нию с нормальной волной того же номера в невозмущенном волноводе, получим условие $a\beta_l \cdot \frac{x}{\Delta_m} \ll 1$, где множитель $a\beta_l = ka \cos\Theta_l$ есть параметр Рэлея, а

$\Delta_m = 2h \frac{\beta_m}{\xi_m}$ — длина луча, соответствующего нормальной волне номера m. Условие применимости первого приближения метода малых возмущений для расчета рассеянного поля в нерегулярном волноводе оказывается более жестким, чем в случае одной неровной границы: нужно, чтобы произведение параметра Рэлея на число циклов, укладывающихся на пути между излучателем и приемником, было мало по сравнению с единицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Wood. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating problem. Phil. Mag., 1902, 4, 396.
2. Л. Н. Дерюгин. О поверхностном резонансе на отражательной решетке. Докл. АН СССР, 1954, 94, 2, 203—206.
3. Ю. П. Лысанов. К вопросу о поверхностном резонансе на синусоидальной поверхности. Акуст. ж., 1960, 6, 1, 77—80.
4. Ю. П. Лысанов. О резонансных явлениях при рассеянии волн на неровной границе раздела сред со слабым перепадом скорости звука. Акуст. ж., 1968, 14, 3, 413—415.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
15 мая 1968 г.

УДК 534.114

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Д. Любавин, Н. К. Петров

До настоящего времени в литературе, посвященной продольным колебаниям механических систем, в большинстве случаев рассматривались продольные колебания либо прямых стержней, либо замкнутых цилиндрических оболочек. Конкретное рассмотрение вопроса о чисто продольных колебаниях кривых стержней не представляло, по-видимому, практического интереса. В настоящее время появилась необходимость использования в некоторых случаях продольных колебаний стержней, имеющих постоянный радиус кривизны.

Для определения резонансных частот и собственных форм продольных колебаний тонкого стержня постоянной кривизны воспользуемся уравнением движения элемента такого стержня в проекции на направление нормали и касательной к его оси, приведенным Лявом [1] для продольных колебаний замкнутого кольца:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2\rho}\left[\frac{\partial W}{\partial \varphi} - V\right]; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2\rho}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right], \tag{1}$$

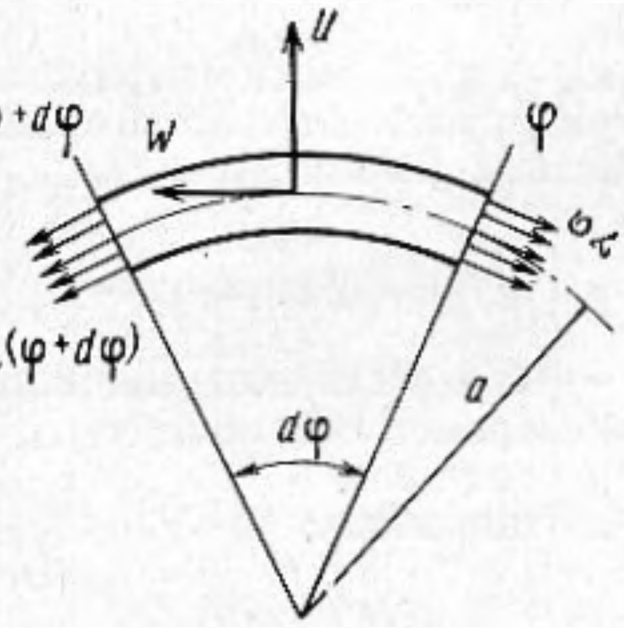
где a — радиус кривизны стержня, ρ — плотность материала стержня, E — модуль Юнга материала стержня, $W(\varphi)$ — смещение в направлении касательной к оси стержня, $U(\varphi)$ — смещение в радиальном направлении (см. фиг. 1). При этом стержень считается достаточно тонким, так что по всей толщине его радиальные напряжения $\sigma_r = 0$. Если считать U и W гармоническими функциями времени t, то из уравнений (1) непосредственно следует, что $W = \partial u / \partial \varphi$ и уравнения (1) запишутся соответственно: $\partial^2 U / \partial \varphi^2 + m^2 U = 0$; $\partial^2 W / \partial \varphi^2 + m^2 W = 0$, где $m^2 = (a \cdot \omega / c)^2 - 1$; $c = (E / \rho)^{1/2}$ — скорость звука в прямом бесконечном стержне. Решение этих уравнений общеизвестно. Поскольку мы рассматриваем свободный стержень, граничными условиями следует считать равенство нулю напряжений σ_τ, а следовательно, и относительных деформаций на концах стержня, т. е. $\xi_\tau = (\partial W / \partial \varphi - U) / a = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \Theta$. С учетом этих краевых условий нетрудно получить общее решение задачи о продольных колебаниях изогнутого свободного стержня в виде

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \sin m_i \varphi; \qquad W(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \cos m_i \varphi, \tag{2}$$

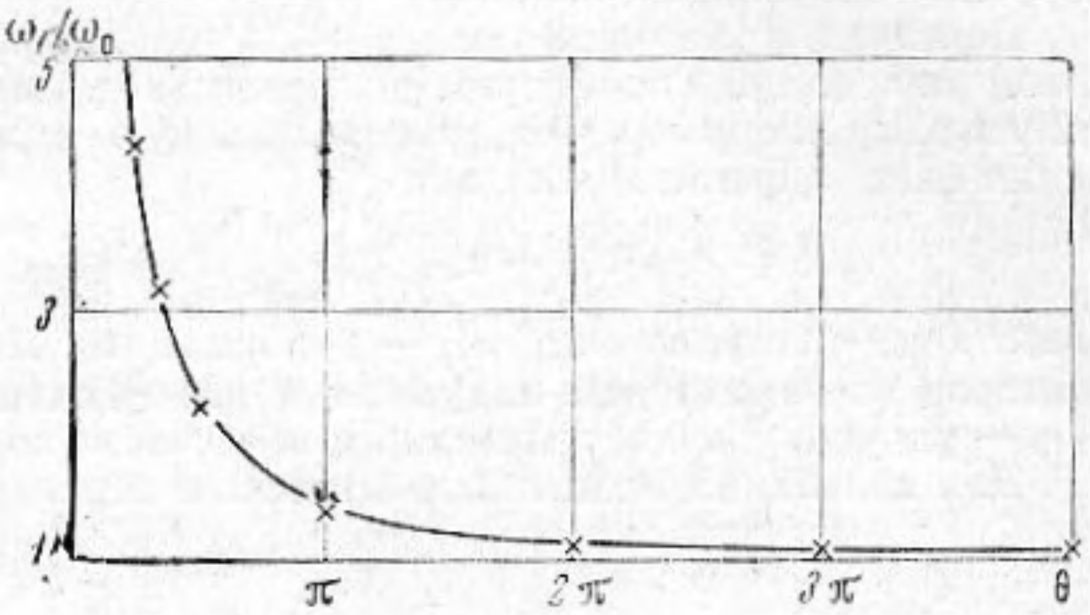
а также уравнение для определения собственных частот колебаний: $\sin m_i\Theta = 0$. Отсюда $m_i = \pi \cdot i / \Theta$ и

$$\omega_i = [(\pi \cdot i / \Theta)^2 + 1]^{1/2} \cdot c / a. \tag{3}$$

Полученное выражение (3) для углов $\Theta = \pi / n$, где $n = 1, 2, 3 \ldots$ легко объяснить, рассматривая колебания замкнутого кольца. Действительно, из теории продольных колебаний последнего известно, что на n-й моде колебаний в нем имеются $2n$ сечений (узлов), в которых механические напряжения отсутствуют. Таким образом, разрез кольца по этим сечениям не нарушит картины колебаний в каждой отдельной части. При этом резонасная частота на n-й моде колебаний кольца совпадает с низшей ($i = 1$) частотой, получаемой из выражения (3) при $\Theta = \pi / n$. Значение $i = 0$ дает решение, при котором сечения стержня, перпендикулярные его оси, не совершают смещений в направлени касательной к оси стержня. Этот тип колебаний не



Фиг. 1



Фиг. 2

возникает в свободном изогнутом стержне под действием внутренних сил, но имеет место в замкнутом кольце. Если радиус кривизны стержня постоянен, а длина его увеличивается и пропорционально увеличивается угол Θ, охватывающий концы стержня, то изменение низшей ($i = 1$) резонансной частоты происходит, как показано на фиг. 2, сплошной линией. Там же крестиками показаны результаты экспериментов, полученные на пьезокерамических и алюминиевых образцах (см. фиг. 2, где $\omega_0 = c / a$). Заметим, что изменение угла Θ в интервале от 2π до 4π соответствует второму витку спирали, в которую сворачивается стрежень.

Для случая, когда стержень постоянной длины L изогнут (равномерно) до разных углов Θ, выражение для резонансных частот легко получается из формулы (3) и имеет вид: $f_i = [(i / 2)^2 + (\Theta / 2\pi)^2]^{1/2} \cdot c / L$. Отсюда следует, что при $\Theta \longrightarrow 0$, f_i стремится к значениям собственных резонансных частот прямого стержня. Как было отмечено в начале работы, продольные колебания в изогнутом стержне сопровождаются смещением сечений стержня в нормальном к его оси (радиальном) направлении в отличие от чисто продольных колебаний в прямом стержне (не учитывая колебаний за счет коэффициента Пуассона). Соотношение между смещениями U и W легко получается из формулы (1) и имеет вид $U_i = W_i \cdot \Theta / i\pi$. Таким образом, чем больше угол, на который изогнут стержень, тем больше становится отношение величины радиального смещения к продольному смещению оси стержня.

Выражение для собственных форм продольных колебаний и резонасных частот стержней постоянной кривизны (2) и (3) могут найти практическое применение, например, в следующих случаях:

1. По значению измеренных резонансных частот можно определить наличие сквозных трещин по образующей кольца, которые часто не могут быть обнаружены визуально по причине их малости или невозможности доступа для их осмотра. Так, наличие одной трещины в кольце увеличивает его низшую резонансную частоту на 12%.

2. Стержни постоянной кривизны, и в частности, кольцо с разрезом по образующей, используются в качестве акустических систем в электроакустической аппаратуре. Выражение (2) для собственных форм колебаний позволяет произвести расчет механических и акустических параметров таких акустических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ляв. Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ НКТП СССР, 1935.

Ленинград

Поступило в редакцию
20 мая 1968 г.