

УДК 534.25

**О СОГЛАСУЮЩИХ СЛОЯХ ДЛЯ ГРАНИЦЫ
С КОМПЛЕКСНЫМ ВХОДНЫМ ИМПЕДАНЦЕМ**

В. А. Широков, Б. Д. Тартаковский

Исследована возможность согласования полубесконечной среды с границей раздела, имеющей комплексный входной импеданс. Получены условия полного прохождения энергии через границу при произвольной совокупности слоев. Рассмотрен случай согласования с помощью одного слоя. Показано, что однослойное согласование возможно при определенных значениях активной (R) и реактивной (X) компонент входного импеданса границы. Выяснено влияние соотношения между (R) и (X) на ширину полосы частот согласования.

В работе [1] получены выражения для коэффициента прозрачности произвольной совокупности плоско-параллельных слоев с любыми заданными волновыми сопротивлениями. В дальнейшем эти выражения использованы для расчета параметров слоев, обеспечивающих полное прохождение энергии через границу двух полубесконечных сред с различными волновыми сопротивлениями, т. е. для согласования активного входного импеданса границы с активным импедансом одной из сред [2].

В связи с тем, что довольно часто встречаются границы раздела сред, характеризующиеся комплексным входным импедансом (полубесконечные среды, разделенные слоем; входной механический импеданс электроакустического преобразователя и тому подобное) возникает задача о согласовании комплексных входных импедансов. Применение системы слоев является одним из наиболее простых способов согласования, в особенности, когда одна из сред обладает активным импедансом. Подобная задача рассматривалась в работах [3 и 4], где анализировалось влияние плоско-параллельных слоев на чувствительность в режиме излучения плоско-параллельного преобразователя, характеризуемого определенной частотной характеристикой комплексного импеданса.

Однако задача о согласовании комплексных импедансов с помощью слоистых структур в общем виде, безотносительно к конкретным видам комплексных нагрузок, несмотря на ее актуальность, еще не рассматривалась.

Коэффициент отражения для произвольной совокупности плоско-параллельных слоев, полученный в работе [1], имеет вид

$$V = \frac{\left[\frac{Z_{n+1}}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) - S_1(\beta, \alpha) \right] + i \left[\frac{1}{Z_0} S_2(\alpha, \beta) - Z_{n+1} S_2(\beta, \alpha) \right]}{\left[\frac{Z_{n+1}}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) - S_1(\beta, \alpha) \right] + i \left[\frac{1}{Z_0} S_2(\alpha, \beta) + Z_{n+1} S_2(\beta, \alpha) \right]}, \quad (1)$$

$$\text{где } S_1(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \cos \varphi_i \left[1 - \sum_{q=2}^n \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p + \sum_{s=4}^n \beta_s \sum_{r=3}^{s-1} \alpha_r \sum_{q=2}^{r-1} \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p - \dots \right], \quad (2)$$

$$S_2(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \cos \varphi_i \left[\sum_{p=1}^n \alpha_p - \sum_{r=3}^n \alpha_r \sum_{q=2}^{r-1} \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p + \dots \right], \quad (3)$$

причем p, q, r, s — обозначают индексы, по которым производится сумми-

рование, например, $\sum_{q=2}^3 \alpha_q \sum_{p=1}^{q-1} \beta_p = \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2$, и приняты сокра-

щенные обозначения $\alpha_i = Z_i \operatorname{tg} \varphi_i, \quad \beta_i = \frac{1}{Z_i} \operatorname{tg} \varphi_i, \quad \varphi_i = \frac{2\pi f}{c_i} l_i$,

где $Z_i = \rho_i c_i$ (ρ_i — плотность, c_i — скорость распространения продольных волн, l_i — толщина слоя).

Пусть входной импеданс границы будет $Z_{n+1} = R + iX$. Тогда выражение для коэффициента прозрачности примет вид

$$V = \frac{\left[\frac{R}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) - S_1(\beta, \alpha) + X S_2(\beta, \alpha) \right] + i \left[\frac{1}{Z_0} S_2(\alpha, \beta) - R S_2(\beta, \alpha) + \frac{X}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) \right]}{\left[\frac{R}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) + S_1(\beta, \alpha) - X S_2(\beta, \alpha) \right] + i \left[\frac{1}{Z_0} S_2(\alpha, \beta) + R S_2(\beta, \alpha) + \frac{X}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) \right]}, \quad (4)$$

а условие полной прозрачности ($V = 0$) будет

$$\frac{R}{Z_0} S_1(\alpha, \beta) - S_1(\beta, \alpha) - X S_2(\beta, \alpha) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{Z_0} S_2(\alpha, \beta) - R S_2(\beta, \alpha) + \frac{X}{Z_0} S_1(\beta, \alpha) = 0.$$

При $X = 0$ выражения (4) и (5) переходят в выражения, справедливые для входного импеданса полубесконечной однородной среды с удельным волновым сопротивлением R [2]. При $X \neq 0$ уравнения (5) полностью характеризуют упругие параметры и размеры произвольной совокупности переходных слоев, удовлетворяющих условию полного перехода энергии через границу сред.

Рассмотрим частный случай использования одного слоя. Тогда, подставляя в выражение (5)

$$S_1(\alpha, \beta) = S_1(\beta, \alpha) = \cos \varphi_1, \quad \frac{1}{Z_1} S_2(\alpha, \beta) = Z_1 S_2(\beta, \alpha) = \sin \varphi_1$$

и полагая $Z_0 = 1$ (все импедансы нормированы к Z_0), получим

$$(1 - R) - \frac{X}{Z_1} \operatorname{tg} \varphi_1 = 0, \quad \left(Z_1 - \frac{R}{Z_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 + X = 0, \quad (6)$$

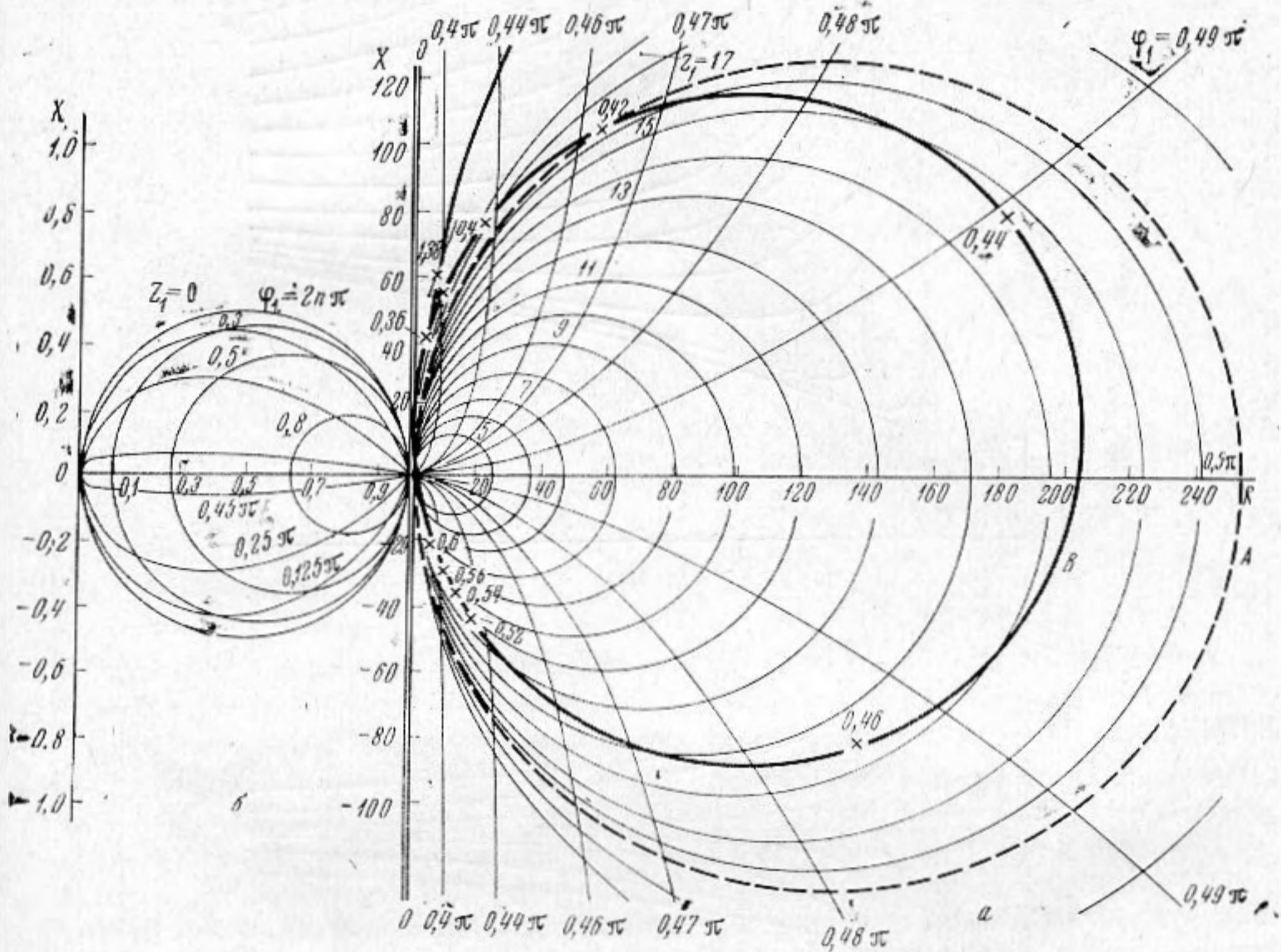
откуда следует единственное решение:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{Z_1}{X} (1 - R) \quad (7)$$

или

$$Z_1 = \sqrt{R + \frac{X^2}{R-1}} \quad (8)$$

при $X = 0$, $Z_1 = \sqrt{R}$, $\text{tg } \varphi_1 \rightarrow \infty$. Принимая толщину слоя $l = (2m+1) \lambda/4$, получим известное условие просветления границы полубесконечных сред с помощью четвертьволнового слоя. Если $R > 1$, то $Z_1 > \sqrt{R}$, если $R < 1$, то $Z_1 < \sqrt{R}$. При $(R^2 + X^2)/R < 1$, подкоренное выражение в формуле (4) становится отрицательным, т. е. согласование невозможно. Как видно



Фиг. 1

из формулы (7), полное согласование ($|V|^2 = 0$) имеет место не при четвертьволновой толщине слоя.

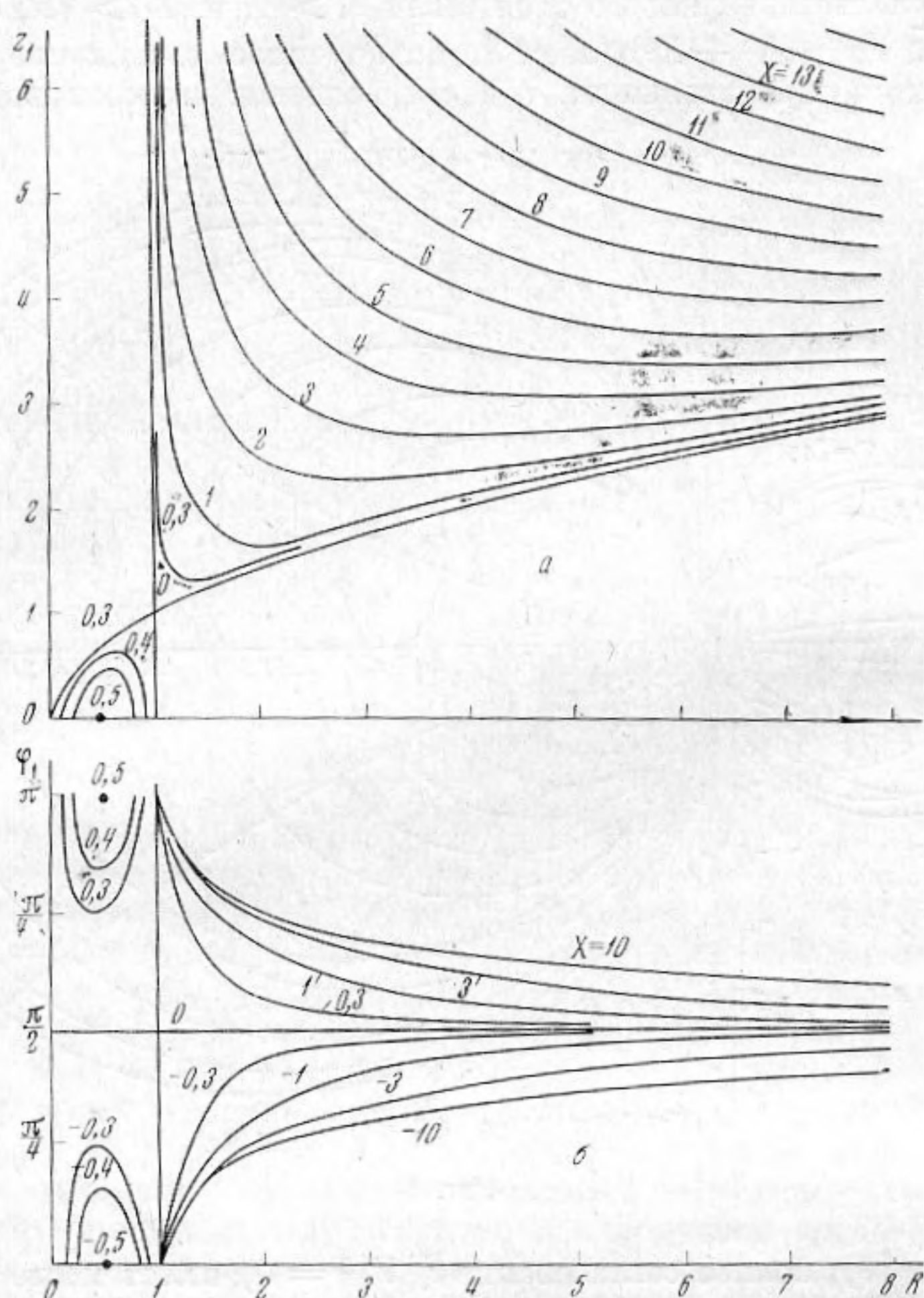
На фиг. 1 в плоскости комплексного переменного R , iX изображена номограмма для определения параметров согласующего слоя ($Z_1 = \rho_1 c_1$ и l_1), представляющая собой два семейства кривых, соответствующих постоянному Z_1 (окружности) и постоянным толщинам слоев, определяемых, соответственно, уравнениями:

$$X^2 + \left(R - \frac{1 - Z_1^2}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - Z_1^2)^2, \quad (9)$$

$$X^2 = \frac{R(1 - R)^2}{\text{tg}^2 \varphi_1 + 1 - R}. \quad (10)$$

При $R > 1$ (фиг. 1, а) для любых X всегда можно подобрать согласующий слой. Для $R < 1$ (фиг. 1, б в увеличенном масштабе 100 : 1), значения X , при которых возможно согласование, находятся внутри окружности $Z_1 = 0$ ($\text{tg } \varphi_1 = 0$), имеющей радиус, равный 0,5. Таким образом, при $R < 1$ ни при каких $X > 0,5$ нельзя получить полного согласования с помощью одного слоя.

В качестве примера на номограмме нанесена импеданц-диаграмма реального полуволнового слоя, выполненного из керамики ($Z_c = \rho_c c_c = 15,6$), погруженного в среду с $Z_0 = 1$ (пунктирная кривая (A)) и реального преобразователя (полуволнового вибратора) из этой же керамики и такой же толщины, нагруженного с электрической стороны на омическое сопротивление, эквивалентное $Z_0(B)$. Из-за влияния электрической стороны им-

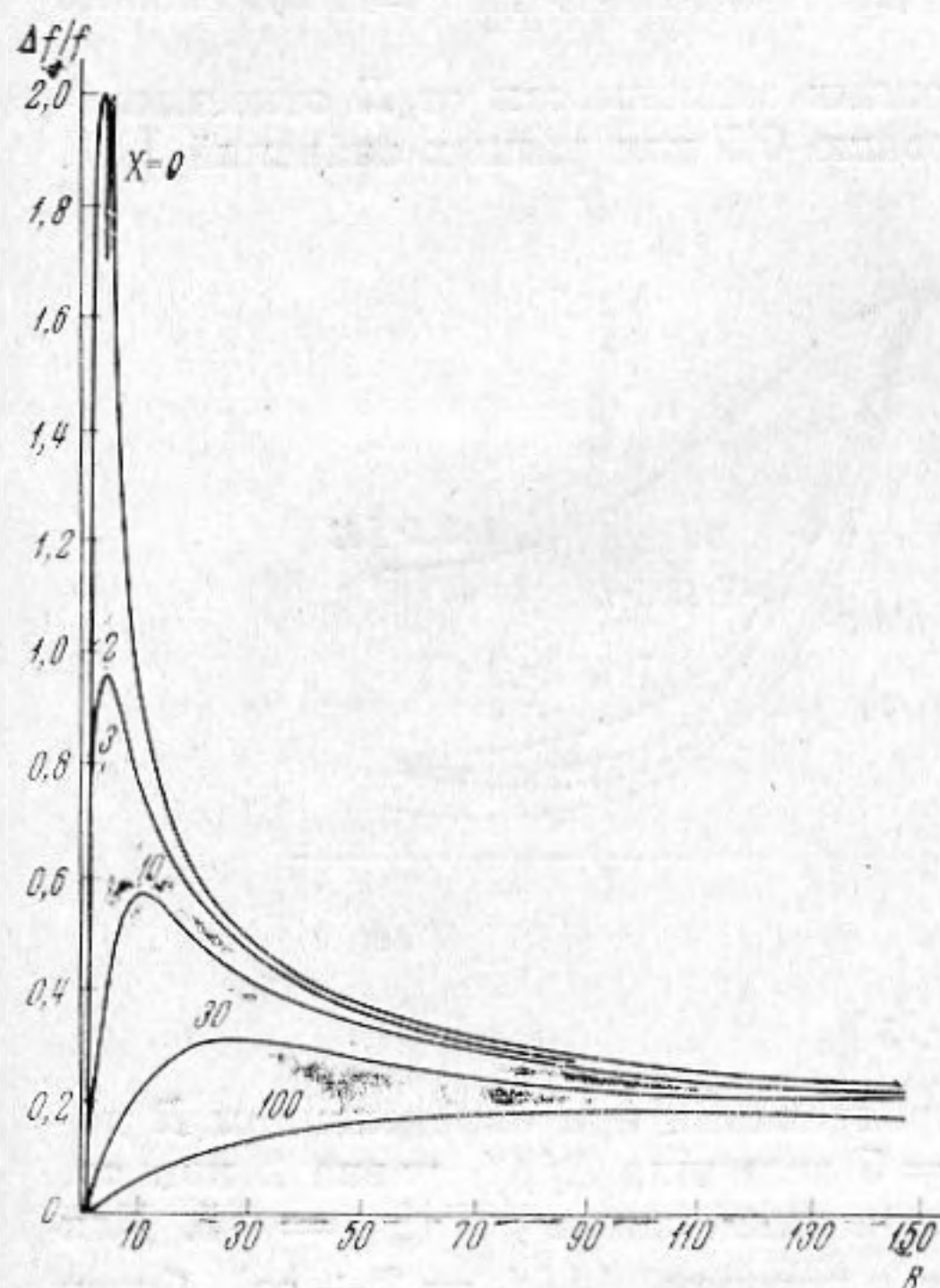


Фиг. 2

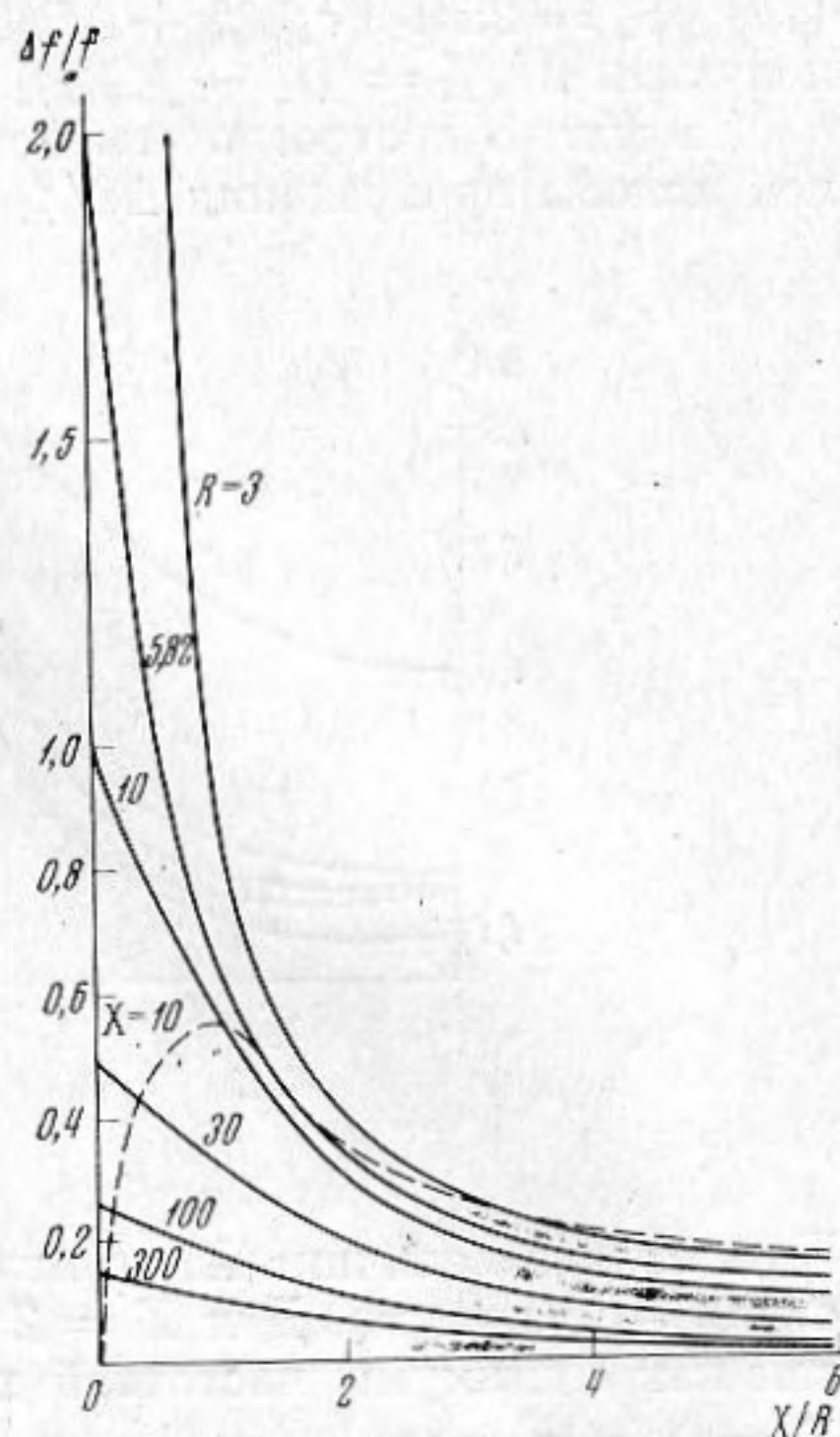
педанц-диаграмма преобразователя отличается от диаграммы слоя, представляющей собой окружность. Как и следовало ожидать, для получения полного прохождения энергии через границы среда — слой и среда — преобразователь требуются согласующие слои из разных материалов и, соответственно, разных толщин. На импеданц-диаграмме преобразователя отмечены точки (крестиками), соответствующие определенным частотам (в долях от частоты механического резонанса $f_{рез}$ слоя). На частотах ниже $f_{R=1}$ (для данного преобразователя $f_{R=1} \approx 0,28 f_{рез}$) активная составляющая входного импеданца меньше 1, в то время как реактивная составляющая в значительном диапазоне частот больше 0,5. Таким образом, как было показано выше, полное согласование на этих частотах с помощью одного слоя невозможно.

На фиг. 2, а и 2, б представлены зависимости Z_1 и φ_1 от величины R при разных значениях X . С увеличением R величина Z_1 асимптотически стремится к кривой $X = 0$ и уже при значениях $R \geq 3X$ можно подобрать

слой (Z_1, l_1) , который обеспечит высокое значение коэффициента прохождения, даже если в известных пределах будет изменяться входной импеданс (например, с изменением частоты). Нетрудно видеть, что для одного и того же X существуют два значения R , при которых полное согласование возможно при одном и том же волновом сопротивлении слоя, но, соответственно, при разных толщинах (фиг. 2, б). На номограмме фиг. 1 это



Фиг. 3



Фиг. 4

отражается в двукратном пересечении окружности $Z_1 = \text{const}$ с прямой $X = \text{const}$. Если $R = 1$ и $X = 0$, то полное согласование наблюдается, как известно, для слоя с любым Z_1 (вертикальная прямая $R = 1$, фиг. 2, а), если его толщина кратна $\lambda/2$ ($\varphi_1 = n\pi$, фиг. 2, б).

При согласовании границ раздела большое значение имеет ширина полосы частот согласования по заданному уровню коэффициента прохождения. Поэтому представляет особый интерес зависимость ширины полосы пропускания границы раздела сред с комплексным входным импедансом от соотношения активной (R) и реактивной (X) компонент.

Квадрат модуля коэффициента отражения (коэффициент отражения по энергии) в случае применения одного слоя имеет вид

$$|V|^2 = \frac{[Z_1(1-R) - X \operatorname{tg} \varphi_1]^2 + [X - (Z_1^2 - R) \operatorname{tg} \varphi_1]^2}{[Z_1(1+R) - X \operatorname{tg} \varphi_1]^2 + [X + (Z_1^2 + R) \operatorname{tg} \varphi_1]^2}, \quad (11)$$

а коэффициент прохождения соответственно будет $|W|^2 = 1 - |V|^2$. Ширина полосы частот Δf по заданному уровню коэффициента прохождения определяется из условия

$$|W|^2 = a, \quad (12)$$

где a — значение уровня, а также из равенств (7) и (8). Выражение (12) в случае $a = 0,5$ приводится к следующему уравнению относительно $\operatorname{tg} \varphi_1$:

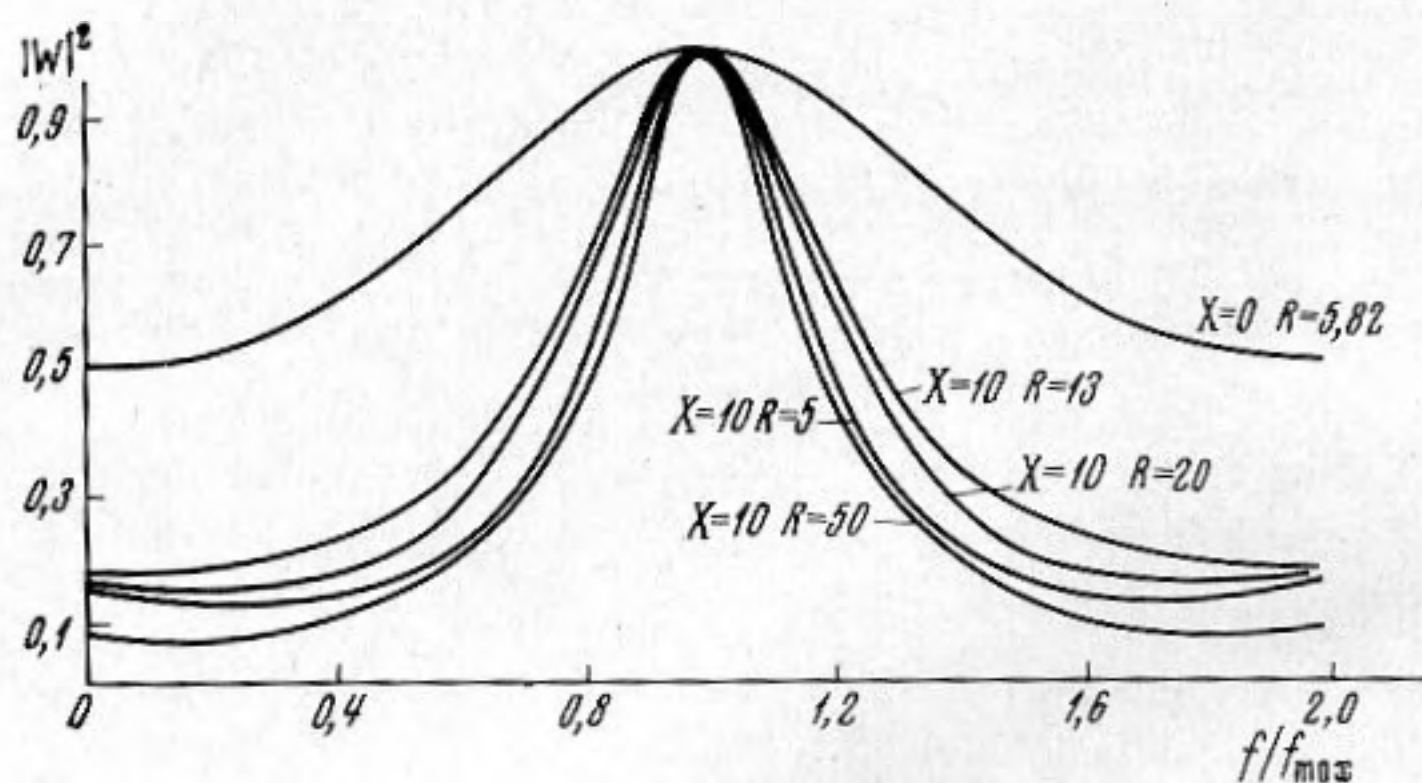
$$A \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + B \operatorname{tg} \varphi_1 + C = 0, \quad (13)$$

где $A = R^2 + X^2 + Z_1^2(Z_1^2 - 6R)$, $B = 2Z_1X(Z_1^2 - 1)$, $C = Z_1^2(1 - 6R + R^2 + X^2)$, откуда следует решение

$$\operatorname{tg}_{1,2} \varphi' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (14)$$

Принимая, согласно формуле (7) $\varphi_1 = 2\pi(l_1/c_1)f_1$ и согласно формуле (14) $\varphi_1' = 2\pi(l_1/c_1)(f_1 + \Delta f/2)$ и $\varphi_2' = 2\pi(l_1/c_1)(f_1 - \Delta f/2)$, можно получить $\Delta f/f_1 = (f_1' - f_2')/f_1$.

На фиг. 3 построено семейство кривых зависимости от R относительной полосы пропускания $\Delta f/f_1$ по уровню 0,5 для разных значений $|X|$.



Фиг. 5

Если задана величина X , то полоса пропускания при определенном R достигает максимума. Для $X = 2$ и $R = 5$ величина $\Delta f/f_1$ равна 2 или ∞ , так как минимумы частотной характеристики равны $|W|_{\min}^2 = 0,5$. Для $X = 0$ критическое значение R (при котором $\Delta f/f_1 = 2 \div \infty$) будет $R_{кр} = 5,82$. Очевидно, для значений X , заключенных между 0 и 2 ($0 < x < 2$) и $5 < R < 5,82$ может быть достигнута бесконечно большая полоса пропускания (по уровню 0,5), а для $X > 2$ значение $R_{кр}$ отсутствует. Следует отметить, что для заданной величины X существуют два значения R , при которых достигается одна и та же полоса.

На фиг. 4 представлены зависимости $\Delta f/f_1$ от отношения X/R при разных R . В случае $R = 5,82$ при $X/R = 0$ величина $\Delta f/f_1 = 2$. Для сравнения на этом же графике построена зависимость $\Delta f/f_1$ при одном фиксированном значении $X = 10$.

Частотные характеристики коэффициента прозрачности границы при $X = 10$ и разных R , а также при $X = 0$ и $R = 5,82$ построены на фиг. 5. В соответствии с графиками фиг. 3, в случае $R > R_{опт}$ и $R < R_{опт}$ (для $R_{опт}$ — полоса максимальна), частотные характеристики сужаются.

Таким образом, полное согласование среды с границей, имеющей комплексный входной импеданс, возможно даже с помощью одного слоя при любых значениях реактивной составляющей входного импеданца (X), если, однако, величина активной составляющей (R) больше единицы. Если же $R < 1$, то полное согласование при значениях X , удовлетворяющих неравенству $(R^2 + X^2)/R < Z_0 = 1$, невозможно.

Для любого значения X существует такое значение $R > 1$, при котором ширина полосы частот согласования по заданному уровню коэффициента прохождения энергии ($|w|^2$) — максимальна. С ростом R значения величин параметров согласующих слоев, а также полос согласования сближаются, что дает возможность в определенном диапазоне изменения R и X использовать один и тот же слой для согласования разных входных импеданцев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Д. Тартаковский. К теории распространения плоских волн через однородные слои. Докл. АН СССР, 1950, 71, 3, 465.
2. Б. Д. Тартаковский. Звуковые переходные слои. Докл. АН СССР, 1950, 75, 1, 29.
3. Д. Б. Дианов. Об излучении ультразвуковых волн через плоскопараллельные слои. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 31—37.
4. W. Fra y, F. D u n n. Ultrasonic intensity gain by composite transducers. J. Acoust. Soc. America, 1962, 34, 2, 188—192.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
25 июля 1968 г.
