

УДК 534.222

О ВЗАИМНОМ СПЕКТРЕ ПСЕВДОЗВУКОВЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДАВЛЕНИЙ В НИЗКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

А. В. Смольяков

Показано, что использование гипотезы Коркоса о подобии взаимных спектров турбулентных пульсаций давления приводит к появлению систематических ошибок в задачах с низкой характерной частотой и большим характерным масштабом длины. Оцениваются величины таких ошибок в задаче о разрешающей способности квадратного приемника в поле псевдозвуковых давлений под турбулентным пограничным слоем на плоской пластине.

Анализируя результаты измерений, Коркос [1] сформулировал весьма простую и удобную гипотезу о подобии взаимных спектров давления, действующих на поверхность плоской пластины со стороны дозвукового турбулентного пограничного слоя. В соответствии с работой [1] взаимный спектр

$$P(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

может быть представлен в форме

$$P(\xi, \omega) / P(0, \omega) = \Phi(\xi\omega / U_c), \quad (2)$$

где $R(\xi, \tau)$ — пространственно-временная (взаимная) корреляция давлений, ξ, τ — пространственный и временной, соответственно, интервалы между точками наблюдения; ω — круговая частота, $P(0, \omega)$ — частотный спектр энергии (частный случай выражения (1) при $\xi = 0$), U_c — скорость конвективного переноса поля псевдозвуковых давлений, которая при числах Маха $M \ll 1$ близка к скорости U_1 натекающего на пластину потока. На функцию в правой части (2) наложено единственное ограничение

$$\Phi(0) = 1, \quad (3)$$

необходимое для обеспечения тождества при $\xi = 0$.

Известно, что формула (2) неплохо согласуется с опытными данными для не слишком низких частот $\omega > U_1 / \delta^*$ (δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя). Однако можно показать, что при $\omega \rightarrow 0$ эта формула не может быть верной. В самом деле, из формул (1), (3) следует

$$P(\xi, 0) = P(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(0, \tau) d\tau = \text{const} \quad (4)$$

и, значит, частотно-волновой спектр

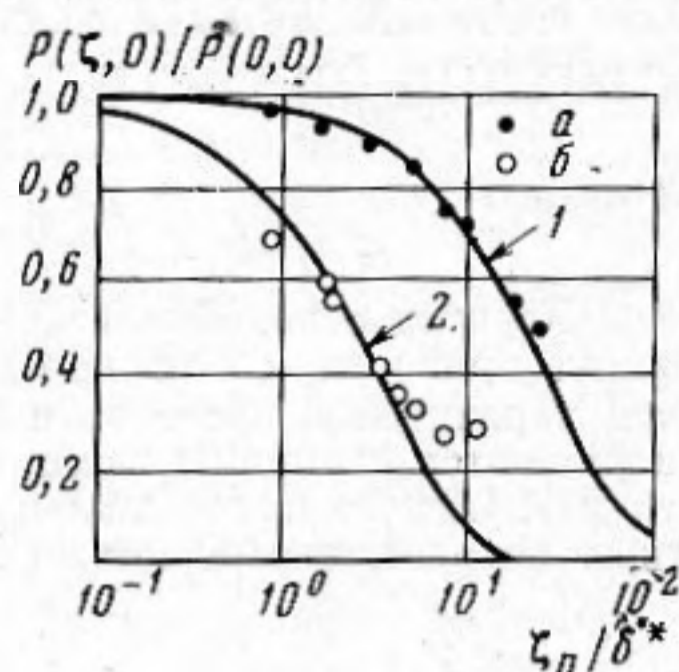
$$E(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \xi} d\xi_1 d\xi_2$$

при $\omega = 0$ принимает вид функции с разрывом при $k = 0$:

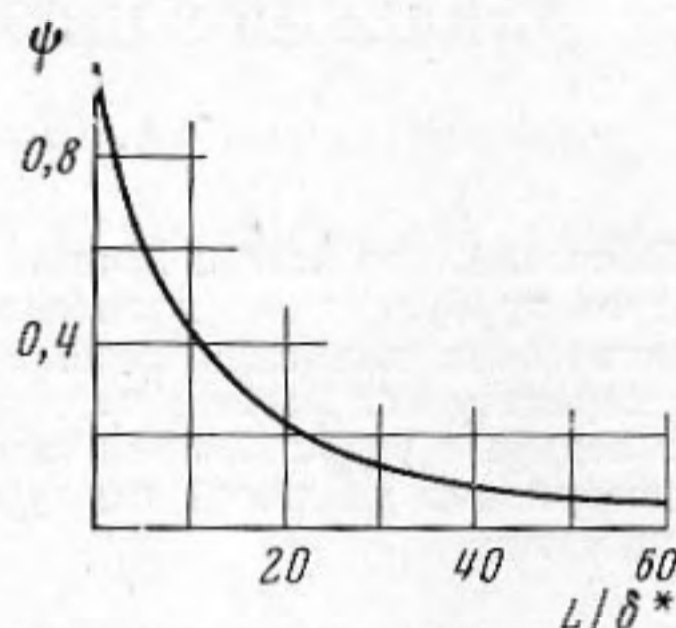
$$E(k, 0) = P(0, 0) \delta(k_1) \delta(k_2), \quad (5)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, k_1, k_2 — проекции волнового вектора k , соответствующие проекциям ζ_1, ζ_2 вектора ζ , причем ζ_1 ориентирована вниз по потоку, а ζ_2 ей перпендикулярна в плоскости пластины.

Физический смысл формулы (5) сводится к тому, что она выражает свойство абсолютной «замороженности» (в смысле Тэйлора) некоторого идеализированного поля турбулентных давлений в окрестности нулевой частоты: $E(k, 0) = 0$ при $k \neq 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кроме того, из формулы (5) следует, что $E = (0, 0) = \infty$, а это также недопустимо: для турбулентных пульсаций давления на стенке справедливо [2] соотношение $E(0, 0) \sim M^2$, которое для несжимаемой жидкости ($M = 0$) переходит в известное условие Крейчнана $E(0, 0) = 0$ [3].

Неудовлетворительный результат (5) обязан своим происхождением исключительно следствию (4) гипотезы, выражаемой формулами (2), (3). Результат станет логически непротиворечивым, если допустить, что взаимный спектр в окрестности нулевой частоты не постоянная величина, а некоторая (вещественная, абсолютно интегрируемая) функция вектора ζ . Недавние измерения Балла [4] показали, что $P(\zeta, 0) \simeq P(0, 0)$ только при малых $|\zeta|$, но $P(\zeta, 0) \ll P(0, 0)$ при больших $|\zeta|$ (фиг. 1, где точки a соответствуют $\zeta_2 = 0$, а точки b — $\zeta_1 = 0$).

Экспериментальные данные [4] и приведенные выше соображения позволяют предполагать, что в задачах с большим характерным масштабом длины и низкой характерной частотой использование формул (2), (3) должно приводить к появлению систематических ошибок. Ниже, в качестве примера, оцениваются величины таких ошибок при определении реакции пьезокерамического приемника больших размеров с квадратной чувствительной поверхностью на низкочастотные псевдозвуковые турбулентные давления.

Корректирующая функция, или отношение искаженного приемником частотного спектра энергии к действительному спектру может быть определена из выражения [1]:

$$\psi = \iint_S \Theta(\epsilon) \frac{P(\epsilon, \omega)}{P(0, \omega)} d\epsilon_1 d\epsilon_2, \quad (6)$$

где ϵ — вектор с компонентами ϵ_1, ϵ_2 , разделяющий две произвольные точки на поверхности приемника, имеющего площадь S , конфигурация которой характеризуется весовой функцией $\Theta(\epsilon)$. Для дальнейшего существенно то, что интеграл от этой функции по всей поверхности приемника равен единице.

Взаимный спектр турбулентного псевдозвука представим в форме

$$P(\zeta, \omega) = \frac{P(\zeta, 0)P(0, \omega)}{P(0, 0)} \Phi\left(\frac{\zeta\omega}{U_c}\right), \quad (7)$$

которая отличается от выражения (2) тем, что здесь не предполагается $P(\zeta, 0) = P(0, 0)$. Следуя работе [1], можно написать

$$\Phi\left(\frac{\zeta\omega}{U_c}\right) = \Phi_1\left(\frac{\zeta_1\omega}{U_c}\right)\Phi_2\left(\frac{\zeta_2\omega}{U_c}\right)\exp\left(-i\frac{\zeta_1\omega}{U_c}\right), \quad (8)$$

$$P(\zeta, 0) / P(0, 0) = \varphi_1(\zeta_1)\varphi_2(\zeta_2). \quad (9)$$

Функции, входящие в правую часть формулы (8), принято аппроксимировать экспонентами

$$\Phi_1 = \exp\left(-\alpha_1 \frac{|\zeta_1|\omega}{U_c}\right), \quad \Phi_2 = \exp\left(-\alpha_2 \frac{|\zeta_2|\omega}{U_c}\right) \quad (10)$$

и хотя в разных опытах [4, 5] значения α_1, α_2 несколько различны, однако, разброс данных невелик и можно считать, что результаты группируются около $\alpha_1 = 0,088$ и $\alpha_2 = 0,56$. Функции правой части (9) также можно аппроксимировать с помощью экспоненциальных зависимостей

$$\varphi_1 = \exp\left(-\mu_1 \frac{|\zeta_1|}{\delta^*}\right), \quad \varphi_2 = \exp\left(-\mu_2 \frac{|\zeta_2|}{\delta^*}\right), \quad (11)$$

которые при $\mu_1 = 0,037$ и $\mu_2 = 0,30$ показаны на фиг. 1 кривыми 1 и 2 соответственно.

С помощью $\Theta(\varepsilon)$ для квадратного приемника [1] и формул (6) — (11) можно получить

$$\psi = \frac{4(b-1+e^{-b})[a(a^2+\omega_0^2) + (a^2-\omega_0^2)(e^{-a}\cos\omega_0-1) - 2a\omega_0e^{-a}\sin\omega_0]}{b^2(a^2+\omega_0^2)^2} \quad (12)$$

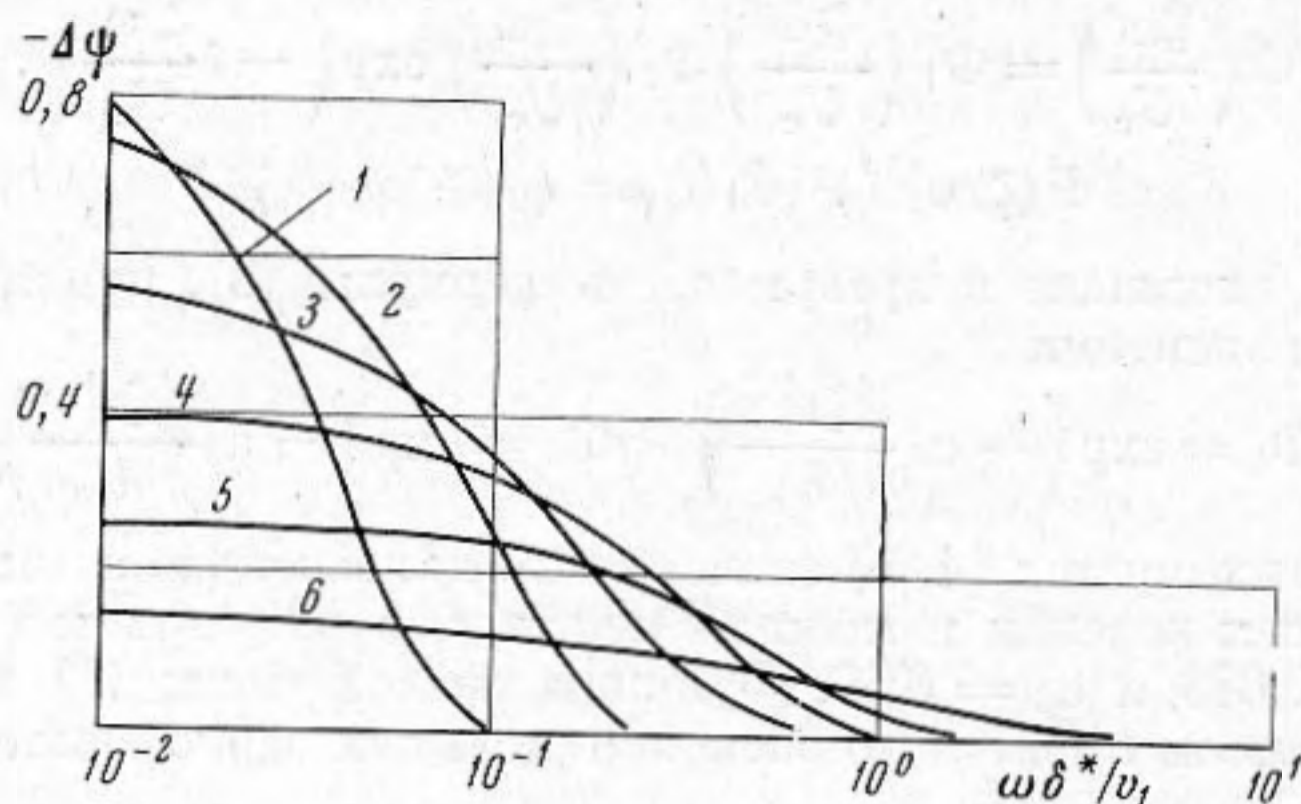
где $\omega_0 = \omega L / U_c$, $a = \mu_1 L / \delta^* + \alpha_1 \omega_0$, $b = \mu_2 L / \delta^* + \alpha_2 \omega_0$, L — размер стороны квадратного приемника.

При $a_n \omega_0 \gg \mu_n L / \delta^*$ ($n = 1, 2$) зависимость (12) близка к корректирующей функции ψ_0 Коркоса [1] и полностью совпадает с ней при $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Но на низких частотах для приемника большого размера эти функции могут быть существенно различными. В предельном случае $\omega \delta^* / U_1 = 0$ имеет место $\psi_0 = 1$ для приемника любого размера, что непосредственно вытекает из формулы (6) и отмеченного выше свойства $\Theta(\varepsilon)$ при условии $P(\zeta, 0) = P(0, 0)$, которое равносильно $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Для этого же случая $\omega \delta^* / U_1 = 0$ функция (12) показана на фиг. 2, откуда видно, что $\psi = 1$ только для приемника исчезающе малых размеров и отличается от единицы тем сильнее, чем больше L / δ^* .

Различию в значениях ψ и ψ_0 при $\omega \delta^* / U_1 = 0$ можно дать следующее физическое объяснение. Так как подобие (2) — (3) эквивалентно в окрестности нулевой частоты гипотезе Тэйлора, то при $\omega \rightarrow 0$ энергонесущим масштабам приписываются неограниченно большие размеры $1 / |k| \rightarrow \infty$. Для таких масштабов поле давлений в пределах приемника любого конечного размера полностью когерентно. Поэтому при измерениях не должны возникать искажения ($\psi_0 = 1$), обусловленные статистическим осреднением давлений по пространству.

В реальной турбулентности энергия давлений в окрестности нулевой частоты обусловлена неоднородностями всех масштабов (хотя и с разной долей их участия) из диапазона волновых чисел от нуля до бесконечности. Среди них есть масштабы, размеры которых меньше характерного размера приемника. Следовательно, осредняющий эффект и связанные с ним искажения при измерениях ($\psi < 1$) будут тем сильнее, чем больше приемник, что и показано на фиг. 2.

На фиг. 3 для широкого диапазона частот изображены погрешности $\Delta\psi = \psi - \psi_0$, которые возникают при определении корректирующей функции, если используется гипотеза о подобии взаимных спектров (кривым 1, 2, 3, 4, 5 и 6 соответствуют $L/\delta^* = 50; 20; 10; 5; 3$ и 1). Можно видеть, что погрешности существенны в низкочастотной области и для приемников больших ($L/\delta^* > 3$) размеров. Полученный результат находится



Фиг. 3

в качественном согласии с данными Лямшева и Салосиной [6], которые экспериментально обнаружили, что разрешающая способность приемников тем сильнее уклоняется от функции Коркоса, чем больше их размер и чем ниже частота. Опыты [6], однако, выполнены на теле вращения с круглыми приемниками, что не позволяет сопоставлять их количественно с результатами, полученными здесь для плоской пластины и приемников квадратной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. M. Corcos. Resolution of pressure in turbulence. J. Acoust. Soc. America, 1963, 35, 2, 192—199.
2. J. E. Ffowcs Williams. Surface-pressure fluctuations by boundary layer flow at finite Mach number. J. Fluid Mech., 1965, 22, 3, 507—519.
3. R. H. Kraichnan. Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate. J. Acoust. Soc. America, 1956, 28, 3, 378—382.
4. M. K. Bull. Wall-pressure fluctuations associated with subsonic turbulent boundary flow. J. Fluid Mech., 1967, 28, 4, 719—754.
5. W. W. Willmarth, F. W. Roos. Resolution and structure of wall pressure field beneath a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1965, 22, 1, 81—94.
6. Л. М. Лямшев, С. А. Салосина. О влиянии размеров приемника на результаты измерений спектра пристеночных пульсаций давления в пограничном слое. Акуст. ж., 1966, 12, 2, 261—263.

Ленинград

Поступила в редакцию
21 февраля 1969 г.