

УДК 534.26

ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВОГО ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ ПЛАСТИНУ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ

Л. Е. Шейнман, Е. Л. Шендеров

Получены выражения для прямоугольного звукового импульса, прошедшего через тонкую упругую пластину. Учтены антисимметричные и симметричные колебания пластин на основе формул Л. М. Лямшева. Рассмотрена волна (предвестник), которая возникает при наклонном падении и обгоняет исходный звуковой импульс. Показано, что эта волна имеет частоту, равную частоте резонанса совпадений для изгибных волн при данном угле падения. Проанализированы особенности, возникающие при использовании формул для коэффициентов отражения и прохождения звука для тонких пластин.

Процесс прохождения звукового импульса через пластину при нормальном падении можно сравнить с процессом прохождения импульса электрического напряжения через линейные фильтры. Спектр импульса, прошедшего через фильтр, определяется произведением спектра исходного импульса и частотной характеристики фильтра. Известно, что через фильтр проходят практически без искажений видеоимпульсы длительностью $T > 1/f_1$, где f_1 — верхняя граничная частота фильтра. Таким образом, можно утверждать, что пластина, имеющая достаточно равномерную частотную характеристику коэффициента прохождения звука в диапазоне частот $f < f_1$, будет без существенных искажений пропускать импульсы длительностью $T > 1/f_1$. Аналогичный вывод можно сделать и для импульсов с высокочастотным заполнением. Спектр импульса длительностью T с заполнением колебаниями с частотой f_0 сосредоточен в основном в полосе $f_0 \pm \Delta f$, где $\Delta f \approx 1/T$. Поэтому пластина с равномерной частотной характеристикой в полосе $f_0 \pm \Delta f$ будет пропускать эти импульсы практически без искажений.

При наклонном падении возникают более сложные явления, связанные с наличием симметричных и антисимметричных волн, распространяющихся вдоль пластины. В работах [1, 2] показана возможность возникновения «предвестника», т. е. колебаний, опережающих приход в точку наблюдения основного импульса, что наблюдается только при наклонном падении. Однако амплитуды волн не были определены в силу аналитических трудностей, связанных с вычислениями интегралов Фурье для пластин произвольной толщины.

Ниже рассмотрено прохождение звукового импульса через тонкую пластину с учетом симметричных и антисимметричных колебаний. Предположим, что на пластину падает звуковая волна (фиг. 1) вида

$$f_0(t') = \begin{cases} 0 & \text{при } t' < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < t' < T \\ 0 & \text{при } t' > T, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$t' = t - \frac{1}{c} (x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Решение будем искать в виде

$$f(t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega) B(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega, \quad (2)$$

где $B(\omega)$ — коэффициент прохождения звука для монохроматической волны с круговой частотой ω , $F_0(\omega)$ — спектр импульса $f_0(t')$. Зависимость от времени принята в виде $e^{-i\omega t}$. Для прямоугольного импульса

$$F_0(\omega) = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega T} - 1). \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в формулу (2), находим

$$f(t') = f_1(t') + f_2(t'),$$

где

$$f_1(t') = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} e^{i\omega(T-t')} d\omega, \quad (4)$$

$$f_2(t') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} e^{-i\omega t'} d\omega. \quad (5)$$

В качестве функции $B(\omega)$ возьмем выражение для коэффициента прохождения звука через тонкую пластину с учетом изгибных (антисимметричных) колебаний и поперечных (симметричных) колебаний сжатия, полученное в работе [3].

$$B(\omega) = \frac{2Z_0(Z_1 - Z)}{(Z_1 + 2Z_0)(Z + 2Z_0)}, \quad (6)$$

где

$$Z_0 = \frac{\rho c}{\cos \theta}, \quad Z = -i\omega M \left(1 - \frac{c_{\text{из}}^4}{c^4} \sin^4 \theta \right),$$

$$Z_1 = -\frac{i4E_1}{\omega h} \psi(\theta), \quad \psi(\theta) = \frac{1 - \frac{c_1^2}{c^2} \sin^2 \theta}{1 - \sigma_1^2 - \frac{c_1^2}{c^2} \sin^2 \theta},$$

Z и Z_1 — соответственно импедансы изгибных колебаний и поперечных колебаний сжатия пластины, ρc — волновое сопротивление среды, M — масса единицы площади пластины, $c_{\text{из}}$ — скорость волн изгиба, h — толщина пластины, $E_1 = E / (1 - \sigma^2)$ — модуль упругости для тонкой пластины, $c = \sqrt{E_1 / \rho_l}$ — скорость поперечных волн сжатия, ρ_l — плотность материала.

Определим полюса подынтегрального выражения. Знаменатель $B(\omega)$ обращается в нуль при $Z = -2Z_0$ и при $Z_1 = -2Z_0$. При $Z = -2Z_0$ мы получаем уравнение:

$$\Omega^3 + \omega_c^2 \Omega + \frac{2Z_0}{M} \omega_c^2 = 0, \quad (7)$$

где $\Omega = -i\omega$, $\omega_c = \frac{\omega_{\text{кр}}}{\sin^2 \theta}$, $\omega_{\text{кр}} = c^2 \sqrt{\frac{12M}{E_1 h^3}}$ $\omega_{\text{кр}}$ — критическая угло-

вая частота, при которой скорость волн изгиба в пластине совпадает со скоростью звука в среде. Уравнение (7) имеет один вещественный корень и два комплексно-сопряженных. Для реальных пластин выполняется ус-

ловие $\omega_c \gg Z_0/M$. Из уравнения (7) находим полюса, соответствующие изгибным волнам:

$$\omega_1 \approx -\frac{2iZ_0}{M}, \quad (8)$$

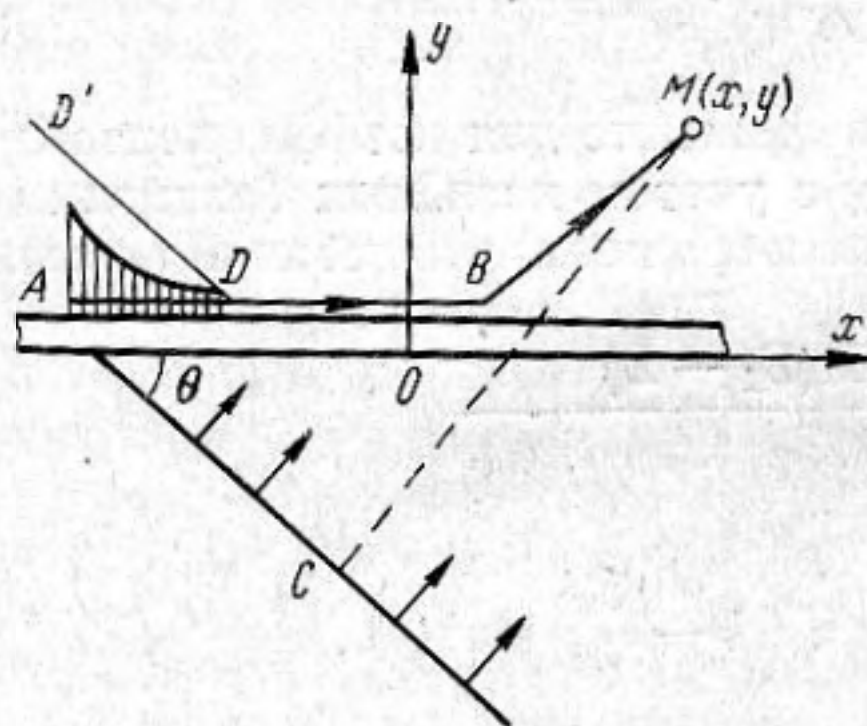
$$\omega_{2,3} \approx \pm \omega_c + i \frac{Z_0}{M}. \quad (9)$$

Для поперечных волн сжатия полюс определим из выражения $Z_1 = -2Z_0$

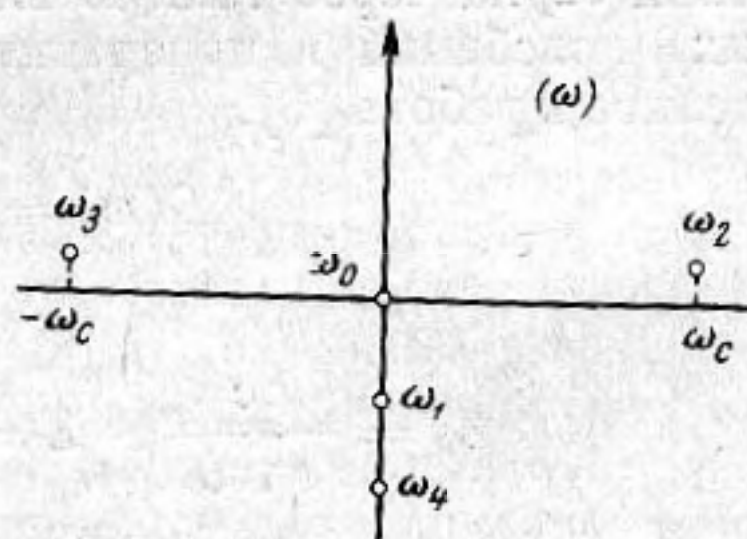
$$\omega_4 = -\frac{2iE_1}{Z_0 h} \cdot \psi(\theta). \quad (10)$$

Полюс ω_4 лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω при $\theta_1 < \theta < \theta_2$, где $\theta_1 = \arcsin \frac{c}{c_1} \sqrt{1 - \sigma_1^2}$, $\theta_2 = \arcsin c/c_1$. При θ , лежащем вне этого диапазона углов, он лежит в нижней полуплоскости. Кроме указанных полюсов подынтегральное выражение имеет еще полюс $\omega_0 = 0$. Расположение полюсов для случая θ , лежащего вне интервала (θ_1, θ_2) , показано на фиг. 2.

Расположение полюсов для случая θ , лежащего вне интервала (θ_1, θ_2) , показано на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

При $t' < T$ показатель экспоненты в формуле (3) является положительным и, следовательно, контур интегрирования должен быть замкнут в верхней полуплоскости. Учитывая вычеты в полюсах ω_2, ω_3 , получим

$$f_1(t') = \frac{2Z_0}{\omega_c M} e^{\frac{Z_0}{M}(t'-T)} \sin[\omega_c(t'-T)]. \quad (11)$$

При $t' > T$ путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости и следует учесть вычеты в полюсах $\omega_1, \omega_4, \omega_0$. Для вычисления функции $f_2(t')$ при $t' < 0$ также необходимо использовать вычеты в полюсах ω_2, ω_3 , а при $t' > 0$ — в полюсах $\omega_1, \omega_4, \omega_0$. В результате получаем при $t' < 0$, т. е. до прихода в точку наблюдения переднего фронта основного импульса

$$f(t') = \frac{2Z_0}{\omega_c M} e^{\frac{Z_0}{M}(t'-T)} \left(e^{-\frac{Z_0 T}{M}} - 1 \right) \sin[\omega_c(t'-T)]. \quad (12)$$

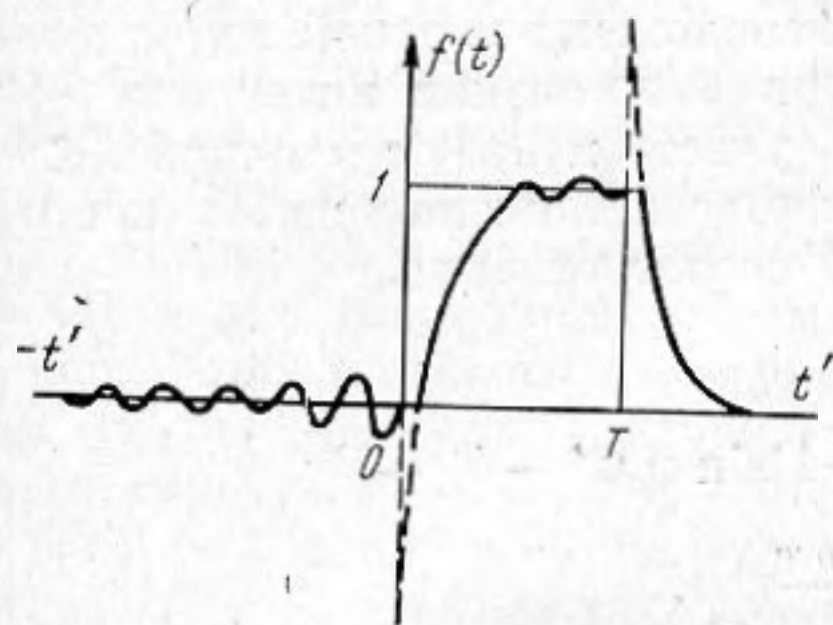
При $0 < t' < T$, т. е. в течение времени T

$$f(t') = 1 - \frac{1}{1 + \frac{c_1^2 \rho^2 \sin^4 \theta}{c^2 \rho_l^2 \cos^2 \theta}} e^{-\frac{2Z_0 t'}{M}} \cdot e^{-\frac{2E_1 \psi(\theta)}{Z_0 h} t'} + \frac{2Z_0}{\omega_c M} e^{\frac{Z_0}{M}(t'-T)} \sin[\omega_c(t'-T)]. \quad (13)$$

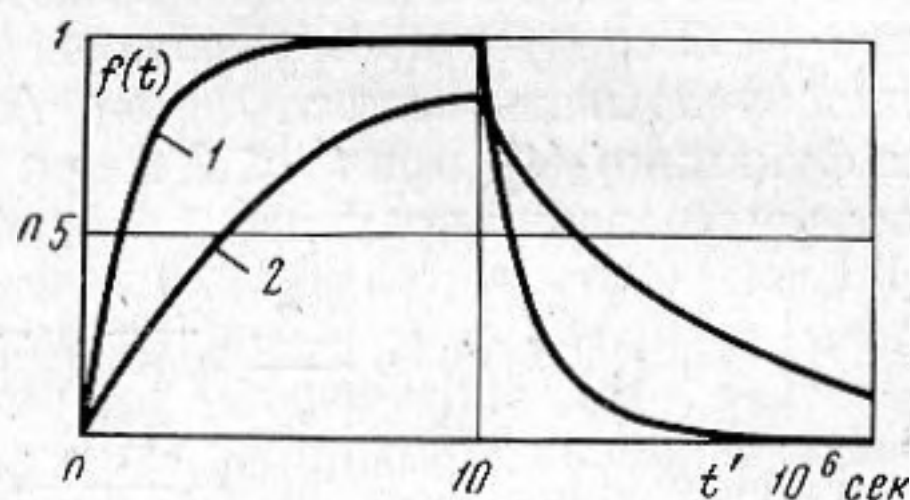
При $t' > T$, т. е. после прохождения заднего фронта основного импульса

$$f(t') = \frac{1}{1 + \frac{c_1^2 \rho^2 \sin^4 \theta}{c^2 \rho_l^2 \cos^2 \theta}} e^{-2Z_0 t'/M} (e^{2Z_0 T/M} - 1) + e^{-2E_1 \psi(\theta) t'/Z_0 h} (e^{2E_1 \psi(\theta) T/Z_0 h} - 1). \quad (14)$$

Проанализируем полученное решение. Из формулы (12) следует, что еще до момента $t' = 0$ в точку наблюдения приходит волна с частотой ω_c и с амплитудой, возрастающей с течением времени. Характер импульса показан на фиг. 3. Появление этой волны объясняется следующим образом. Распространение изгибных волн в пластине сопровождается дисперсией и $c_{ги}$ пропорциональна $\sqrt{\omega}$. Начиная с частоты $\omega_{кр}$, скорость изгибных волн становится больше скорости звука в воде. Скорость следа импульса на пластине равна $c / \sin \theta$. Если скорость волн изгиба подчиняется условию $c_{ги} > c / \sin \theta$, то изгибная волна, которая возбуждается в пластине при движении импульса вдоль пластины, обгоняет след импульса (фиг. 1). Волна в среде, которая возбуждается изгибными колебаниями пластины, достигает точки наблюдения по пути ABM (на участке AB — на пластине,



Фиг. 3



Фиг. 4

на участке BM — в среде). При этом время распространения по пути ABM оказывается меньше времени распространения по геометрически кратчайшему пути CM . Поэтому существует волна, достигающая точки M до прихода импульса по кратчайшему пути. Следовательно, при $t' < 0$ давление $f(t') \neq 0$ и наблюдается предвестник.

Амплитуда волны, согласно выражению (12), экспоненциально нарастает с увеличением времени. При этом максимальное значение амплитуды наблюдается в момент $t' = 0$, т. е. в момент прихода в точку M основного импульса. Учитывая неравенство $\omega_c \gg Z_0 / M$, получаем, что амплитуда волны мала по сравнению с амплитудой основного импульса. При уменьшении угла падения амплитуда стремится к нулю.

Распределение амплитуды вдоль оси x в некоторый фиксированный момент времени приведено на фиг. 1 (заштрихованная эюра). Линия равных амплитуд представляет собой прямую DD' , параллельную фронту падающей волны. По мере приближения точки A к точке M заштрихованная эюра движется вправо и амплитуда волны в точке M экспоненциально нарастает.

Заметим, что частота волны, согласно выражению (12), равна частоте, на которой для данного угла падения имеет место резонанс совпадений, т. е. выполняется условие $\sin \theta = c / c_{ги}$. Подставляя в это условие зна-

чение $c_{ги}$, находим $\omega_c = \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{E_1 h^3}{12M}} = \frac{\omega_{кр}}{\sin^2 \theta}$. В частотной характери-

стике при данном угле наблюдается резонансный выброс и пластина отфильтровывает частоту ω_c , соответствующую частоте максимального прохождения звука. Существование этой волны экспериментально доказано в работе [2].

В связи с тем что амплитуда предвестника зависит от $\sin^2 \theta$, а $\frac{2Z_0}{\omega_c M} \ll 1$,

то предвестник наиболее значительно проявляется при больших углах θ . Следует заметить, что при малых θ выражение (12) является несправедливым, и им можно пользоваться только до таких величин $\omega_c = \omega_{кр} / \sin^2 \theta$, для которых справедлива теория тонких пластин.

Рассмотрим теперь выражение (13), определяющее форму кривой давления в моменты времени, соответствующие прохождению исходного импульса через точку наблюдения. Первое слагаемое определяет исходный импульс. Второе и третье слагаемое обусловлены переходными процессами, причем второе связано с антисимметричными, а третье — с симметричными движениями пластины. Четвертое слагаемое имеет тот же смысл, что и в формуле (12). После прохождения заднего фронта основного импульса ($t' > T$), как следует из формулы (14), остаются лишь переходные процессы, связанные с симметричными и антисимметричными движениями пластины, затухающие при $t' \rightarrow \infty$.

В промежутке $\theta_1 > \theta > \theta_2$ полюс ω_4 расположен в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω . Поэтому при вычислении интеграла $f_2(t')$ при $t' < 0$ следует кроме полюсов ω_2, ω_3 , учесть и полюс ω_4 ; при $t' > 0$ нужно учитывать полюса ω_0, ω_1 . Аналогичное положение имеет место и для функции $f_1(t')$ при $t' < T$ и при $t' > T$ соответственно. После вычисления получим

$$f(t') = \frac{2Z_0}{\omega_c M} e^{\frac{Z_0 t'}{M}} (e^{-\frac{Z_0 T}{M}} - 1) \sin \omega_c (t' - T) - e^{-\frac{2E_1 \psi(\theta) t'}{Z_0 h}} (e^{\frac{2E_1 \psi(\theta) T}{Z_0 h}} - 1).$$

$$f(t') = 1 - \frac{1}{1 + \frac{c_1^2 \rho^2 \sin^4 \theta}{c^2 \rho_l^2 \cos^2 \theta}} e^{-2Z_0 t'/M} + e^{-2E_1 \psi(\theta) t'/Z_0 h} (e^{2E_1 \psi(\theta) T/Z_0 h} - 1) + \frac{2Z_0}{\omega_c M} e^{Z_0 t'/M} (e^{-Z_0 T/M} - 1) \sin \omega_c (t' - T).$$

$$f(t') = \frac{1}{1 + \frac{c_1^2 \rho^2 \sin^4 \theta}{c^2 \rho_l^2 \cos^2 \theta}} \cdot e^{-2Z_0 t'/M} \cdot (e^{2Z_0 T/M} - 1).$$

При $t' < 0$ второе слагаемое функции $f(t')$ содержит экспоненциальный множитель, который при $\psi(\theta) < 0$ нарастает с увеличением t' . Поэтому в период $t' < 0$, предшествующий приходу основного импульса, к синусоидальному колебанию добавляется еще экспоненциально нарастающее давление. Из формул (12), (13) можно получить переходные функции для тонкой пластины, возбуждаемой единичным импульсом вида

$$f_e(t') = \begin{cases} 1 & \text{при } t' > 0, \\ 0 & \text{при } t' < 0. \end{cases} \quad (15)$$

В этом случае спектр имеет вид

$$F_e(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}} \quad (16)$$

и вместо формул (12), (13) мы получаем при $t' < 0$

$$f(t') = -\frac{2Z_0}{\omega_c M} e^{Z_0 t'/M} \sin \omega_c t', \quad (17)$$

при $t' > 0$

$$f(t') = 1 - \frac{1}{1 + \frac{c_1^2 \rho^2 \sin^4 \theta}{c^2 \rho_l^2 \cos^2 \theta}} e^{-2Z_0 t'/M} - e^{-2E_1 \Phi(\theta) t'/Z_0 h}. \quad (18)$$

Формулы, аналогичные (17), (18), можно получить и для промежутка $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Используя переходные функции (17), (18), с помощью интеграла Дюамеля можно вычислить форму прошедшего импульса, если на пластину падает импульс давления произвольной формы. Для прямоугольного импульса в частном случае, при нормальном падении, получаем при $t' < 0$

$$f(t') = 0, \quad (19)$$

при $0 < t' < T$

$$f(t') = 1 - e^{-2Z_0 t'/M} - e^{-2E_1 t'/Z_0 h(1-\sigma_1^2)}, \quad (20)$$

при $t' > T$

$$f(t') = (e^{2Z_0 T/M} - 1) e^{-2Z_0 t'/M} + (e^{2E_1 T/Z_0 h(1-\sigma_1^2)} - 1) \cdot e^{-2E_1 t'/Z_0 h(1-\sigma_1^2)}. \quad (21)$$

Здесь $t' = t - y/c$.

На фиг. 4 приведены результаты формы импульса, прошедшего через стальную пластину толщиной 0,05 см (кривая 1) и 0,2 см (кривая 2) при $T = 10$ мксек. На фиг. 5 показана форма импульса для пластмассовой пластины толщиной 1 см при $E = 10^{10}$ гсм/сек²; $\sigma = 0,4$; $\rho_l = 1,2$ г/см³; $T = 20$ мксек. Появление резких выбросов в начале и в конце импульса (на фиг. 5 они показаны пунктиром, на фиг. 4 из-за весьма малой их ширины они не показаны) объясняется приближенным характером расчета, основывающегося на теории тонких пластин. Из формулы (16) следует, что $f(t') = 1$ при $t' = 0$; таким образом, по приближенной теории получается, что в начале импульса должен наблюдаться отрицательный скачок давления, т. е. импульс разряжения.

Чтобы пояснить появление выбросов в принятой схеме расчета, заметим, что при симметричных движениях пластины в момент, когда передний фронт импульса сжатия касается нижней поверхности пластины ($y = -h/2$), верхняя поверхность ($y = h/2$) начинает двигаться навстречу нижней поверхности, т. е. в сторону отрицательных значений y (поскольку время распространения импульса в самой пластине в принятом приближении не учитывается). Поэтому в первый момент времени в верхнем полупространстве образуется волна разряжения. В конце импульса напряжение, сжимающее пластину, скачком уменьшается до нуля и пластинка стремится восстановить прежнюю толщину. Верхняя поверхность при этом движется в сторону положительных значений y , что сопровождается вторым выбросом в конце импульса. Однако из простых соображений, приведенных ниже, следует, что при прохождении импульса сжатия через пластину произвольной толщины прошедший импульс также должен представлять собой импульс сжатия. При точном расчете с учетом конечного времени прохождения импульса через пластину и многократных отражений внутри пластины, выбросы не возникают.

Формула (6), определяющая коэффициент прохождения звука, дает достаточно хорошее приближение лишь в ограниченном диапазоне частот. Тем не менее при использовании интегрального преобразования Фурье (2) интегрирование по частоте производилось в бесконечных пределах и, таким образом, формула (6) использовалась при очень высоких частотах.

Для того чтобы получить количественный критерий применимости формул, заметим, что наибольшая часть энергии импульса длительностью T заключена в области частот $\omega < \omega^{(1)}_{\max} = 2\pi/T$. Формула (6) справед-

лива для пластины при выполнении условия $h \ll \lambda_{\text{из}}$ для изгибных волн и условия $h \ll \lambda_1$ для продольных волн, где $\lambda_{\text{из}}$ и λ_1 — соответственно длины изгибных и поперечных волн сжатия в пластине. Эти условия можно переписать в виде

$$\omega \ll \frac{2\pi^2}{h\sqrt{3}} \sqrt{E_1/\rho_l}; \quad \omega \ll \frac{2\pi}{h} \sqrt{E_1/\rho_l}.$$

Более жестким является второе условие. Полагая для определенности, что ω должно быть в 2π раз меньше, чем $\frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_l}}$, получим $\omega_{\text{max}}^{(2)} = \frac{1}{h} \times$

$$\sqrt{\frac{E_1}{\rho_l}} \approx \frac{1}{\tau_0}, \quad \text{где } \tau_0 = h/c_l \text{ время пробега импульса на толщине пластины,}$$

c_l — скорость продольных волн в материале. Критерий применимости приближенной теории имеет вид неравенства $\omega_{\text{max}}^{(2)} > \omega_{\text{max}}^{(1)}$, т.е. главная часть спектра должна укладываться в диапазоне частот, при которых справедлива формула (6). Таким образом, мы получаем условие $T > 2\pi\tau_0$; при его выполнении неточное представление подынтегральной функции не должно существенно сказываться на результате вычисления интеграла. При соблюдении указанного неравенства значение интеграла (2) определяется вычетами в полюсах, расположенных на комплексной плоскости ω в области сравнительно небольших значений $|\omega|$, для которых приближенная формула (6) дает удовлетворительную точность. При больших значениях ω функция $\left| \frac{B(\omega)}{\omega} \right| \rightarrow 0$ и высокочастотные области не дают

существенного вклада в конечный результат.

Отсутствие выбросов в начале и в конце импульса можно показать, рассмотрев процесс прохождения импульса через пластину произвольной толщины при нормальном падении волны. При нормальном падении коэффициент прохождения звука через пластину не отличается от коэффициента прохождения через жидкий слой. Определив полюса выражения для коэффициента прохождения и используя спектральный метод, можно рассчитать форму прошедшего импульса. Однако в данном случае нагляднее непосредственно рассмотреть последовательные отражения импульса от обеих сторон пластины. Прежде всего заметим, что коэффициенты прохождения и отражения при нормальном падении звука на границе двух полубесконечных сред не зависят от частоты звука и являются вещественными числами. Поэтому при переходе через границу спектр импульса остается неизменным и форма импульса также не меняется. Это обстоятельство позволяет эффективно использовать метод последовательных отражений.

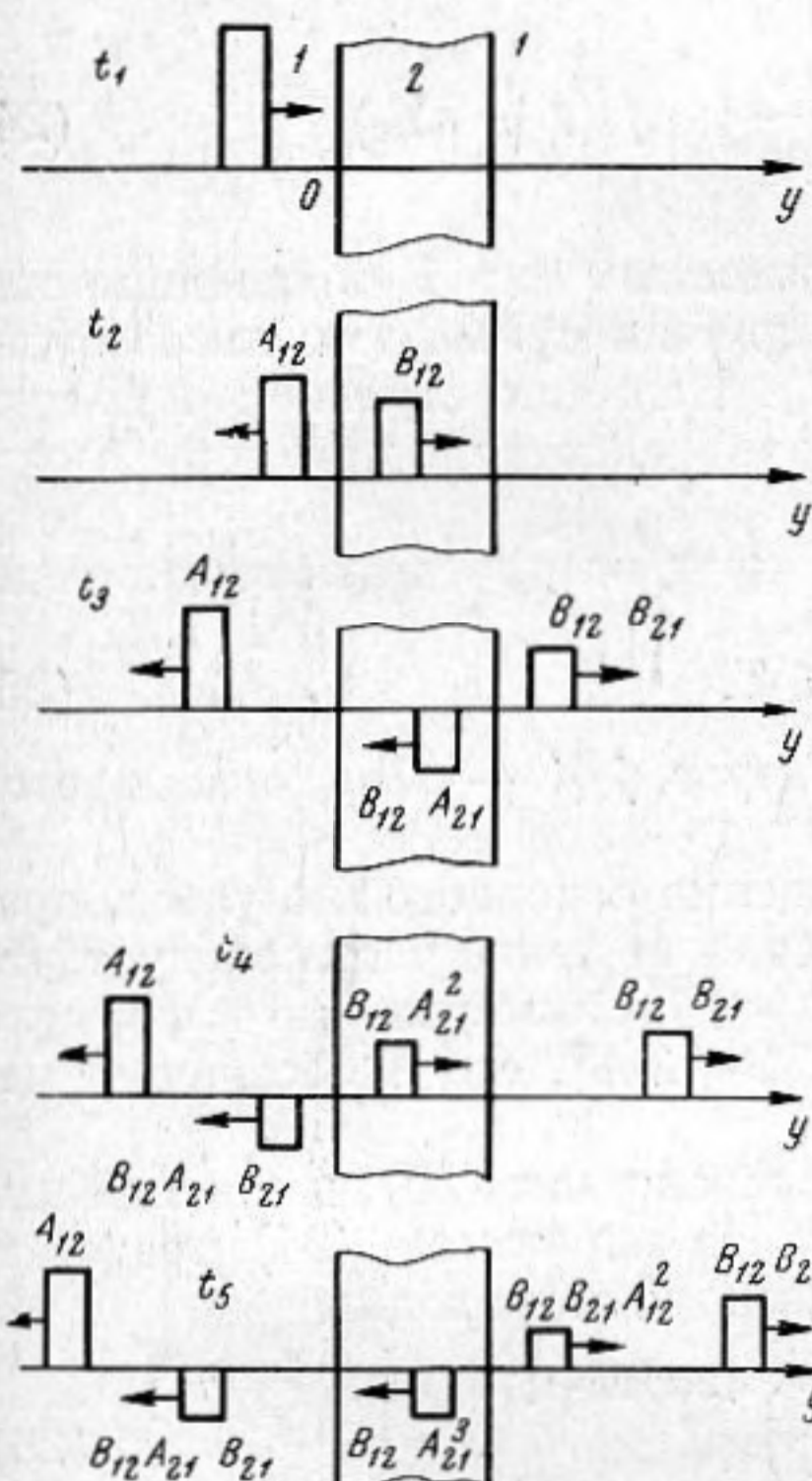
Пусть на пластину падает импульс сжатия, длительность которого меньше, чем длительность распространения волны в пластине (фиг. 6). Пусть A_{12} — коэффициент отражения при падении волны из среды 1 на среду 2, B_{12} — коэффициент прохождения при падении из среды 1 на среду 2. Соответственно обозначим через A_{21} и B_{21} аналогичные величины для противоположного направления падения. Тогда

$$A_{12} = \frac{\rho_l c_l - \rho c}{\rho_l c_l + \rho c}, \quad A_{21} = -\frac{\rho_l c_l - \rho c}{\rho_l c_l + \rho c},$$

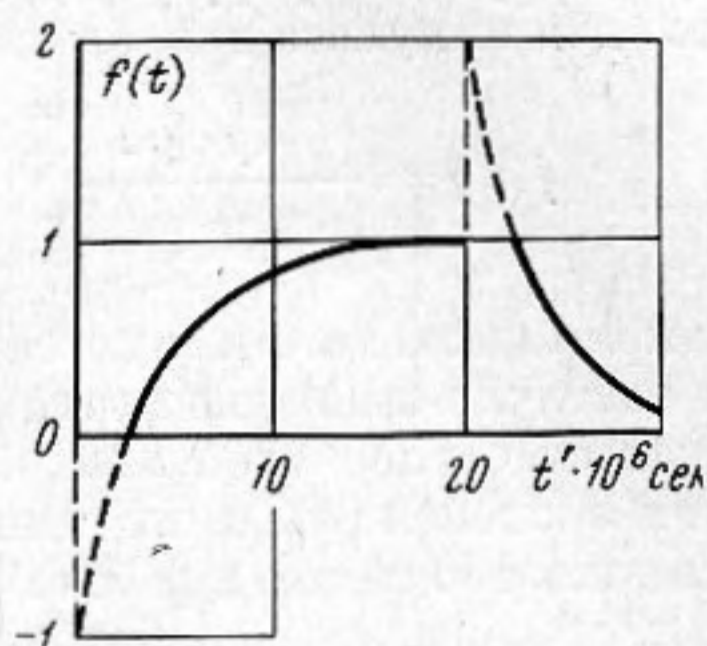
$$B_{12} = \frac{2\rho_l c_l}{\rho_l c_l + \rho c}, \quad B_{21} = \frac{2\rho c}{\rho_l c_l + \rho c},$$
(22)

где $\rho_l c_l$ — волновое сопротивление материала пластины.

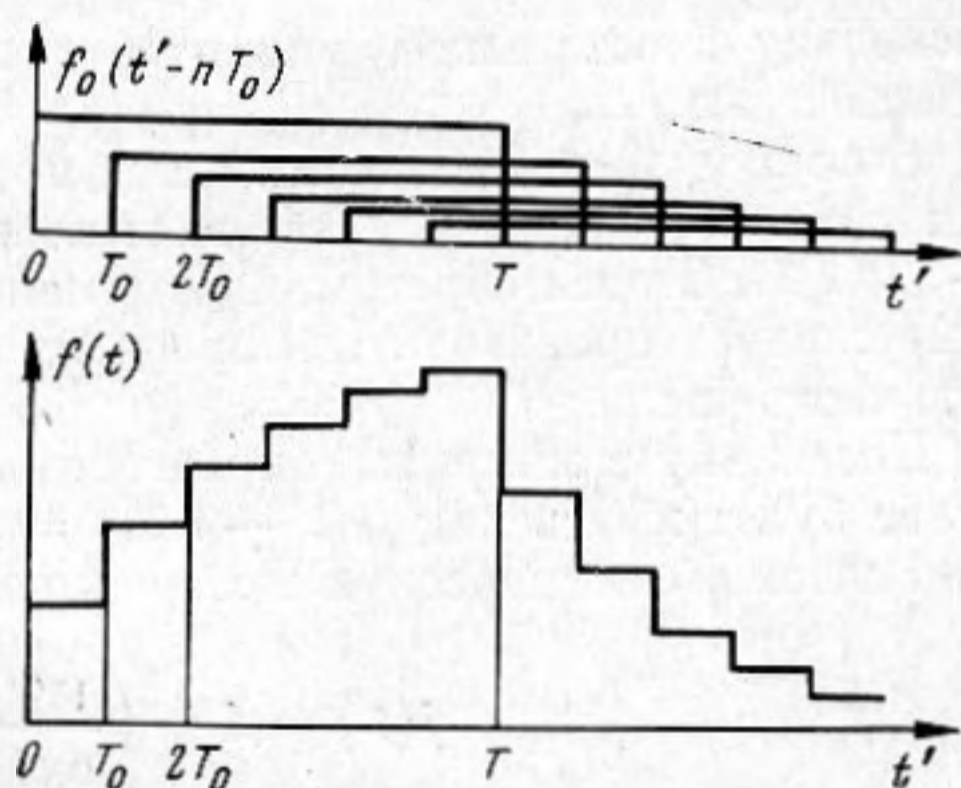
Для определенности примем $\rho_1 c_1 > \rho c$ (все полученные ниже результаты сохраняются и при $\rho_1 c_1 < \rho c$). Если положить амплитуду падающего импульса равной единице, то в момент t_2 (фиг. 6) будут существовать два импульса с амплитудами A_{12} и B_{12} . После отражения от второй стороны пластины при $\rho_1 c_1 > \rho c$ знак импульса меняется на противоположный (момент t_3), поскольку при отражении от акустически менее плотной среды



Фиг. 6



Фиг. 5



Фиг. 7

$A_{21} < 0$ и импульс сжатия превращается в импульс разрежения. После отражения от второй стороны (момент t_4) знак опять изменяется и в момент t_5 за пластиной появляется второй импульс сжатия с амплитудой $B_{12}B_{21}A_{12}^2$ и так далее. Таким образом, после прохождения через пластину будет наблюдаться последовательность импульсов, следующих с интервалами $T_0 = 2h / c_1$. Амплитуда импульсов будет уменьшаться по закону $B_{12}B_{21}A_{12}^{2n}$, где n — номер прошедшего импульса.

Предположим, что падающий импульс определяется дельта-функцией $\delta(t - y/c)$. Первый импульс придет в точку наблюдения в момент времени $\tau' = \frac{T_0}{2} + \frac{y-h}{c}$. Вводя переменную $t' = t - \tau'$ и учитывая соотно-

шение (22), последовательность прошедших импульсов можно записать в виде ряда.

$$f_\delta(t') = \frac{4\rho_1 c_1 \rho c}{(\rho_1 c_1 + \rho c)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_1 c_1 - \rho c}{\rho_1 c_1 + \rho c} \right)^{2n} \delta(t' - nT_0). \quad (23)$$

Для того чтобы получить $f(t')$ при падении импульса произвольной формы, следует представить $f_0(t')$ в виде набора дельта-функций, сдвину-

тых относительно друг друга на время τ

$$f_0(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - \tau) f_0(\tau) d\tau.$$

Заменяем теперь в формуле (23) величину t' на $t' - \tau$, введем множитель $f_0(\tau)$ и проинтегрируем по τ . В результате мы получим переходную функцию для импульса произвольной формы:

$$f(t') = \frac{4\rho_l c_l \rho c}{(\rho_l c_l + \rho c)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_l c_l - \rho c}{\rho_l c_l + \rho c} \right)^{2n} f_0(t' - nT_0). \quad (24)$$

Для прямоугольного импульса с длительностью $T > T_0$ прошедшие импульсы частично накладываются друг на друга и сумма импульсов будет изображаться ступенчатой кривой (фиг. 7). Наличие ступенек при прохождении экспоненциального импульса через пластину при нормальном падении показано также в работе [4].

Количество импульсов, наложившихся друг на друга, можно определить из неравенства

$$0 < t' - nT_0 < T, \quad (25)$$

поскольку в остальные моменты t' амплитуда $f_0(t' - nT_0)$ оказывается равной нулю.

В период $t' < T$, т. е. в период прохождения основного импульса, правая часть неравенства заведомо выполняется, а из левой части следует, что $n < t' / T_0$. Таким образом, для моментов $t' < T$ суммирование в формуле (24) следует производить в пределах $[0, E(t' / T_0)]$, где E обозначает целую часть числа.

Поскольку в моменты, определенные неравенством (25), исходный импульс будет иметь вид $f_0(t' - nT_0) = \text{const}$, то выражение (24) представляет собой геометрическую прогрессию. Суммируя ее, находим

$$f(t') = 1 - \left(\frac{\rho_l c_l - \rho c}{\rho_l c_l + \rho c} \right)^{2[E(t'/T_0)-1]} \quad t' < T. \quad (26)$$

После прохождения основного импульса в моменты $t' > T$ следует учитывать обе части неравенства (25) и пределы суммирования определяются как $\left[E\left(\frac{t'-T}{T_0}\right), E\left(\frac{t'}{T_0}\right) \right]$. Суммируя прогрессию, находим

$$f(t') = \left(\frac{\rho_l c_l - \rho c}{\rho_l c_l + \rho c} \right)^{2[E(t'/T_0)-1]} \left\{ \left(\frac{\rho_l c_l - \rho c}{\rho_l c_l + \rho c} \right)^{2[E(t'-T)/T_0 - E(t'/T_0)-1]} - 1 \right\}. \quad (27)$$

Из выражения (27) и фиг. 7 видно, что в начале и в конце импульса отсутствуют резкие выбросы, показанные на фиг. 3 и 5.

Формулы для тонкой пластины ($T_0 \ll T$) при нормальном падении волны могут быть получены из выражений (26) и (27). Действительно при $\rho_l c_l \gg \rho c$ ступеньки кривой фиг. 7 будут весьма малы и форму импульса можно аппроксимировать гладкой кривой, отбросив с этой целью символ E . Выполнив предельный переход $\rho_l c_l \rightarrow \infty$, получаем выражение

$$f(t') \approx 1 - e^{-\frac{2\rho c}{M} t'}, \quad t' < T$$

совпадающее с первыми двумя членами формулы (13) при $\theta = 0$. Аналогичные преобразования можно провести и в формуле (27). После выпол-

нения предельного перехода получим выражение

$$f(t') \underset{t' > T}{\approx} e^{-2\rho c l' / M} (e^{2\rho c T / M} - 1),$$

которое совпадает с первым слагаемым формулы (14) при $\theta = 0$. Таким образом, в принятом приближении $\rho_l c_l \gg \rho c$ учитываются лишь колебания пластины без изменения ее толщины и не учитываются симметричные движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. F. M. Osborne, S. D. Hart. Transmission, reflection and guiding of an exponential pulse by a steel plate in water. I. Theory. J. Acoust. Soc. America, 1945, 17, 1, 1—18.
2. M. F. Osborne, S. D. Hart. Transmission, reflection and guiding of an exponential pulse by a steel plate in water. II. Experiment. J. Acoust. Soc. America, 1946, 18, 1, 170—184.
3. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. G. Lindh. The transmission and reflection of an exponential shock wave impinging on a homogeneous elastic plate immersed in a liquid. Acustica, 1955, 5, 5, 257—262.

Ленинград

Поступила в редакцию
22 июня 1968 г.