АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 4

УДК 534.222.

СЛУЧАЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В. П. Кузнецов

Теоретически рассматриваются корреляционная функция и энергетический спектр случайного поля скоростей, образованного источником стационарного шума в нелинейной идеальной среде.

В работе [1] рассматривалось случайное поле скоростей, образованное плоским источником шума в слабонелинейной среде для случая малых чисел Рейнольдса. При больших значениях числа Рейнольдса ($R \gg 1$) в приближенном уравнении, описывающем распространение конечных возмущений [2], можно исключить диссипативный член и ограничиться следующим уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $u(x, y)$ — скорость жидкости в точке x, момент времени t; $y = t - x / c_0$; $\alpha = (\gamma + 1) / 2c_0^2$; $\gamma = C_p / C_v$.

Уравнению (1) удовлетворяет неявная функция вида

$$u(x, y) = f[y + \alpha \cdot x \cdot u(x, y)], \tag{2}$$

где $u(0, y) = f(y)$ — произвольная функция.

Аналогичное приближенное уравнение получено в работе [3] для сферического и цилиндрического симметричных полей

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{\nu r} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

где $\nu = 1$ для сферического поля и $\nu = 2$ для цилиндрического; $y = t - r / c_0$; r — радиальная координата.

Уравнение (3) имеет решение для сферического поля

$$w_c(r, y) = f[y + \alpha r_0 \ln r / r_0 w_c(r, y)] \tag{4}$$

и

$$w_ц(r, y) = f[y + 2\alpha r_0 (\sqrt{r / r_0} - 1) w_ц(r, y)] \tag{5}$$

для цилиндрического, где $w_c(r, y) = r / r_0 u(r, y)$, $w_ц(r, y) = \sqrt{r / r_0} \cdot u(r, y)$.

Ниже будет использована следующая общая форма решений (2), (4) и (5):

$$v(x, y) = f[y + \varphi(x) v(x, y)]. \tag{6}$$

Очевидно, результаты, полученные для решения (6), будут справедливы для любого типа поля при соответственном выборе функций $\varphi(x)$ и $v(x, y)$.

Пусть скорость жидкости $v(0, y)$ при $x = 0$ определяется стационарной случайной функцией $f(t)$. Ее статистические характеристики считаются известными. Момент первого порядка $\langle f(t) \rangle = 0$.

Выведем выражение для корреляционной функции $B(x, \tau) = \langle v(x, y) \cdot v(x, y+\tau) \rangle$ случайного поля скоростей $v(x, y)$. Напишем выражение (6) в виде интеграла Фурье:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp\{i\omega[y + \varphi(x) \cdot v(x, y)]\}\, d\omega, \tag{7}$$

где $S(\omega) = \int_{-\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$. Согласно условию стационарности функции $f(t)$,

$$\langle v(x, y) \rangle = \langle S(0) \rangle = \langle f(t) \rangle = 0. \tag{8}$$

Учитывая некоррелированность приращений $S(\omega) \cdot d\omega$ в спектральном разложении стационарной случайной функции $f(t)$ [4] и принимая во внимание формулу (8), получим

$$B(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \omega) \cdot F(\omega\varphi, -\omega\varphi, \tau) e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{9}$$

где $E(0, \omega) = \langle S(\omega)\ |^2 \rangle$, $F(\omega\varphi_1 - \omega\varphi_1\tau) = \langle \exp[i\omega\varphi v(x, y+\tau) + i\omega\varphi v(x, y)] \rangle$ — двумерная характеристическая функция поля $v(x, y)$. Из выражения (9) видно, что при $\tau = 0$ интенсивность процесса $v(x, y)$.

$$B(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \omega)\, d\omega \tag{10}$$

равна дисперсии σ^2 функции $f(t)$ и сохраняется постоянной независимо от расстояния x. Это же непосредственно следует из уравнения (1). При $x = 0$, как и следовало ожидать, получаем выражение для корреляционной функции источника $f(t)$.

Так как двумерная характеристическая функция $F(\omega\varphi_1 - \omega\varphi_1\tau)$ неизвестна, то для нахождения приближенного выражения для $B(x, \tau)$ можно использовать итерационный метод

$$B(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \omega) \bar{F}(\omega\varphi_1 - \omega\varphi_1\tau) e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{11}$$

где

$$\bar{F}(\omega\varphi_1 - \omega\varphi_1\tau) = \langle \exp[-i\omega\varphi f(y+\tau) + i\omega\varphi f(y)] \rangle.$$

Другая возможность получения приближенного соотношения основана на предположении о малом изменении плотности вероятности поля $v(x, y)$ на некотором интервале расстояний x. Тогда, например, при источнике нормального стационарного шума $f(t)$ для ограниченных расстояний x получим

$$B(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \omega) \exp\{-\omega^2\varphi^2[\sigma^2 - B(x, \tau)] + i\omega\tau\}\, d\omega, \tag{12}$$

или иначе

$$B(x, \tau) = \frac{1}{2\varphi\sqrt{\pi[\sigma^2 - B(x, \tau)]}} \int_{-\infty}^{\infty} B(0, u) \exp\left\{-\frac{(u-\tau)^2}{4\varphi^2[\sigma^2 - B(x, \tau)]}\right\} du. \tag{13}$$

Обращение интеграла (12) дает следующее выражение для энергетического спектра $E(x, \omega)$:

$$E(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \omega') \Phi(\omega, \omega')\, d\omega', \tag{14}$$

где

$$\Phi(\omega, \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\omega'^2\varphi^2[\sigma^2 - B(x, \tau)] + i\tau(\omega - \omega')\}\, d\tau. \qquad (15)$$

В частном случае для источника нормального шума с энергетическим спектром

$$E(0, \omega) = \frac{\sigma^2\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right] \qquad (16)$$

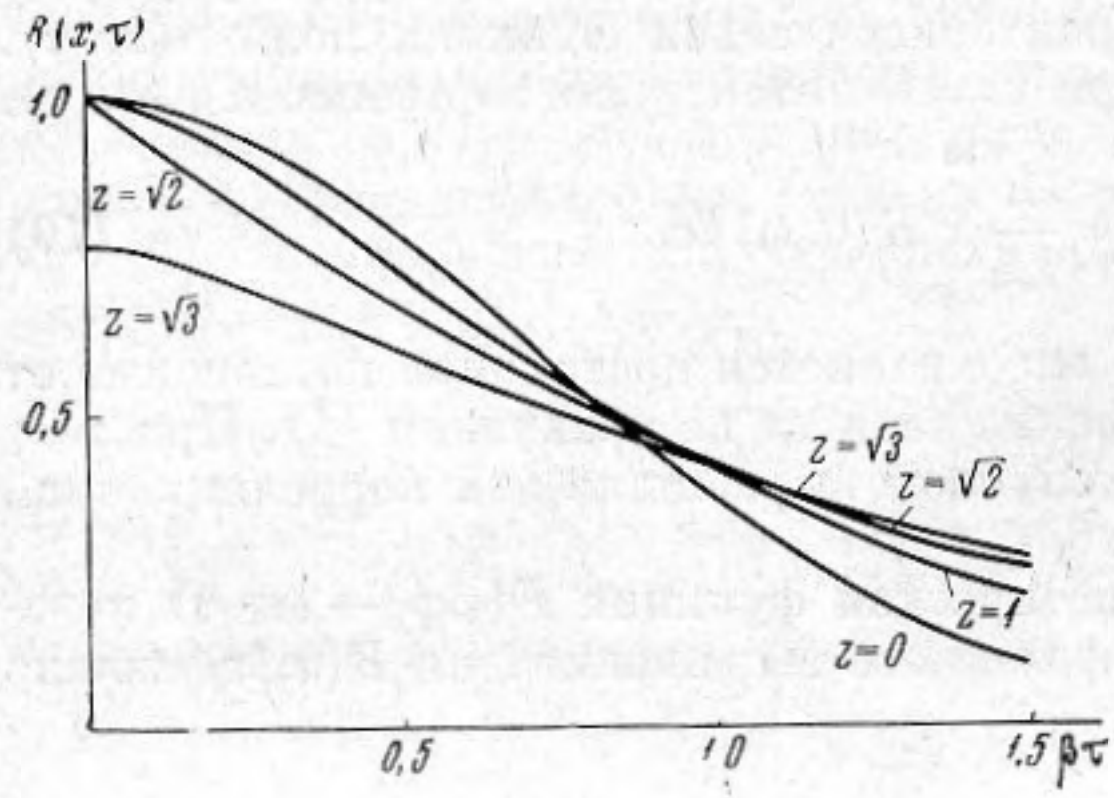
получим для корреляционной функции $B(x, \tau)$ следующее неявное выражение:

$$B(x, \tau) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{1 + z^2[1 - R(x, \tau)]}} \exp\left\{-\frac{\beta^2\tau^2}{1 + z^2[1 - R(x, \tau)]}\right\}, \qquad (17)$$

где $z = 2\beta\sigma\varphi(x)$ — безразмерное расстояние до источника, $\sigma^2 R(x, \tau) = B(x, \tau)$.

На фиг. 1 приведены кривые $R(x, \tau)$ для некоторых значений расстояния z. При $\tau = 0$ из формулы (17) получим уравнение для определения дисперсии $B(x, 0) = \sigma^2 R \cdot (x, 0)$ поля $v(x, y)$

$$z^2R^3(x, 0) - (1 + z^2) \cdot R^2(x, 0) + 1 = 0. \qquad (18)$$



Фиг. 1

Уравнению (18) всегда удовлетворяет решение $R_1 = 1$. Это решение находится в соответствии с принципом сохранения энергии для уравнения движения (1). Однако при $z^2 > 2$ появляется второе решение уравнения (18):

$$R_2(x, 0) = (1 + \sqrt{1 + 4z^2})\,/\,2z^2. \qquad (19)$$

Таким образом, в определении дисперсии $B(x, 0)$ процесса $v(x, y)$ при $z^2 > 2$ возникает неоднозначность. Для того, чтобы устранить эту неоднозначность, нужно проанализировать характер искажений волны конечной амплитуды.

Возвращаясь к выражению (6), заметим, что скорость u, с которой перемещаются точки профиля волны, равна

$$U = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v,$$

т. е. различная для разных точек профиля волны. Поэтому форма профиля изменяется; точки положительной фазы опережают точки отрицательной. В результате функции $v(t)$ (при заданном x) оказывается неоднозначной. Физически, разумеется, такое положение невозможно. В действительности, в местах неоднозначности возникают разрывы (ударные волны). Наличие разрывов приводит к сильной диссипации энергии [5]. Таким образом, появление второго значения дисперсии $\sigma^2 R_2(x, 0)$ связано с затуханием, вызванным диссипативными процессами в тонких слоях вещества, которые представляют собой ударные волны. Величина этой диссипации определяется одними лишь законами сохранения массы, энергии и импульса, примененными к обеим сторонам этих слоев.

Следовательно, выражение (19) описывает характер затухания интенсивности нормального стационарного процесса с энергетическим спектром

(16) в зависимости от расстояния z до источника, после образования ударной волны.

К тому же выводу можно прийти иным путем. Если вычислять, используя формулу (6), средний (по времени) квадрат одной реализации процесса $v(x_0, y)$ в фиксированной точке x_0,

$$I(x_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(x_0, y)\,dy = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_a^b f^2(z)\,dz - \varphi_0 \int_a^b f^2(z) f_z'\,dz \right\}, \tag{20}$$

то второй интеграл в формуле (20) для стационарной функции $f(t)$ исчезает, а в первом пределы интегрирования определяются из уравнения

$$y = z - \varphi f(z). \tag{21}$$

Разобьем весь интервал $[a, b]$ интегрирования на более мелкие интервалы так, чтобы на краях этих интервалов функция $f(z_i)$ обращалась в нуль, и рассмотрим один из таких интервалов

$$e_i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} f^2(z)\,dz. \tag{22}$$

При однозначной зависимости $z = z(y)$ длина $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ интервала интегрирования равна длине $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. В таком случае интеграл (20) не зависит от x_0 и будет

$$I_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(x_0, y)\,dy = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(z)\,dz \sim \sigma^2 R_1. \tag{23}$$

Однако при некоторых значениях φ_0 и $f(z_k)$ внутри интервала $[z_i, z_{i+1}]$ может появиться точка z_k (или несколько таких точек), в которой выполняется условие $y_i = z_k - \varphi_0 f(z_k)$, т. е. одному значению y_i будут соответствовать два значения z_i и z_k, а одному интервалу интегрирования на оси y $[y_i, y_{i+1}]$ будут соответствовать два интервала на оси z $[z_{i+1}, z_i]$ и $[z_{i+1}, z_k]$, причем $z_{i+1} - z_i > z_{i+1} - z_k$. Таким образом, появляется второе значение интеграла (20) $I_2(x_0) \sim \sigma^2 R_2(x_0, 0)$, уменьшающееся с ростом x_0.

Рассмотрим второй пример вычисления корреляционной функции. Пусть в точке $x = 0$ расположен источник гармонического колебания постоянной амплитуды $v_0/\sqrt{2}$ и частоты ω_0 со случайной фазой, распределенной равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$. Энергетический спектр такого колебания и двумерная характеристическая функция выражаются следующим образом [6]:

$$E(0, \omega) = \frac{\pi}{2} v_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \tag{24}$$

$$F_2(u_1, u_2, \tau) = J_0(v_0 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos \omega_0 \tau}), \tag{25}$$

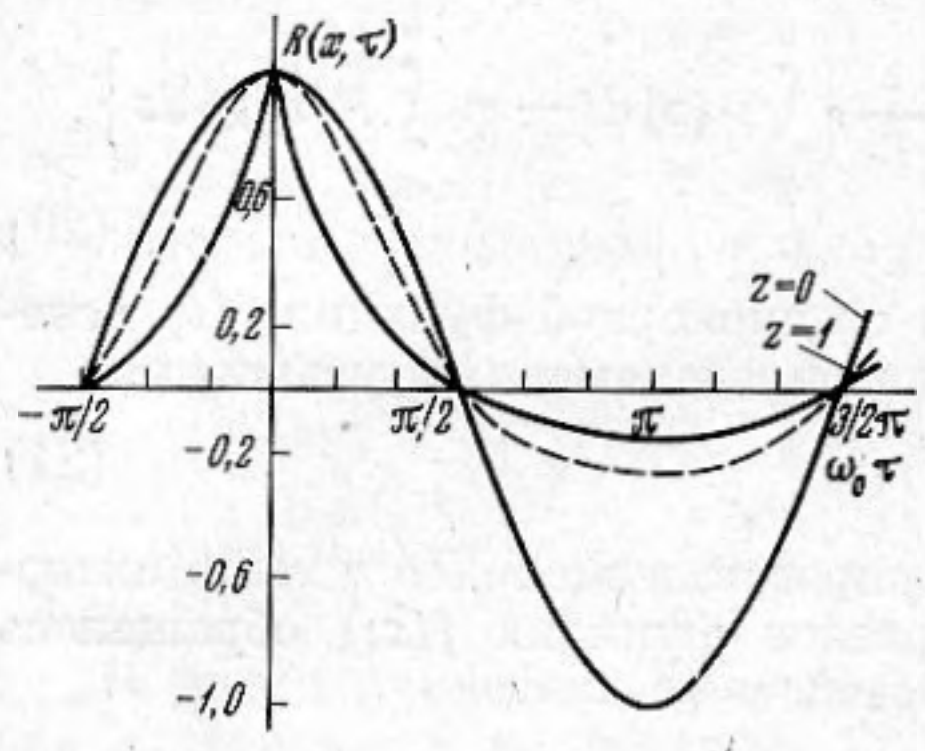
где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Подставляя эти выражения в формулу (9) и интегрируя, получим выражение для коэффициента корреляции $R(x, \tau) = \frac{2}{v_0^2} B(x, \tau)$.

$$R(x, \tau) = J_0(2z\sqrt{1 - R(x, \tau)}) \cos \omega_0 \tau, \tag{26}$$

где $z = v_0 \omega_0 \varphi / \sqrt{2}$. При $\tau = 0$ получаем уравнение для определения дисперсии (нормированной на величину $v_0^2/2$) процесса $v(x, y)$:

$$R(x, 0) = J_0(2z\sqrt{1 - R(x, 0)}). \tag{27}$$

Этому уравнению всегда удовлетворяет значение $R_1 = 1$. Второе решение R_2 появляется при $z \geqslant 1$. Этот результат совпадает с расстоянием образования ударной волны, полученным в работе [2]. Для сравнения получим выражение для коэффициента корреляции поля скоростей, образованного тем же источником со случайной фазой другим методом. Ограничившись одной итерацией, запишем приближенное выражение точного решения (6):



Фиг. 2

$$v(x, y) = v_0 \sin(\omega_0 y + z \cdot \sin \omega_0 y + \psi_{\text{случ}}). \qquad (28)$$

Умножая выражение (28) на такое же выражение, соответствующее моменту времени $y + \tau$ и усредняя произведение, после ряда несложных преобразований получим

$$R(x, \tau) = J_0\left(2z \sin \frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \cos \omega_0 \tau. \qquad (29)$$

Выражение (29) совпадает с результатом, полученным с использованием формулы (11).

На фиг. 2 приведены графики коэффициента корреляции $R(x, \tau)$ для источника со случайной фазой. Пунктирная кривая построена по формуле (29) для $z = 1$.

В заключение определим энергетический спектр поля $v(x, y)$. Так как полученное выше выражение для корреляционной функции неявно, то прямое получение спектра затруднительно. Поэтому для вычисления спектра снова обратимся к решению (6)

$$S(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{-i\omega y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)[1 - \varphi f_z'] \exp\{-i\omega[z - \varphi f(z)]\} dz. \qquad (30)$$

Замена переменной в интеграле (30) справедлива лишь в области однозначности $z = z(y)$ (21). После ряда преобразований получим

$$S(x, \omega) = \frac{1}{i\omega\varphi} \int_{-\infty} \exp[i\omega\varphi f(z) - i\omega z] dz. \qquad (31)$$

Умножая выражение (31) на сопряженное и учитывая некоррелированность спектральных приращений, после усреднения получим выражение для энергетического спектра $E(x, \omega)$ поля скоростей $v(x, y)$:

$$E(x, \omega) = \frac{1}{\omega^2\varphi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega\varphi, -\omega\varphi, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \qquad (32)$$

где

$$\tilde{F}(\omega\varphi, -\omega\varphi, \tau) = \langle \exp[-i\omega\varphi f(z + \tau) + i\omega\varphi f(z)] \rangle.$$

Для энергетического спектра гармонического источника со случайной фазой, учитывая формулу (25), мы получим следующее выражение:

$$E(x, \omega) = \frac{v_0^2}{z^2} \sum_{k=1} (-1)^k J_k^2(z)[\delta(\omega - k\omega_0) + \delta(\omega + k\omega_0)]. \qquad (33)$$

Выражение (33) соответствует известному выражению для спектра бегущей волны конечной амплитуды, полученному Фубини [7].

Автор приносит благодарность Р. В. Хохлову за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Кузнецов. Нелинейное распространение шумов. Доклад на VI Всес. акуст. конф. (секция Б). М., 1968.
2. R. V. Khokhlov, S. I. Soluyan. Propagation of acoustic waves of moderate amplitude through dissipative and relaxing media. Acustica, 1964, **14**, 5, 241—247.
3. R. V. Khokhlov, K. A. Naugolnych, S. I. Soluyan. Waves of moderate amplitudes in absorbing media. Acustica, 1964, **14**, 5, 248—253.
4. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1966.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1953.
6. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1. М., «Сов. радио», 1966.
7. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
16 декабря 1968 г.