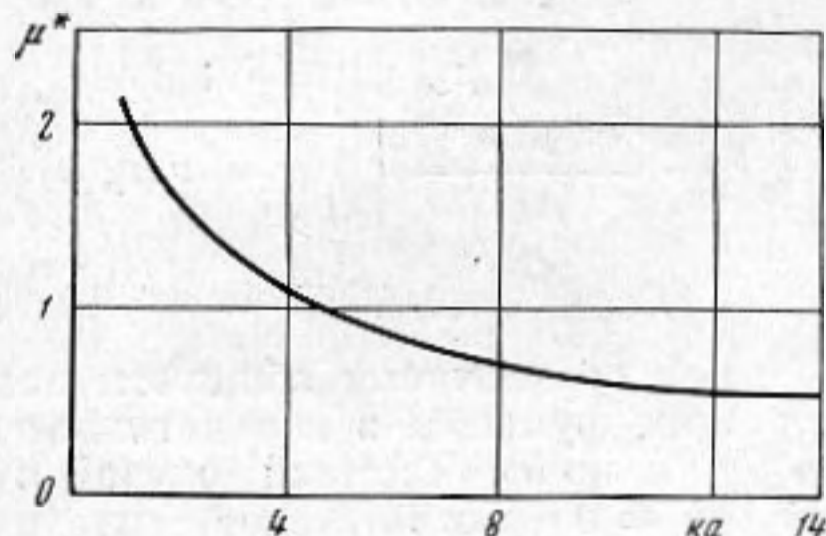


где

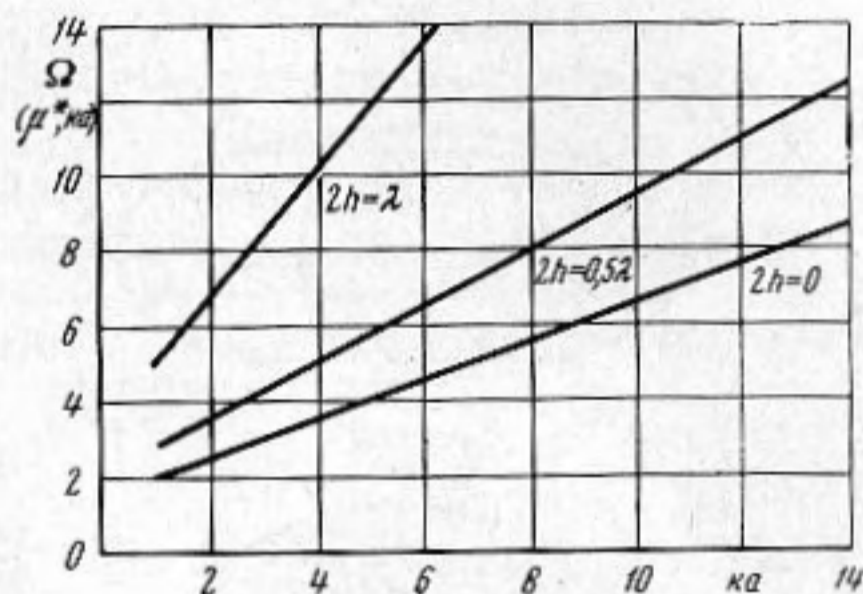
$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \left| \frac{\sin(\mu n)}{nka \cos \theta H_n^{(1)'}(ka \cos \theta)} \right|^2.$$

Расчет по формулам (2), (3) был проведен с помощью электронного вычислительного устройства в широком диапазоне значений различных параметров. Перейдем к обсуждению результатов расчетов, представленных графиками фиг. 1—3.

Зависимость коэффициента  $\Omega$  от углового размера источника при  $ka = 14$  и  $kh = 0$  (1),  $0,5\lambda$  (2) и  $\lambda$  (3) можно проследить по графикам фиг. 1. Расчеты проводились по формуле (3) для  $0 \leq \mu \leq \pi$  с шагом в  $\pi/18$ . Рассмотрение кривых показывает, что коэффициент  $\Omega$  существенно зависит от угловых размеров источника,



Фиг. 2



Фиг. 3

достигая максимума при его некоторых фиксированных значениях. Назовем их критическими и обозначим через  $\mu^*$  (в данном случае  $\mu^* \approx \pi/6$ ). Для других  $ka$ , от 1 до 14 включительно,  $\mu^*$  даны на фиг. 2, а соответствующие значения коэффициента  $\Omega$  при  $\mu = \mu^*$ ,  $kh = 0$ ;  $0,5\lambda$ ;  $\lambda$  представлены на фиг. 3. При заданных угловых размерах поршня и диаметра цилиндра график фиг. 2 позволяет определять оптимальную рабочую частоту системы.

Пользуясь случаем, автор выражает признательность Л. Г. Меркулову за полезное обсуждение данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. T. Laird, H. Cohen. Directionality patterns for acoustic radiation from a source on rigid cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1952, 24, 46—49.
2. В. К. Алексеев, Л. Ф. Лепендин. Акустическое поле системы пульсирующих колец на цилиндре. Акуст. ж., 1968, 14, 1, 37.
3. В. К. Алексеев, Л. Г. Меркулов. Характеристики направленности для системы прямоугольных поршневых излучателей на круговом цилиндре. Сб. Таганрогского радиотехнического института «Приклад. акуст.», ч. 2, 1969.
4. С. Н. Ржевкин. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило в редакцию  
16 сентября 1968 г.

УДК 534.232

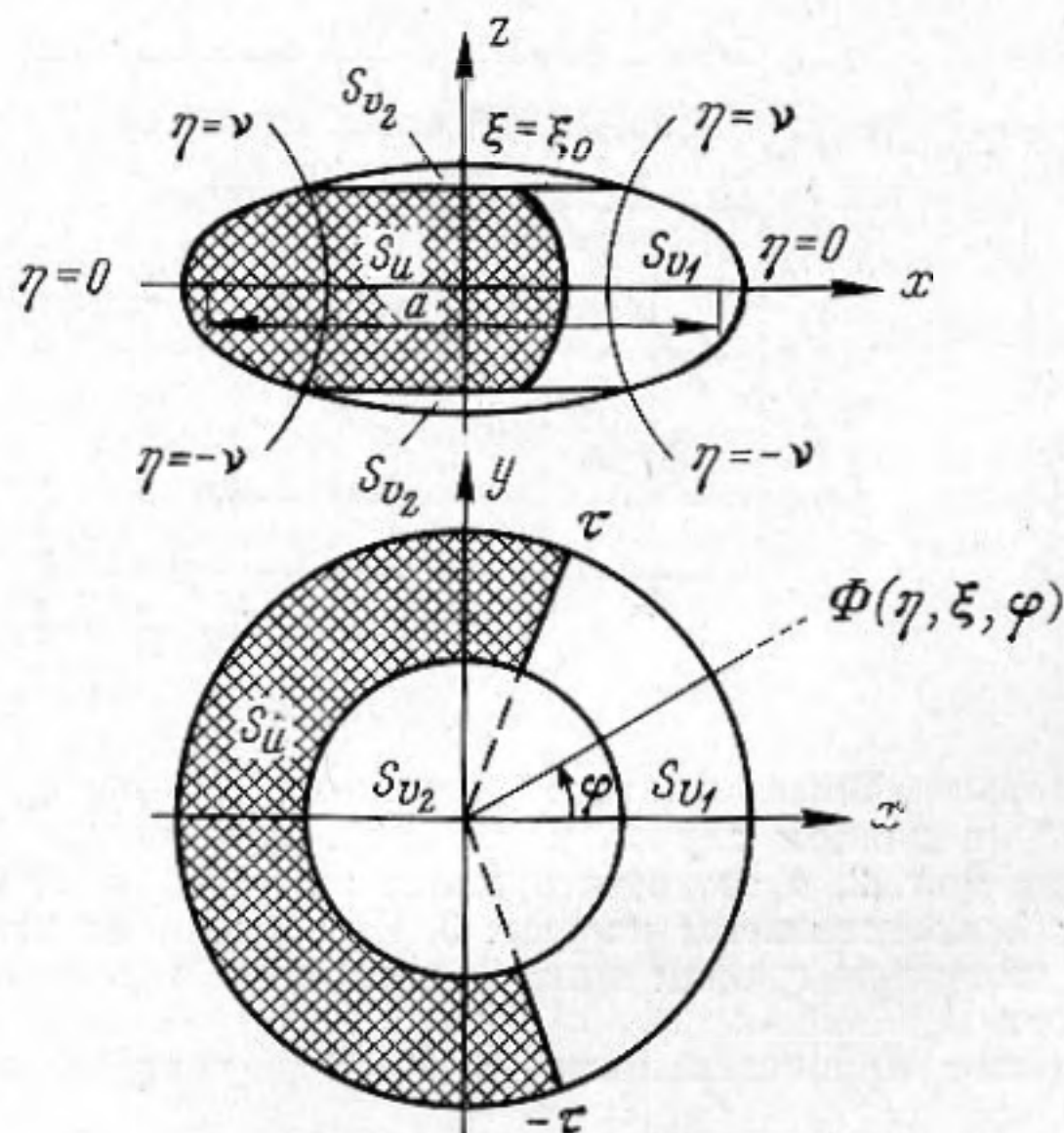
### АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СФЕРОИДАЛЬНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В. А. Андебуря

Определим акустическое поле гармонически колеблющегося сфероида, на части поверхности которого задан потенциал скорости, а на остальной поверхности — колебательная скорость. Для построения приближенного решения воспользуемся интегральным методом наименьших квадратов [1, 2]. Известно [3], что в сфероидалных координатах  $(\eta, \xi, \varphi)$  решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям излучения для временной зависимости  $e^{-i\omega t}$ , имеет вид

$$\Phi(h, \eta, \xi, \varphi) = \sum_{m=-n}^n \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} R_{mn}^{(3)}(h|-ih, \xi|\xi|i\xi) S_{mn}(h|-ih, \eta) e^{im\varphi},$$

где  $\Phi$  — комплексная амплитуда потенциала скорости звукового поля,  $A_{mn}$  — комплексные константы;  $S_{mn}$  и  $R_{mn}^{(3)} = R_{mn}^{(1)} + iR_{mn}^{(2)}$  — сфероидальные угловые и радиальные функции. Аргументы  $h$  и  $\xi$  относятся к вытянутым сфероидальным координатам,  $-ih, i\xi, i = \sqrt{-1}$  — к сплюснутым;  $h = ka/2$ , где  $k$  — волновое число,  $a$  — фокусное расстояние сфероида. Для определенности рассмотрим сплюснутый сфероидальный излучатель  $\xi = \xi_0$  (см. фигуру). Пусть его поверхность разделена однополостными гиперboloидами вращения  $|\eta| = \nu$  и полуплоскостями  $|\varphi| = \tau$  на области  $S_u$  и  $S_v = S_{v1} + S_{v2}$ , определяемые для области  $S_u$  (на фигуре заштрихована) неравенствами  $|\eta| < \nu, \tau < |\varphi| < \pi$ ; для области  $S_{v1}$  неравенствами  $|\eta| < \nu, |\varphi| < \tau$  и для области  $S_{v2}$  неравенствами  $\nu < |\eta| < 1, 0 \leq |\varphi| \leq \pi$ .



На указанных поверхностях заданы граничные условия

$$\Phi(\eta, \xi, \varphi)_{\xi=\xi_0} = u(\eta, \varphi),$$

$$(\eta, \varphi) \in S_u;$$

$$-\frac{\partial \Phi(\eta, \xi, \varphi)}{\partial n} \Big|_{\xi=\xi_0} = v(\eta, \varphi),$$

$$(\eta, \varphi) \in S_v. \quad (1)$$

Без ограничения общности положим функции  $u$  и  $v$  четными по  $\eta$  и по  $\varphi$ . Частный случай  $u(\eta, \varphi) \equiv 0$  соответствует акустически мягкой границе  $S_u$ , случай  $v(\eta, \varphi) \equiv 0$  — абсолютно жесткой границе  $S_v$ . В качестве приближенного решения нашей задачи примем удовлетворяющий условиям излучения обобщенный полином порядка  $N$

$$\begin{aligned} f_N(\eta, \xi, \varphi) &= \\ &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N C_{mn} R_{mn}^{(3)}(i\xi) \times \\ &\quad \times S_{mn}(\eta) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Следуя работам [1, 2], потребуем выполнения заданных граничных условий (1) на поверхности сфероида в среднем. Представим функционал, выражающий квадратичное отклонение приближенного решения (2) от граничных условий в виде

$$\begin{aligned} F\{f_N\} &= k^2 \int_{S_u} \left( \frac{\xi_0^2 + 1}{\xi_0^2 + \eta^2} \right)^{1/2} |u(\eta, \varphi) - f_N(\eta, \xi, \varphi)_{\xi=\xi_0}|^2 dS + \\ &+ \int_{S_v} \left( \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi_0^2 + 1} \right)^{1/2} \left| v(\eta, \varphi) + \frac{\partial}{\partial n} f_N(\eta, \xi, \varphi)_{\xi=\xi_0} \right|^2 dS. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\partial/\partial n$  обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали к поверхности сфероида  $\xi = \xi_0$ ; весовые множители в подынтегральные выражения введены в связи с тем, что коэффициент Ламе координаты  $\xi$  отличен от единицы.

Наилучшим приближенным решением нашей задачи при фиксированном  $N$  будет полином  $f_N$ , минимизирующий функционал (3). Учитывая, что в сплюснутых сфероидальных координатах  $dS = \frac{a^2}{4} [(\xi_0^2 + 1)(\xi_0^2 + \eta^2)]^{1/2} d\varphi d\eta$ , введем обозначения:

$$\alpha_{mn} = \frac{2\varepsilon_m}{\pi N_{mn}} \int_0^\nu \int_0^\pi u(\eta, \varphi) S_{mn}(\eta) \cos m\varphi d\varphi d\eta;$$

$$\beta_{mn1} = \frac{2\varepsilon_m}{\pi N_{mn}} \int_0^\nu \int_0^\tau \left( \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi_0^2 + 1} \right)^{1/2} v(\eta, \varphi) S_{mn}(\eta) \cos m\varphi d\varphi d\eta,$$

$$\beta_{mn^2} = \frac{2\varepsilon_m}{\pi N_{mn}} \int_0^1 \int_0^\pi \left( \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi_0^2 + 1} \right)^{1/2} v(\eta, \varphi) S_{mn}(\eta) \cos m\varphi d\varphi d\eta;$$

$$\gamma_{mnpq} = \frac{k^2 a^2}{2} (\xi_0^2 + 1) \int_0^1 \int_0^\pi (B_{mn}^{(3)} \cdot \overline{B_{pq}^{(3)}})_{\xi=\xi_0} d\varphi d\eta +$$

$$+ 2(\xi_0^2 + 1) \left[ \int_0^1 \int_0^\pi \left( \frac{\partial B_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \overline{B_{pq}^{(3)}}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} d\varphi d\eta + \int_0^1 \int_0^\pi \left( \frac{\partial B_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \overline{B_{pq}^{(3)}}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} \right] \quad (4)$$

Здесь  $N_{mn}$  — норма угловых сфероиальных функций,  $\varepsilon_0 = 1$ ;  $\varepsilon_m = 2$ ,  $m \neq 0$ ,  $B_{mn}^{(3)}(\eta, i\xi, \varphi) = R_{mn}^{(3)}(i\xi) S_{mn}(\eta) \cos m\varphi$ . Заметим, что при четности функций  $u$  и  $v$  относительно  $\eta$  коэффициенты  $\alpha_{mn}$  и  $\beta_{mn}$  будут отличны от нуля только когда  $n - m$  есть четное число. Для коэффициентов  $\gamma$  справедливо равенство  $\gamma_{mnpq} = \overline{\gamma_{pqmn}}$ ; черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

Находя стационарные точки функционала  $F\{f_N\}$  из условия  $dF/d\sigma_{pq} = 0$  и  $dF/d\xi_{pq} = 0$ , где  $\sigma_{pq} = \text{Re } C_{pq}$  и  $\xi_{pq} = \text{Im } C_{pq}$ , мы приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $C_{mn}$ :

$$\sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^N \gamma_{mnpq} C_{mn} = \frac{\pi a}{2} (\xi_0^2 + 1) \frac{N_{pq}}{\varepsilon_p} \left[ \frac{k^2 a}{2} \alpha_{pq} \overline{R_{pq}^{(3)}}(i\xi) - (\beta_{pq1} + \beta_{pq2}) \frac{\partial \overline{R_{pq}^{(3)}}}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0},$$

$p = 0, 1, 2, \dots, q$ ;  $q = 0, 1, 2, \dots, N$ ;  $n - m$  и  $q - p$  — четные числа.

Эта система имеет единственное решение, что следует из линейной независимости

систем функций  $\{B_{mn}^{(3)}\}$  и  $\left\{ \frac{\partial B_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} \right\}$  на поверхности  $S_u$  и  $S_p$ . Ошибку прибли-

женного решения можно оценить так же, как это сделано в работах [1, 2].

Заметим, что если  $S_u$  или  $S_v$  — вся поверхность сфероид, то в силу ортогональности указанных выше систем функций на поверхности сфероида коэффициенты  $C_{mn}$  определяются явно; величины  $\alpha_{mn}$  и  $\beta_{mn}$  будут обычными коэффициентами Фурье в разложениях  $u(\eta, \varphi)$  и  $v(\eta, \varphi)$  по сфероиальным функциям. При  $N \rightarrow \infty$  мы в этом случае получим точное решение задачи Дирихле или Неймана для сфероид.

Все приведенные рассуждения полностью справедливы и для вытянутого сфероиального излучателя; следует лишь учесть различие коэффициентов Ламе и использовать соответствующие угловые и радиальные функции.

В заключение отметим, что решение задачи об излучении сфероид со смешанными граничными условиями может, по-видимому, быть одним из подходов к определению акустического поля цилиндрического излучателя конечной высоты с мягким экраном.

Автор пользуется случаем выразить благодарность М. И. Карновскому за руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле внешности сферы при смешанных граничных условиях. Акуст. ж., 1965, 11, 2, 176—180.
2. В. А. Андебуря. Акустическое поле линейного ряда конечных цилиндрических излучателей при смешанных граничных условиях. Акуст. ж., 1968, 14, 2, 170—175.
3. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероиальных функций. Библ. матем. таблиц, вып. 17. М., Вычислит. центр АН СССР, 1962.

Киев

Поступило в редакцию  
1 октября 1968 г.