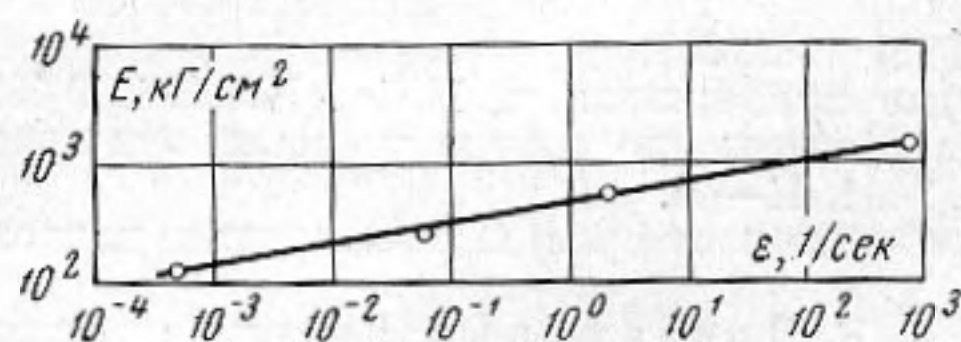


измерялась другим стрелочным индикатором 8. Специальными испытаниями было проверено, что индикаторы вносят лишь очень малую поправку в силы, действующие на образец и на динамометр.

Вибрационное нагружение осуществлялось на другой установке, описанной в работе [1]. Скорости деформирования  $\dot{\epsilon}$  лежали в пределах от 1 до 10 1/сек. Индикатором силы служил проградуированный биморфный пьезоприемник из титаната бария.



Фиг. 2

Производилось измерение амплитуды деформации и амплитуды напряжения на образце при постепенном повышении амплитуды деформации и строилась характеристика  $P(\epsilon)$ .

Ударное нагружение осуществлялось на третьей установке, описанной в работе [2]. Скорости деформирования были порядка  $10^3$  1/сек. Измерялось отрицательное ускорение бойка в течение некоторого малого промежутка времени после удара и соответствующее

среднее значение деформации. Знание массы бойка позволило определить усилие, приложенное к образцу, которое вызвало данную деформацию  $\epsilon$  и по ним вычислить приближенное значение модуля Юнга  $E$ .

В результате проведенных измерений получена зависимость между  $E$  и  $\dot{\epsilon}$ , представленная на фиг. 2 в двойном логарифмическом масштабе. Эта линейная зависимость означает, что между  $E$  и  $\dot{\epsilon}$  в указанных на фигуре пределах существует соотношение

$$\frac{E}{E_0} = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^n$$

с показателем степени  $n$ , который, согласно фиг. 2, получается равным  $\sim 1/6$ . Полагая  $\dot{\epsilon}_0 = 1$  /сек, мы получаем  $E_0 \simeq 480$  кг/см<sup>2</sup>.

Таким образом, на примере испытанного материала удалось получить аналитическое выражение зависимости модуля Юнга  $E$  пенопласта от скорости деформирования.

В заключение авторы выражают благодарность проф. Г. А. Остроумову за постоянную помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Крячко, Г. А. Остроумов. Вибрационные свойства пенопластов. Акуст. ж., 1967, 13, 4, 584—590.
2. В. М. Крячко, Г. А. Остроумов. Волны сжатия в пенопласте. Акуст. ж., 1967, 13, 3, 455—456.

Ленинградский государственный университет

Поступило в редакцию  
15 сентября 1968 г.

УДК 534.224

### О СТРУКТУРЕ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННОЙ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ю. П. Лысанов

Рассеянное поле в волноводе с неровной границей имеет ряд интересных особенностей, которые возникают при равенстве горизонтальных компонент волновых векторов какой-либо рассеянной нормальной волны и одной из нормальных волн «невозмущенного» волновода, т. е. волновода без неровностей на его границах. При этом оказывается, что помимо обычных пространственных осцилляций наблюдается линейное возрастание рассеянного поля с увеличением горизонтального расстояния от излучателя. Очевидно, рассеяние имеет резонансный характер и по своей физической природе аналогично явлению Вуда [1—4]. Наиболее ярко этот эффект проявляется в случае периодических неровностей, рассмотрением которого мы и ограничимся.

Пусть имеется волновод, границы которого определяются уравнениями  $z = 0$  и  $z = h + a \cos qx$ . Предположим, что нижняя граница является абсолютно жесткой, а верхняя — абсолютно податливой. Уравнение Гельмгольца для потенциала скоростей в волноводе напомним в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 4i\delta(x)\delta(z - z_0), \quad (1)$$



предполагая, что звуковое поле возбуждается бесконечно тонким цилиндрическим источником. Правая часть уравнения (1) выбрана так, что при  $r = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2} \rightarrow 0$ ,  $\Psi(x, z) \rightarrow H_0^{(1)}(kr)$ .

Будем считать неровности малыми по сравнению с длиной волны звука и достаточно пологими, чтобы можно было применить обычный метод малых возмущений. Легко показать, что рассеянное поле в первом приближении метода малых возмущений в данном случае будет определяться следующим выражением:

$$\psi_s(x, z) = \frac{-ia}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \left( \frac{\cos \beta_1 z_0}{\cos \beta_1 h} + \frac{\cos \beta_{-1} z_0}{\cos \beta_{-1} h} \right) e^{i\xi x} d\xi, \quad (2)$$

где

$$\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \beta_{\pm 1} = \sqrt{k^2 - (\xi \pm q)^2}.$$

Интеграл в формуле (2) можно представить в виде суммы вычетов в полюсах подынтегрального выражения, определяемых из следующих трех уравнений:

$$\cos \beta h = 0; \quad \cos \beta_1 h = 0; \quad \cos \beta_{-1} h = 0.$$

Первое из этих уравнений по своему виду совпадает с уравнением полюсов для невозмущенного волновода. Обозначим корни этих уравнений соответственно через  $\xi_n$ ,  $\xi_{1n}$ ,  $\xi_{-1n}$ , где индекс  $n$  пробегает все значения от 0 до  $\infty$ . Возможны два случая. Первый случай соответствует тому, что все полюса подынтегрального выражения являются полюсами первого порядка, т. е.  $\xi_n \neq \xi_{1m}$  и  $\xi_n \neq \xi_{-1m}$  при любых значениях  $n, m$ . Во втором случае один или несколько полюсов являются полюсами второго порядка. При этом горизонтальные компоненты волновых векторов одной или нескольких рассеянных волн и нормальных волн невозмущенного волновода оказываются одинаковыми.

Если все полюса являются полюсами первого порядка, то рассеянное поле имеет вид

$$\psi_s(x, z) = \frac{2a}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \left\{ \cos \beta_n z \left( \frac{\cos \beta_1 z_0}{\cos \beta_1 h} + \frac{\cos \beta_{-1} z_0}{\cos \beta_{-1} h} \right)_{\xi_n} e^{i\xi_n x} + \right. \\ \left. + \cos \beta_n z_0 \left[ \left( \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{1n}} e^{i\xi_{1n} x} + \left( \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{-1n}} e^{i\xi_{-1n} x} \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\beta_n = \frac{\pi}{h} (n + 1/2), \quad \xi_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}, \quad \xi_{1n} = -q + \xi_n, \quad \xi_{-1n} = q + \xi_n,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим второй случай, когда один из полюсов является полюсом второго порядка. Пусть, например,  $\xi_l = \xi_{1m}$ . При  $\xi = \xi_l = \xi_{1m}$  одновременно обращается в нуль как  $\cos \beta h$  так и  $\cos \beta_1 h$ . Рассеянное поле будет иметь вид

$$\psi_s(x, z) = \frac{2a}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \left[ \cos \beta_n z \left( \frac{\cos \beta_{-1} z_0}{\cos \beta_{-1} h} \right)_{\xi_n} e^{i\xi_n x} + \cos \beta_n z_0 \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{-1n}} e^{i\xi_{-1n} x} \right] + \frac{2}{h} \sum_{n \neq l}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \cos \beta_n z \left( \frac{\cos \beta_1 z_0}{\cos \beta_1 h} \right)_{\xi_n} e^{i\xi_n x} + \frac{2a}{h} \times \\ \times \sum_{n \neq m}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \cos \beta_n z_0 \left( \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{1n}} e^{i\xi_{1n} x} + \frac{2a}{h} (-1)^{l+m} \frac{\beta_l \beta_m}{\xi_l \xi_m} \left[ \frac{z_0 \xi_m}{\beta_m} \sin \beta_m z_0 \cos \beta_l z + \right. \\ \left. + \cos \beta_m z_0 \left( \frac{z \xi_l}{\beta_l} \sin \beta_l z + i x \cos \beta_l z \right) \right] e^{i\xi_l x}. \quad (4)$$

Таким образом, во втором случае в выражении для рассеянного поля появляется член, линейно растущий с расстоянием. Однако, поскольку рассеянное поле в приближении метода малых возмущений должно быть мало по сравнению с полем невозмущенного волновода, то возникает ограничение на максимально допустимое расстояние. Потребовав, чтобы нарастающий с расстоянием член был мал по сравне-



нию с нормальной волной того же номера в невозмущенном волноводе, получим условие  $a\beta_l \frac{x}{\Delta_m} \ll 1$ , где множитель  $a\beta_l = ka \cos \Theta_l$  есть параметр Рэлея, а

$\Delta_m = 2h \frac{\beta_m}{\xi_m}$  — длина луча, соответствующего нормальной волне номера  $m$ . Ус-

ловие применимости первого приближения метода малых возмущений для расчета рассеянного поля в нерегулярном волноводе оказывается более жестким, чем в случае одной неровной границы: нужно, чтобы произведение параметра Рэлея на число циклов, укладывающихся на пути между излучателем и приемником, было мало по сравнению с единицей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Wood. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating problem. Phil. Mag., 1902, 4, 396.
2. Л. Н. Дерюгин. О поверхностном резонансе на отражательной решетке. Докл. АН СССР, 1954, 94, 2, 203—206.
3. Ю. П. Лысанов. К вопросу о поверхностном резонансе на синусоидальной поверхности. Акуст. ж., 1960, 6, 1, 77—80.
4. Ю. П. Лысанов. О резонансных явлениях при рассеянии волн на неровной границе раздела сред со слабым перепадом скорости звука. Акуст. ж., 1968, 14, 3, 413—415.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступило в редакцию  
15 мая 1968 г.

УДК 534.114

### ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

*Л. Д. Любавин, Н. К. Петров*

До настоящего времени в литературе, посвященной продольным колебаниям механических систем, в большинстве случаев рассматривались продольные колебания либо прямых стержней, либо замкнутых цилиндрических оболочек. Конкретное рассмотрение вопроса о чисто продольных колебаниях кривых стержней не представляло, по-видимому, практического интереса. В настоящее время появилась необходимость использования в некоторых случаях продольных колебаний стержней, имеющих постоянный радиус кривизны.

Для определения резонансных частот и собственных форм продольных колебаний тонкого стержня постоянной кривизны воспользуемся уравнением движения элемента такого стержня в проекции на направление нормали и касательной к его оси, приведенным Лявом [1] для продольных колебаний замкнутого кольца:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2 \rho} \left[ \frac{\partial W}{\partial \varphi} - V \right]; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2 \rho} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right], \quad (1)$$

где  $a$  — радиус кривизны стержня,  $\rho$  — плотность материала стержня,  $E$  — модуль Юнга материала стержня,  $W(\varphi)$  — смещение в направлении касательной к оси стержня,  $U(\varphi)$  — смещение в радиальном направлении (см. фиг. 1). При этом стержень считается достаточно тонким, так что по всей толщине его радиальные напряжения  $\sigma_r = 0$ . Если считать  $U$  и  $W$  гармоническими функциями времени  $t$ , то из уравнений (1) непосредственно следует, что  $W = \partial u / \partial \varphi$  и уравнения (1) запишутся соответственно:  $\partial^2 U / \partial \varphi^2 + m^2 U = 0$ ;  $\partial^2 W / \partial \varphi^2 + m^2 W = 0$ , где  $m^2 = (a \cdot \omega / c)^2 - 1$ ;  $c = (E / \rho)^{1/2}$  — скорость звука в прямом бесконечном стержне. Решение этих уравнений общеизвестно. Поскольку мы рассматриваем свободный стержень, граничными условиями следует считать равенство нулю напряжений  $\sigma_r$ , а следовательно, и относительных деформаций на концах стержня, т. е.  $\xi_r = (\partial W / \partial \varphi - U) / a = 0$  при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \Theta$ . С учетом этих краевых условий нетрудно получить общее решение задачи о продольных колебаниях изогнутого свободного стержня в виде

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \sin m_i \varphi; \quad W(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \cos m_i \varphi, \quad (2)$$