ней инте-



Фиг. 2

грирование методом перевала, считая, что величина $|D_n|^2$ является медленно изменяющейся функцией угла θ по сравнению с величиной G. Тогда мы получим

$$\delta = \frac{\beta a^2 \varkappa^4 (\varkappa\sigma)^2}{pS} \operatorname{Re}\{\sqrt{K^2-(p-q)^2}|D_1(K_x=p-q)|^2 +$$

$$+ m\sqrt{k^2-(p-q)^2}|D_2(K_x=p-q)|^2 +$$

$$+ m\sqrt{\varkappa^2-(p-q)^2}|D_3(K_x=p-q)|^2\}. \tag{4}$$

Эта формула совпадает с формулой для коэффициента затухания поверхностной волны, распространяющейся вдоль неровной поверхности $z=\zeta(x)\equiv\sqrt{2}\sigma\cos qx$.

Применим полученные формулы для расчета рассеяния поверхностной волны, распространяющейся вдоль неровной границы вода — лед. Все вычисления выполнены при следующих параметрах сред: $c_l/c=1{,}78$; $c_t/c=0{,}905$; $m=0{,}913$. При $c=1436$ *м/сек* и $\rho=1$ *г/см*^{3} эти безразмерные параметры соответствуют параметрам годовалого льда: $c_t=1300$ *м/сек*, $c_l=2550$ *м/сек* и $\rho_1=0{,}913$ *г/см*^{3} [4].

Исследование дисперсионного уравнения (1) показывает, что при выбранных параметрах сред вдоль границы раздела может распространяться только незатухающая поверхностная волна. Волновое число этой волны равно $1{,}49\,K$.

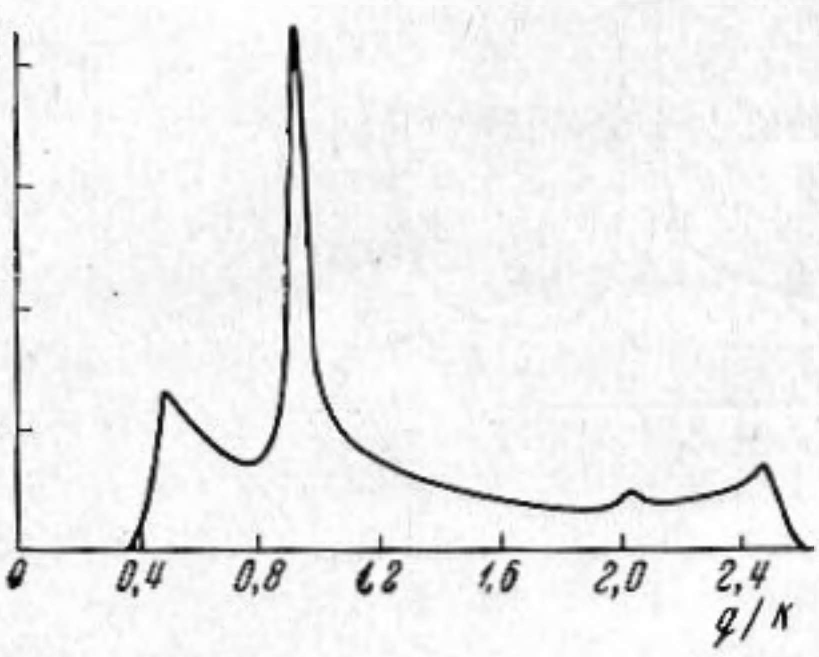
На фиг. 2 представлены графики величин

$$G_1=4K_z/K|D_1(K_x)|^2,\quad G_2=5k_z/K|D_2(K_x)|^2 \quad \text{и}$$
$$G_3=\varkappa_z/K|D_3(K_x)|^2$$

в функции K_x/K. Эти величины характеризуют энергию, уносимую спектрами $\Phi_{1\Omega}$, $\varphi_{1\Omega}$ и $\Psi_{1\Omega}$ с единицы площади границы раздела при $\varkappa a(\Omega)=\text{const}$. Графики показывают, что наибольшую плотность энергии имеют спектры, распространяющиеся в направлениях, соответствующих резонансам совпадения ($|K_x|=k, K$).

На фиг. 3 изображен график величины $\mu\equiv\delta/K(K\sigma)^2$, где коэффициент затухания δ вычислен по формуле (4), в функции q/K. Из графика видно, что коэффициент затухания имеет максимальное значение при $q = p - k \approx 0{,}93\ K$. В этом случае сильно возбуждаются спектры $\Phi_{1,-q}$ и $\Psi_{1,-q}$, уносящие энергию из поверхностной волны, а спектр $\varphi_{1,-q}$ распространяется вдоль оси x.

Все вышеизложенные результаты получены в предположении, что падающая поверхностная волна является незатухающей (p — вещественная величина). Аналогичным способом можно рассмотреть задачу о рассеянии затухающей поверхностной волны ($p = p_1 + ip_2$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$), распространяющейся вдоль неровной границы жидкость — твердое тело. Мы найдем решение этой задачи в предположении, что плотность твердого тела велика по сравнению с плотностью жидкости. При $m \equiv \rho_1 / \rho \gg 1$ мы имеем



Фиг. 3

$$p_1 \approx \xi, \quad p_2 \approx \frac{\varkappa^4 \alpha_0}{\chi\sqrt{K^2 - \xi^2}},$$

где

$$\chi = -\left\{\frac{d}{dp}[(2p^2 - \varkappa^2)^2 - 4\alpha\beta p^2]\right\}_{p=\xi} =$$

$$= \frac{2}{\alpha_0\beta_0\xi}\{6\xi^4(\varkappa^3 - k^2) +$$

$$+ 2\xi^2\varkappa^2(2k^2 - 3\varkappa^2) + \varkappa^6\},$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\xi^2 - k^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{\xi^2 - \varkappa^2},$$

ξ — волновое число рэлеевской волны. Расчеты показывают, что рассеянное поле на большом расстоянии от нерегулярного участка представляет собой сумму объемной волны и незатухающей поверхностной волны. Таким образом, при рассеянии на неровностях затухающая поверхностная волна частично трансформируется в незатухающую поверхностную волну.

При некоторых типах неровностей энергия рассеянной поверхностной волны мала по сравнению с энергией рассеянных объемных волн. Тогда падающая поверхностная волна будет затухать по экспоненциальному закону. Коэффициент затухания этой волны равен $(2p_2 + \delta)$, где величина δ вычисляется по формуле (3) при замене в ней p на ξ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Лапин. Распространение поверхностных волн вдоль искривленных границ. Акуст. ж., 1969, **15**, 2, 234—238.
2. Л. М. Бреховских. О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела. Акуст. ж., 1959, **5**, 3, 282—289.
3. А. Д. Лапин. Рассеяние звука на шероховатой поверхности твердого тела. Акуст. ж., 1964, **10**, 1, 71—80.
4. В. В. Богородский. Упругие характеристики льда. Акуст. ж., 1958, **4**, 1, 19—23.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
16 августа 1967 г.