

УДК 534.222

**О ФОРМИРОВАНИИ ОТРАЖЕННЫХ ВОЛН НА РАЗРЫВАХ
В ЗВУКОВОЙ ВОЛНЕ***О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов*

Рассмотрена задача о взаимодействии простой и ударной волн и о возникновении волны, отраженной от поверхности разрыва. Проведено исследование процесса распространения волны симметричного пилообразного профиля с учетом возникновения волн, отраженных от поверхности разрыва. При этом возникает постоянное течение от источника в направлении распространения волны, которое может быть интерпретировано как акустический ветер.

Многочисленные задачи нелинейной акустики, относящиеся к проблеме распространения и взаимодействия волн конечной амплитуды, рассматривались рядом авторов на основе уравнений второго приближения. Большинство этих работ отражено в монографии Зарембо и Красильникова [1]. Отметим, что в рамках второго приближения акустические волны конечной амплитуды остаются простыми и при наличии разрывов. Отраженных от поверхностей разрыва волн не возникает, а на самом разрыве выполняются надлежащие условия.

Известно, что при разложении в ряд гидродинамических соотношений, описывающих простые и слабые ударные волны, возникает отличие в малых членах третьего порядка малости. Это связано в первую очередь с тем, что простая волна изэнтропична, тогда как скачок энтропии в ударной волне является малой величиной третьего порядка малости. Однако и при изучении ударных волн в ряде случаев достаточно использовать механические соотношения на поверхностях разрывов, а энергетический баланс может быть подведен на основе получаемых решений [2].

Учет эффектов третьего порядка малости позволяет не только определить профиль и интенсивность волн, отраженных от поверхностей разрыва, но и установить факт существования постоянного течения в области распространения волны. Это, направленное от источника течение, имеет следующий порядок малости по сравнению с амплитудным значением гидродинамической скорости у излучателя звука и является течением в свободном звуковом поле. Приведенные в статье результаты в отличие от других работ [3, 4], посвященных акустическому ветру, соответствуют случаю больших чисел Рейнольдса, когда в звуковой волне формируются крутые ударные фронты.

Задача о формировании отраженных волн от разрыва в звуковой волне решается ниже на основе приближенного метода. При распространении звуковой волны конечной амплитуды возникающие разрывные профили рассматриваются как слабые ударные волны, с которыми взаимодействует падающая простая волна в области сжатия или в области разрежения. В первом случае простая волна догоняет поверхность разрыва, а во втором — поверхность разрыва настигает простую волну. В каждом элементарном взаимодействии простая волна может быть представлена малой величиной следующего порядка малости по сравнению с «амплитудой» разрыва. На фиг. 1 приведено качественное построение профиля плотности

звуковой волны, на котором тонкими линиями отмечены ступенеобразные простые волны, взаимодействующие с ударными фронтами.

Полная система уравнений в рассматриваемой задаче состоит из соотношений (1) — (9), нуждающихся в кратком пояснении. Уравнения (1) и (2) получены из механических условий на поверхности разрыва

$$\frac{v_1}{c_0} - \frac{v_2}{c_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{\gamma - 3}{4} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2 \right] +$$

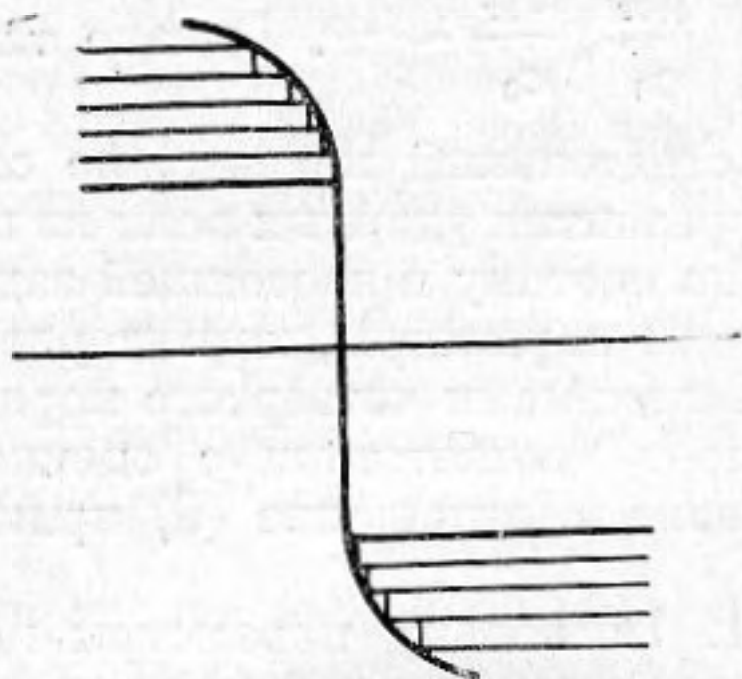
$$+ \frac{5\gamma^2 - 30\gamma + 61}{96} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^3 \right] - \frac{(\gamma + 1)^2}{32} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right), \quad (1)$$

$$\frac{v_1'}{c_0} - \frac{v_2'}{c_0} = \frac{\rho_1'}{\rho_0} - \frac{\rho_2'}{\rho_0} + \frac{\gamma - 3}{4} \left[\left(\frac{\rho_1'}{\rho_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho_2'}{\rho_0} \right)^2 \right] +$$

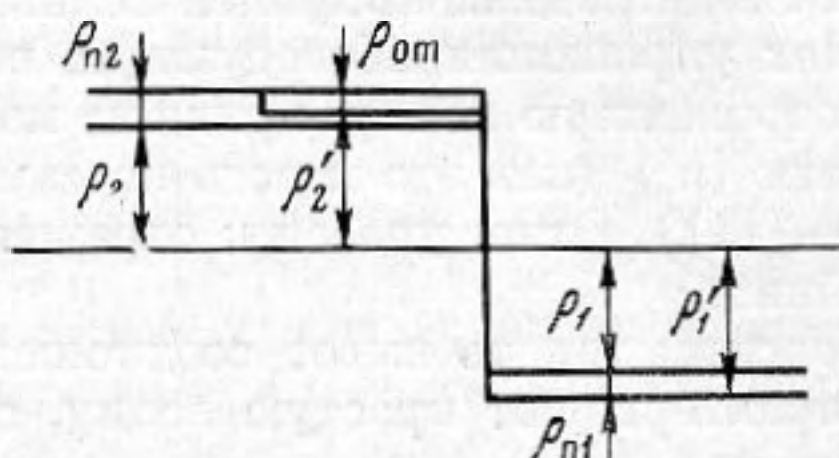
$$+ \frac{5\gamma^2 - 30\gamma + 61}{96} \left[\left(\frac{\rho_1'}{\rho_0} \right)^3 - \left(\frac{\rho_2'}{\rho_0} \right)^3 \right] - \frac{(\gamma + 1)^2}{32} \frac{\rho_1' \rho_2'}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho_1'}{\rho_0} - \frac{\rho_2'}{\rho_0} \right). \quad (2)$$

Здесь v и ρ соответственно гидродинамическая скорость и возмущение плотности среды, ρ_0 — равновесное значение плотности, c_0 — скорость звука, γ — показатель адиабаты в уравнении состояния $(P/P_0) = (\rho/\rho_0)^\gamma$.

Индексом 1 помечены величины, которые относятся к точке, находящейся непосредственно перед фронтом ударной волны, а индексом 2 — к точ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ке непосредственно за фронтом. Нештрихованные величины характеризуют волны до взаимодействия, штрихованные — после взаимодействия.

Соотношения (3) — (6), в которых $\rho_{п1}$ и $v_{п1}$ относятся к простой волне, распространяющейся по среде перед фронтом ударной волны, а $\rho_{п2}$ и $v_{п2}$ характеризуют простую волну, распространяющуюся за фронтом ударной волны, очевидны:

$$\rho_2' = \rho_2 + \rho_{п2} + \rho_{от}, \quad (3)$$

$$\rho_1' = \rho_1 + \rho_{п1}, \quad (4)$$

$$v_2' = v_2 + v_{п2} + v_{от}, \quad (5)$$

$$v_1' = v_1 + v_{п1}. \quad (6)$$

Соотношения (3) и (4) проиллюстрированы на фиг. 2. Соотношения (7) и (8), вывод которых будет пояснен ниже, описывают простые волны с учетом возмущений, вносимых в среду ударной волной.

$$\frac{v_{п2}}{c_0} = \frac{\rho_{п2}}{\rho_0} \left\{ 1 + \frac{\gamma - 3}{2} \frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\rho_{п2}}{\rho_0} + \frac{(\gamma - 3)(\gamma - 5)}{8} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2 \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{v_{п1}}{c_0} = \frac{\rho_{п1}}{\rho_0} \left\{ 1 + \frac{\gamma - 3}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\rho_{п1}}{\rho_0} + \frac{(\gamma - 3)(\gamma - 5)}{8} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 \right\}. \quad (8)$$

Напишем, наконец, связь плотности и скорости для отраженной волны:

$$(\rho_{от} / \rho_0) = -(v_{от} / c_0). \quad (9)$$

Знак минус здесь принят, поскольку отраженная волна распространяется в сторону, противоположную направлению распространения взаимодействующих простой и ударной волн.

Все величины, характеризующие ударную волну как до, так и после элементарного взаимодействия, являются малыми величинами первого порядка малости, т. е.

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}, \frac{\rho_2}{\rho_0}, \frac{\rho_1'}{\rho_0}, \frac{\rho_2'}{\rho_0}, \frac{v_1}{c_0}, \frac{v_2}{c_0}, \frac{v_1'}{c_0}, \frac{v_2'}{c_0} \sim \mu. \quad (10)$$

Параметры, характеризующие простые падающие волны, являются малыми величинами второго порядка малости, т. е.

$$\frac{\rho_{п1}}{\rho_0}, \frac{\rho_{п2}}{\rho_0}, \frac{v_{п1}}{c_0}, \frac{v_{п2}}{c_0} \sim \mu^2. \quad (11)$$

Как нетрудно показать на примере более простой задачи, отраженная волна определяется выражением, включающим разность кубов взаимодействующих волн. Поэтому, если взаимодействующие волны являются величинами одного порядка малости ($\sim \mu$), то $\frac{\rho_{от}}{\rho_0}, \frac{v_{от}}{c_0} \sim \mu^3$. Однако такой

подход, возможно и представляющий самостоятельный интерес, не соответствует физике процесса формирования и развития ударных волн из первоначально гладких профилей волны. Именно поэтому в настоящей задаче в целях упрощения последующих вычислений параметры, характеризующие отраженную волну, приняты малыми величинами четвертого порядка малости (μ^4) (как это и есть на самом деле в соответствии с оценками (10) — (11)). Относящееся к отраженной волне соотношение (9) принято линейным.

Поясним теперь вывод соотношения (7). Поскольку параметры $v_{п2}$ и $\rho_{п2}$ характеризуют простую волну, связь между ними определяется соотношением

$$\frac{v_{п2}}{c_0^*} = \frac{\rho_{п2}}{\rho_0^*} \left[1 + \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\rho_{п2}}{\rho_0^*} \right], \quad (12)$$

где c_0^* и ρ_0^* — характеристики среды, возмущенной ударной волной, а именно:

$$\rho_0^* = \rho_0 + \rho_2 \quad \text{и} \quad c_0^{*2} = \gamma \frac{P(\rho_0^*)}{\rho_0^*}. \quad (13)$$

Подставляя соотношения (13) в формулу (12) и пренебрегая малыми членами $\sim \mu^5$ и выше, получим соотношение (7). Вывод формулы (8) проводится совершенно аналогично.

В качестве пояснения заметим также, что хотя на первый взгляд формально в соотношениях (1) и (2) удержаны только малые члены третьего порядка малости, но структура этих соотношений такова, что при последующих преобразованиях учтенные в них порядки малости повышаются, так что удержание последующих членов разложения оказывается излишним.

Обратимся непосредственно к решению уравнений (1) — (9), считая заданными следующие величины, характеризующие единичное элементарное взаимодействие: $\rho_{п1}$, $\rho_{п2}$, ρ_1 и ρ_2 . Для определения параметров отраженной и результирующей волн $\rho_{от}$, ρ_1' и ρ_2' вычтем соотношение (5) из соотношения (16) и с помощью уравнений (1), (2), (7), (9) получим выражение, в которое не входят гидродинамические скорости взаимодействующих волн. Затем с помощью уравнений (3) и (4) исключим парамет-

ры ρ_1' и ρ_2' . При всех преобразованиях опускаются малые члены, порядок которых μ^5 и выше. Окончательно для отраженной волны получается выражение:

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left(\frac{\rho_{п1}}{\rho_0} - \frac{\rho_{п2}}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2, \quad (14)$$

из которого нетрудно видеть, что последняя действительно является малой величиной четвертого порядка малости по сравнению с ударной волной. Из уравнения (3), (4) и (14) найдем

$$\frac{\rho_2'}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{\rho_{п2}}{\rho_0} + \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left(\frac{\rho_{п1}}{\rho_0} - \frac{\rho_{п2}}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^2, \quad (15)$$

$$(\rho_1' / \rho_0) = (\rho_1 / \rho_0) + (\rho_{п1} / \rho_0). \quad (16)$$

Выражения (14) — (16) полностью описывают задачу об элементарном взаимодействии в принятых предположениях о порядках малости величин. Обращаясь теперь к более сложной задаче — о взаимодействиях простых волн произвольной формы с ударной волной, когда параметры, описывающие эти волны, являются малыми величинами одинакового порядка малости ($\sim \mu$), следует вернуться к фиг. 1. Взаимодействие волн одинакового порядка малости сводится к предыдущей задаче, если простую волну первого порядка малости разбить на ряд «ступенек» второго порядка малости [5]. Математически это означает, что соотношениям (15) и (16) ставится в соответствие следующая система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left\{ \begin{aligned} d\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right) &= d\left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0}\right) + \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left[d\left(\frac{\rho_{п1}}{\rho_0}\right) - d\left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0}\right) \right] \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^2, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} d\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) &= d\left(\frac{\rho_{п1}}{\rho_0}\right). \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Уравнение (18) интегрируется независимо. Подставляя его решение в уравнение (17), получим

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right) &= d\left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0}\right) \left[1 - \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^2 \right] + \\ &+ \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^2 d\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение (19) представляет собой уравнение Пфаффа. Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{8}{\gamma + 1} \operatorname{th} \frac{\gamma + 1}{8} \left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right). \quad (20)$$

Чтобы вычислить отраженную волну, заменим соотношение (14) дифференциальным уравнением:

$$d\left(\frac{\rho_{от}}{\rho_0}\right) = \frac{(\gamma + 1)^2}{64} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^2 \left[d\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) - d\left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0}\right) \right], \quad (21)$$

которое с помощью формулы (20) преобразуется к виду:

$$d\left(\frac{\rho_{от}}{\rho_0}\right) = \operatorname{th}^2 \frac{\gamma + 1}{8} \left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \left[d\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) - d\left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0}\right) \right]. \quad (22)$$

Интегрирование уравнения (22) показывает, что отраженная волна имеет вид

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = \frac{8}{\gamma + 1} \operatorname{th} \frac{\gamma + 1}{8} \left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) - \left(\frac{\rho_{п2}}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right). \quad (23)$$

В формуле (23) можно заменить значение $\rho_{п2}$ значением ρ_2 , поскольку интегральная падающая волна и ударная волна физически представляет собой одно и то же явление. Разлагая в соотношении (23) гиперболический тангенс по малому аргументу, получим формулу:

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = - \frac{(\gamma + 1)^2}{192} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^3, \quad (24)$$

позволяющую вычислить отраженную волну по известной величине «амплитуды» разрыва.

На основе формулы (24) могут быть решены задачи о распространении волн конечной амплитуды различных профилей при условии, что волны достаточно интенсивны и пренебрежение эффектами высших порядков не правомерно. Ниже будет одновременно показано, что хотя отраженная волна и пропорциональна кубу «амплитуды» разрыва, при распространении возмущения в нелинейной среде эффект накопления отражений приводит к интегральному увеличению отраженного «течения» на порядок.

Итак, пусть на входе системы $x = 0$ задается волна в виде симметричной пики, как это показано на фиг. 3. Разрыв в такой волне формируется при значении безразмерного параметра $Z = \alpha \omega x v_0$, где v_0 пиковое значение гидродинамической скорости, $\alpha = (\gamma + 1) / 2c_0^2$, ω — частота и x — расстояние от входа системы [6]. Фронт отраженной волны формируется при $Z = 1$. С помощью формулы (24), в которой перейдем от параметра ρ к параметру v , с учетом убывания пикового значения волны при распространении в среде, найдем волну, отраженную от одной поверхности разрыва:

$$\frac{v_{от}}{c_0} = - \frac{(\gamma + 1)^2}{24} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^3 \frac{1}{Z^3}. \quad (25)$$

Параметр $Z \geq 1$ характеризует положение разрыва, формирующего отраженную волну.

При расчете полной отраженной волны необходимо просуммировать волны, отраженные от всех поверхностей разрыва. Поскольку ударные фронты возникают только при значении параметра $Z = 1$ и образующиеся отраженные волны разрежения распространяются к излучателю (последний следует считать полностью проницаемым), передние фронты отраженных волн для каждого периода возмущений имеют место только в области $Z \leq 1$. В области значения параметра $Z \geq 1$ отраженная волна асимптотически стремится к нулю. Для наглядности эти рассуждения проиллюстрированы на фиг. 4, где отраженные волны ($\rho_{от} / \rho_0$) представлены в зависимости от параметра Z для следующих друг за другом периодических возмущений. Стрелкой указано направление распространения отраженных волн, так что первая из представленных на фиг. 4 отраженных «ступенек» соответствует тому периоду возмущений, который раньше достиг значения параметра $Z = 1$. Участок распространения волны от $Z = 0$ до $Z = 1$, таким образом, все время «питается» новыми и новыми отражениями от поверхностей разрыва, что создает область разрежения вблизи излучателя, которая остается постоянной до координаты x , соответствующей значению параметра $Z = 1$ и асимптотически спадающей на бесконечности. Отраженная волна на участке $Z < 1$ периодична с тем же периодом, что и исходная пилообразная волна. Это позволяет просуммировать отражен-

ные волны, так что полное течение может быть представлено в виде ряда:

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = - \frac{(\gamma + 1)^2}{24} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[Z + (\gamma + 1) \frac{v_0}{c_0} n \right]^3}. \quad (26)$$

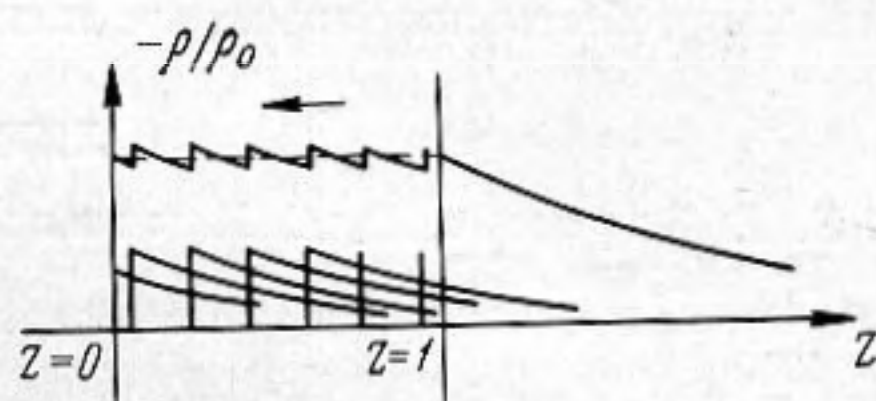
Заменяя выражение (26) интегралом, поскольку при n стоит малый параметр $(v_0/c_0) \sim \mu$, получим

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = - \frac{\gamma + 1}{48} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2}. \quad (27)$$

Учитывая, что формула (27) остается справедливой в области асимптотического спада отраженных волн (область значения параметра $Z \geq 1$), покажем, что при значении параметра $Z \leq 1$ суммирование элементарных



Фиг. 3



Фиг. 4

отраженных волн приводит к постоянному значению $\rho_{от}/\rho_0$ в точности совпадающему со значением $\rho_{от}/\rho_0$, если в формуле (27) положить $Z = 1$. Иными словами, произведем «сшивание» решений для двух областей течений, отмеченных на фиг. 4. Для этого возьмем интеграл по Z от выражения (27) в пределах одного периода элементарной отраженной волны, т. е. от нуля до $\frac{\pi}{2} (\gamma + 1) \frac{v_0}{c_0}$. Такое интегрирование дает значение по-

стоянной составляющей на участке $Z \leq 1$. Постоянная составляющая, как легко видеть, будет

$$\frac{\rho_{от}}{\rho_0} = - \frac{(\gamma + 1)}{48} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 \quad (28)$$

и, как уже отмечалось, в точности совпадает с выражением (27) при значении параметра $Z = 1$.

Задача, таким образом, полностью решена. Проведем краткую дискуссию результатов. Учет эффектов третьего порядка малости позволил аналитически установить формирование постоянного течения в области распространения периодической волны конечной амплитуды. Приведенные расчеты показали, что в силу эффекта накопления возмущений эти поправки оказались малыми величинами второго порядка малости. Распространение волн конечной амплитуды, таким образом, сопровождается постоянным течением, известным в акустике как акустический ветер или как насосное действие источника. Поскольку решалась одномерная задача, то в расчеты не вошли циркуляционные эффекты, которые обычно привлекаются к объяснению механизма возникновения акустического ветра. Установленный в настоящей работе факт возникновения отраженных от поверхностей разрыва волн разрежения, распространяющихся по направлению к источнику излучения, потребовал введения в целях математической строгости предположения об абсолютной проницаемости источника и условия излучения на отрицательной бесконечности. Разумеется, область разрежения, возникающая в звуковом луче, заполняется окружающими частицами среды, что может вызывать в пограничном слое определенные турбулентные эффекты, однако подобная постановка проблемы выходит за рамки рассмотренной задачи. Отметим еще раз, что в области от излуча-

теля до координаты стабилизации течение постоянно, а при значении $Z > 1$ асимптотически стремится к нулю, сохраняя свое направление от излучателя к приемнику. Определяя скорость этого течения как скорость акустического ветра v_B , имеем

$$\frac{v_B}{c_0} = \begin{cases} \frac{\gamma + 1}{48} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 & \text{при } 0 \leq Z \leq 1 \\ \frac{\gamma + 1}{48} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} & \text{при } Z \geq 1. \end{cases} \quad (29)$$

Полученные результаты могут быть применены при изучении пространственно симметричных течений, формирования разрывов от возмущений других профилей (например, одиночный импульс и так далее). Они могут быть использованы и при изучении магнитозвуковых волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Р. Курант, К. Фридрихс. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
3. С. Ескарт. Vortices and streams caused by sound waves. *Rhys. Rev.*, 1948, 73, 68—76.
4. К. А. Наугольных. К вопросу о потоках, вызванных звуком. Докл. АН СССР, 1958, 123, 1003—1005.
5. И. Г. Катаев. Ударные электромагнитные волны. М., «Сов. радио», 1963.
6. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. *Вестн. МГУ*, 1961, 3, 3, 52—61.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
7 октября 1968 г.