АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 3

УДК 534.26

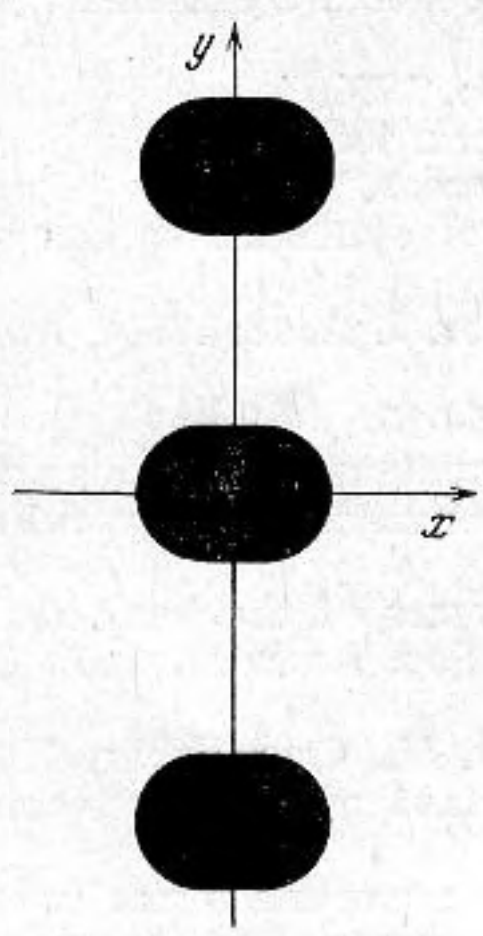
ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ЧАСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

В. М. Астапенко, Г. Д. Малюжинец

Задача о дифракции плоской звуковой волны на частой периодической решетке сведена к двум задачам о рассеянии той же волны на частых периодических гофрированных поверхностях соответственно с неймановским и смешанным краевыми условиями. Каждая из двух последних задач в свою очередь сведена разложением в ряд по волновому числу к двум рекуррентным последовательностям краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона.

Показано, что коэффициенты рассеяния вышеназванных поверхностей и коэффициенты отражения и пропускания исходной решетки определяются коэффициентами форм, которые зависят только от геометрических параметров решетки. Разложения по степеням волнового числа коэффициентов рассеяния поверхностей и коэффициентов отражения и пропускания решетки с точностью вплоть до квадрата волнового числа определяются коэффициентами присоединенных масс решетки.

Пусть в плоскости xy расположена решетка с периодом $2c$, элементами которой являются выпуклые области, имеющие две взаимно перпендикулярные оси симметрии, одна из которых совпадает с осью y (фиг. 1). Обозначим через Г кусочно гладкую кривую, являющуюся границей рассматриваемой решетки, через L — совокупность отрезков оси y, лежащих вне Г, а через D — область, расположенную вне решетки.



Фиг. 1

Пусть справа на решетку падает плоская волна $p_0 = e^{-ik(x\cos\theta - y\sin\theta)}$, где k — волновое число, θ — угол между направлением распространения волны p_0 и осью x.

Задача о дифракции плоской волны p_0 на частой периодической решетке с идеально жесткой границей заключается в определении функции $p = p(x, y; k)$ — регулярной по k при $|k| < \pi/2c$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta p + k^2 p = 0 \text{ в } D, \ \partial p/\partial n|_{\Gamma} = 0$$

$$\sup_D |(p - p_0)e^{-iky\sin\theta}| < \infty \text{ при } \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k|,$$

где n — нормаль к Г, направленная внутрь D.

Эту задачу в дальнейшем будем называть задачей A. Заметим, что решение этой задачи обладает следующим свойством:

$$p(x, y - c)e^{ikc\sin\theta} = p(x, y + c)e^{-ikc\sin\theta}, \quad (1)$$

которое вытекает из того, что функция $pe^{-iky\sin\theta}$ удовлетворяет условиям, являющимся периодическими по y с периодом $2c$.

Далее, обозначим часть области D, находящуюся слева от оси y, через D_-, а справа — через D^+ и разобьем функцию p в области D^+ на сумму четной

и нечетной по x частей, т. е. представим p следующим образом:

$$p(x, y) = p_1(x, y) + p_2(x, y), \tag{2}$$

где

$$p_1(x, y) = p_1(-x, y),\ p_2(x, y) = -p_2(-x, y) \tag{3}$$

и удовлетворяют соответственно следующим задачам о рассеянии:

1. Задача о рассеянии плоской волны $\frac{1}{2} p_0$ на частой периодической гофрированной поверхности с идеальной жесткой границей, заключающаяся в определении функции $p_1 = p_1(x, y; k)$, регулярной по k при $|k| < \pi / 2c$ и удовлетворяющей следующим условиям:

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0 \quad \text{в } D^+, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial n}\right|_{\Gamma^+} = 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial x}\right|_L = 0, \tag{6}$$

$$\sup_{D^+} \left| \left(p_1 - \frac{1}{2} p_0\right) e^{-iky \sin\theta} \right| < \infty \quad \text{при } \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k| \tag{7}$$

где Γ^+ — часть Γ, лежащая справа от оси y. Эту задачу в дальнейшем мы будем называть задачей A_1.

2. Под задачей о рассеянии A_2 будет пониматься такая задача, которая совпадает с задачей A_1, за исключением условия (6), которое заменяется на следующее:

$$p_2|_L = 0. \tag{8}$$

Если воспользоваться симметричностью D относительно оси y и учесть формулу (3), то при помощи равенства (2) функцию p в D^- можно представить таким образом:

$$p(x, y) = p_1(-x, y) - p_2(-x, y). \tag{9}$$

Итак, решение задачи A в многосвязной области D сведено к решениям задач A_1 и A_2 в односвязной области D^+ и определяется из соотношений (2) и (9).

Найдем теперь асимптотику p_q $(q = 1, 2)$ при $x \to \infty$ и $|k| < \pi / 2c$. Для этого заметим, что в силу формулы (1) функции $p_q e^{-iky \sin\theta}$ являются периодическими с периодом $2c$, а значит представимы в виде ряда Фурье:

$$p_q e^{-iky \sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(x)\, e^{i \frac{\pi n}{c} y}, \tag{10}$$

Если ряд (10) подставить в уравнение (4), то получим

$$\frac{d^2 C_n}{dx^2} + \left(\frac{\pi n}{c} \lambda_n\right)^2 C_n = 0,$$

где $\frac{\pi n}{c} \lambda_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{c} + k \sin\theta\right)^2 - k^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

причем функция $\sqrt{\lambda_n^2}$ $(|n| > 0)$ определяется в плоскости комплексного переменного λ_n^2 с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re} \lambda_n^2 < 0$, $\operatorname{Im} \lambda_n^2 = 0$ и принимает значение $\sqrt{\lambda_n^2} = 1$ при $k = 0$. Прямым расчетом получается неравенство

$\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ при $|n| > 0$, $|k| < \pi/2c$, которое с учетом формулы (7) позволяет переписать формулу (10) иначе:

$$p_q e^{-iky\sin\theta} = \frac{1}{2} e^{-ikx\cos\theta} + V_q e^{ikx\cos\theta} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n e^{\frac{\pi n}{c}\left[-x\sqrt{\left(1-\frac{kc}{n\pi}\sin\theta\right)^2-\left(\frac{kc}{n\pi}\right)^2}-iy\right]} + b_n e^{\frac{\pi n}{c}\left[-x\sqrt{\left(1+\frac{kc}{n\pi}\sin\theta\right)^2-\left(\frac{kc}{n\pi}\right)^2}+iy\right]}\right\}.$$

Если теперь учесть, что при $|k| < \pi/2c$ и $|n| > 0$

$$0 < \operatorname{Re}\sqrt{\left(\frac{\pi|n|}{c} \pm k\sin\theta\right)^2 - k^2} < \operatorname{Re}\sqrt{\left(\frac{\pi|n|}{c} \pm k\sin\theta + \frac{\pi}{c}\right)^2 - k^2},$$

то получим асимптотику p_q при $x \to \infty$ в следующем виде:

$$p_q e^{-iky\sin\theta} = \frac{1}{2} e^{-ikx\sin\theta} + V_q e^{ikx\cos\theta} + O\left(e^{-\alpha\frac{\pi}{c}x}\right), \tag{11}$$

где

$$\alpha = \min_{|k| \leqslant \frac{\pi}{2c}-\varepsilon} \operatorname{Re}\sqrt{\left(1 \pm \frac{kc}{\pi}\sin\theta\right)^2 - \left(\frac{kc}{\pi}\right)^2}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2c}$$

и V_q не зависят от x и y.

Переходим к изучению задачи A_1. Прежде всего заметим, что представление (11) позволяет искать p_1 в виде

$$p_1 = \frac{1}{2} p_0 + e^{iky\sin\theta}\left[\frac{1}{2}\frac{\cos\theta + iB}{\cos\theta + iB} e^{ikx\cos\theta} + \frac{u\cos\theta}{\cos\theta - iB}\right] \tag{12}$$

где u и B удовлетворяют таким условиям:

$$\Delta u + 2ik\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + k^2\cos^2\theta u = 0 \text{ в } D^+, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik\sin\theta\frac{\partial y}{\partial n}u\Big|_{L+\Gamma^+} = -ik\sin\theta\left[\cos(kx\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - B\frac{\sin(kx\cos\theta)}{\cos\theta}\right]\frac{\partial y}{\partial n} + k\left[\cos\theta\sin(kx\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + B\cos(kx\cos\theta)\right]\frac{\partial x}{\partial n}\Big|_{L+\Gamma^+}, \tag{14}$$

$$u = O\left(e^{-\alpha\frac{\pi}{c}x}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \ \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k|, \tag{15}$$

$$4cB = -\cos\theta\int_{T_0}(2kx\cos\theta)\frac{\partial x}{\partial n}dl - B\int_{T_0}[\cos(2kx\cos\theta) - 1]\frac{\partial x}{\partial n}dl -$$

$$-2\cos\theta\int_{T_0} u\sin(kx\cos\theta)\frac{\partial x}{\partial n}dl - 2i\sin\theta\int_{T_0} u\cos(kx\cos\theta)\frac{\partial y}{\partial n}dl. \tag{16}$$

Здесь введены следующие обозначения: $T_0 = \Gamma_0 + L_0$, где Γ_0 и L_0 являются частями Γ_+ и L, расположенными в полосе $-c < y < c$.

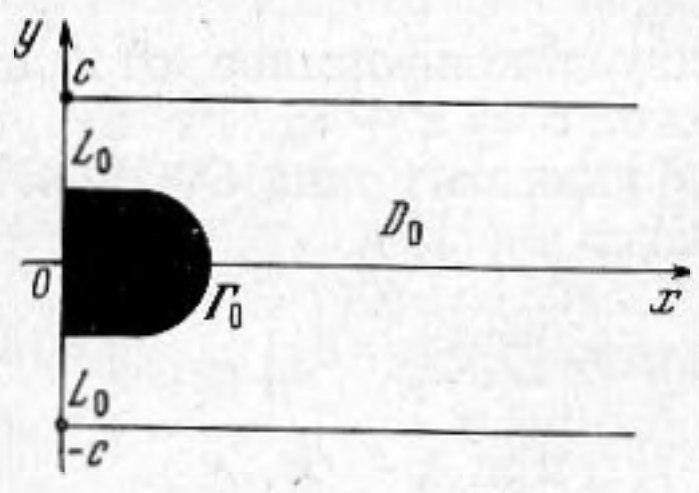
Соотношения (13) — (15) получаются непосредственно из формул (4) — (7) с использованием выражения (12), а интегральное тождество (16) на-

ходится в результате применения формулы Грина по области D_0 к функциям p_1, $\cos(kx\cos\theta)e^{-iky\sin\theta}$. Через D_0 обозначена такая область, граница которой состоит из T_0 и полупрямых $x>0$, $y=\pm c\}$ (фиг. 2). Так как u — периодическая функция, то все дальнейшее рассмотрение будет проводиться в одной полуполосе, например D_0.

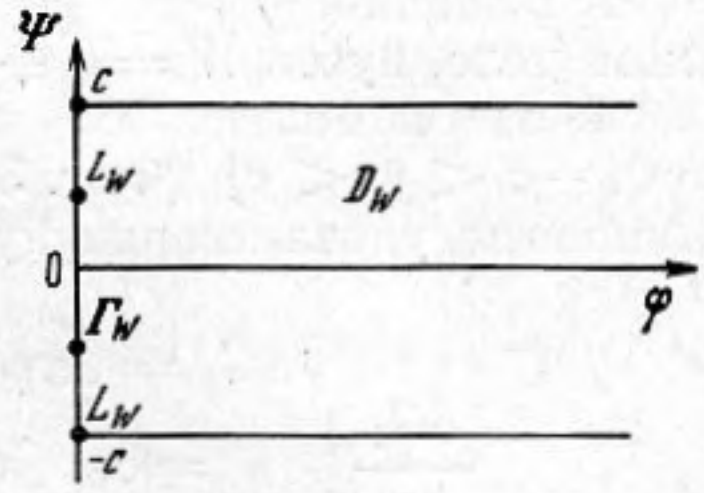
Если теперь u и B разложить в степенные ряды по k в окрестности $k=0$

$$u=\sum_{p=1}^{\infty}u_pk^p,\quad B=\sum_{p=1}^{\infty}B_pk^p \tag{17}$$

и подставить (17) в формулы (13)—(16), предварительно разложив все функции, стоящие в их правых частях в степенные ряды по k в окрестно-



Фиг. 2



Фиг. 3

сти $k=0$, собрать все члены, имеющие одинаковую степень k, и их сумму приравнять нулю, то получим следующую рекуррентную последовательность задач A_1^p при $p=1,2,\ldots$:

$$\Delta u_p+2i\sin\theta\frac{\partial u_{p-1}}{\partial y}+\cos^2\theta u_{p-2}=0\quad\text{в } D_0,$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial n}+i\sin\theta\frac{\partial y}{\partial n}u_{p-1}\Big|_{T_0}=-i\sin\theta\Big[\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(ix\cos\theta)^{p-1}}{(p-1)!}-$$

$$-\sum_{r=1}^{p-2}\frac{1-(-1)^r}{2i}\frac{(ix\cos\theta)^r}{r!\cos\theta}B_{p-r-1}\Big]\frac{\partial y}{\partial n}+\cos\theta\Big[\frac{1+(-1)^p}{2i}\times$$

$$\times\frac{(ix\cos\theta)^{p-1}}{(p-1)!}+\sum_{r=0}^{p-2}\frac{1+(-1)^r}{2}\frac{(ix\cos\theta)^r}{r!\cos\theta}B_{p-r-1}\Big]\frac{\partial x}{\partial n}\Big|_{T_0}, \tag{18}$$

$$u_p=O\left(e^{-\frac{\pi}{c}x}\right)\quad\text{при}\quad x\to\infty,\ u_p(x,c)=u_p(x,-c),$$

$$4cB_p=-\frac{1-(-1)^p}{2i}\frac{(2i\cos\theta)^p}{p!}M_p\cos\theta-$$

$$-\sum_{r=1}^{p-1}\frac{1+(-1)^r}{2}\frac{(2i\cos\theta)^r}{r!}B_{p-r}M_r+$$

$$+2i\cos\theta\sum_{r=1}^{p-1}\frac{1-(-1)^r}{2}\frac{(i\cos\theta)^r}{r!}\mu_{p-r}^{r}-$$

$$-2i\sin\theta\sum_{r=0}^{p-1}\frac{1+(-1)^r}{2}\frac{(i\cos\theta)^r}{r!}\lambda_{p-r}^{r}, \tag{19}$$

где

$$M_p = \int\limits_{T_0} x^p \frac{\partial x}{\partial n} dl, \qquad \mu_p{}^r = \int\limits_{T_0} x^r u_p \frac{\partial x}{\partial n} dl, \qquad \lambda_p{}^r = \int\limits_{T_0} x^r u_p \frac{\partial y}{\partial n} dl \qquad (20)$$

и положено $u_p = B_p \equiv 0$ при $p \leqslant 0$.

Итак, краевая задача A_1 сведена к рекуррентной последовательности задач $A_1{}^p$ для уравнений Лапласа и Пуассона.

Приступим к изучению основных свойств этой последовательности. Для этого с самого начала покажем, что решение следующей задачи

$$\Delta H = 0 \text{ в } D_0, \left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_{T_0} = 0, \quad H = O\left(e^{-\frac{\pi}{c}x}\right) \text{при } x \to \infty, H(x, c) = H(x, -c) \qquad (21)$$

есть нулевое решение.

В самом деле, пусть $W = \varphi + i\psi$ реализует конформное отображение D_0 в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ на полуполосу $D_W\{\varphi > 0, -c < \psi < c\}$ (Фиг. 3). Тогда функцию Грина $G_1(W, W_0)$ для этой полуполосы, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta G_1 = 2\pi\delta(W - W_0) \quad \text{в } D_W,$$

$$\left.\frac{\partial G_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \quad G_1 = O(\varphi) \quad \text{при } \varphi \to \infty,$$

$$G_1(W + ic, W_0) = G_1(W - ic, W_0),$$

можно построить методом отражений в следующем виде:

$$G_1(W, W_0) = \\ = \ln \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\pi}{c}(\varphi - \varphi_0) - \cos\frac{\pi}{c}(\psi - \psi_0)}\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\pi}{c}(\varphi + \varphi_0) - \cos\frac{\pi}{c}(\psi - \psi_0)}}.$$

Если в последний результат подставить $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$, то мы получим функцию Грина для области D_0 с неймановским однородным краевым условием на T_0

$$\Gamma_1(x, y; x_0, y_0) = G_1[\varphi(x, y), \psi(x, y); \varphi_0(x_0, y_0), \psi_0(x_0, y_0)].$$

Далее, если воспользоваться формулой Грина по области D_0 для H и Γ_1, то найдем

$$H(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_0}\left(H\frac{\partial \Gamma_1}{\partial n} - \Gamma_1\frac{\partial H}{\partial n}\right) dl + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_0} \Gamma_1 \Delta H\, dx\, dy \equiv 0.$$

Этот результат позволяет по индукции доказать существование и единственность решения рекуррентной последовательности задач $A_1{}^p$. Действительно, решение задачи $A_1{}^1$ можно получить из формулы Грина с помощью Γ_1

$$u_1(x_0, y_0) = i\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_{T_0} \Gamma_1(x, y; x_0, y_0)\frac{\partial y}{\partial n} dl.$$

Единственность u_1 следует из того, что разность двух решений $A_1{}^1$ удовлетворяет задаче (21).

Допустим теперь, что доказано существование единственного решения у каждой задачи $A_1{}^p$, покажем, что существует единственное решение за-

дачи A_1^{p+1}. С помощью Γ_1 можно u_{p+1} представить так:

$$u_{p+1}(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_0} \Gamma_1 \frac{\partial u_{p+1}}{\partial n} dl -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_0} \left(2i \sin\theta \frac{\partial u_p}{\partial y} + \cos^2\theta u_{p-1} \right) \Gamma_1 \, dx \, dy,$$

где $\left.\frac{\partial u_{p+1}}{\partial n}\right|_{T_0}$ выражается через $u_p|_{T_0}$ с помощью формулы (18). Так как все функции u_p — единственны, то разность двух решений задачи A_1^{p+1} удовлетворяет задаче (21), а значит u_{p+1} — единственна.

Основываясь на единственности решения каждой A_1^{p+1}, покажем по индукции справедливость следующих равенств:

$$u_{2p-1}(x, y) = -u_{2p-1}(x, -y), \; u_{2p}(x, y) = u_{2p}(x, -y), \tag{22}$$

$$B_{2p} \equiv 0. \tag{23}$$

Сначала заметим, что предположения относительно нечетности u_1 и четности u_2 не меняют условий задач A_1^1 и A_1^2, поэтому u_1 и u_2 действительно удовлетворяют условиям (22).

Из формулы (19) для случая $p = 2$ имеем

$$B_2 = -\frac{\mu_1^1}{2c}\cos^2\theta - i\frac{\lambda_2^0}{2c}\sin\theta,$$

где $\mu_1^1 = \int\limits_{T_0} x u_1 \frac{\partial x}{\partial n} dl, \quad \lambda_2^0 = \int\limits_{T_0} u_2 \frac{\partial y}{\partial n} dl.$

Так как подынтегральные выражения двух последних функционалов являются четными по y, то, учитывая симметричность T_0 относительно оси x, получим

$$\mu_1^1 = \lambda_2^0 = B_2 \equiv 0.$$

Пусть утверждения (22), (23) справедливы для номеров вплоть до $2p$; покажем, что

$$u_{2p+1}(x, y) = -u_{2p+1}(x, -y), \; u_{2p+2}(x, y) = u_{2p+2}(x, -y), B_{2p+2} \equiv 0.$$

Прежде всего заметим, что формулы (22) и (23) позволяют переписать выражения (18) в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial u_{2p+1}}{\partial n} + i\sin\theta \frac{\partial y}{\partial n} u_{2p}\right|_{T_0} =$$

$$= -i\sin\theta \left[\frac{(ix\cos\theta)^{2p}}{(2p)!} - \sum_{r=1}^{2p-1} \frac{(ix\cos\theta)^{2r-1}}{i(2r-1)!\cos\theta} B_{2p-2r-1} \right] \left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{T_0},$$

$$\left.\frac{\partial u_{2p+2}}{\partial n} + i\sin\theta \frac{\partial y}{\partial n} u_{2p+1}\right|_{T_0} =$$

$$= \left[-i\frac{(ix\cos\theta)^{2p+1}}{(2p+1)!}\cos\theta + \sum_{r=1}^{2p} \frac{(ix\cos\theta)^{2r}}{(2r)!} B_{2p-2r+1} \right] \left.\frac{\partial x}{\partial n}\right|_{T_0}.$$

Если предположить, что u_{2p+1} — нечетная по y, а u_{2p+2}, соответственно четная, то формулировки задач A_1^{2p+1} и A_1^{2p+2} останутся прежними, а зна-

чит, вследствие единственности решений задач A_1^{2p+1} и A_1^{2p+2}, u_{p+1} действительно является нечетной по y, а u_{2p+2} — четной.

Напишем выражения для B_{2p+2}:

$$B_{2p+2}=\frac{i\cos\theta}{2c}\sum_{r=1}^{2p+1}\frac{(i\cos\theta)^{2r-1}}{(2r-1)!}\mu_{2p-2r+3}^{2r-1}-$$

$$-i\frac{\sin\theta}{2c}\sum_{r=0}^{2p+1}\frac{(i\cos\theta)^{2r}}{(2r)!}\lambda_{2p-2r+2}^{2r},$$

где

$$\mu_{2p-2r+3}^{2r-1}=\int_{T_0}x^{2r-1}u_{2p-2r+3}\frac{\partial x}{\partial n}dl,\quad \lambda_{2p-2r+2}^{2r}=\int_{T_0}x^{2r}u_{2p-2r+2}\frac{\partial y}{\partial n}dl.$$

Подынтегральные выражения $\mu_{2p-2r+3}^{2r-1}$ и $\lambda_{2p-2r+2}^{2r}$ являются четными по y, поэтому, в силу симметричности T_0 относительно оси x, $\mu_{2p-2r+3}^{2r-1}$, $\lambda_{2p-2r+2}^{2r}$ равны нулю, т. е. $B_{2p+2}\equiv 0$. Переходим к задаче A_2. Ее решение, на основании формулы (11), будем искать в виде

$$p_2=\frac{1}{2}p_0+e^{iky\sin\theta}\left[-\frac{1}{2}\frac{1+iC}{1-iC}e^{ikx\cos\theta}+\frac{iv}{1-iC}\right] \tag{24}$$

где v и C удовлетворяют следующим условиям:

$$\Delta v+2ik\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y}+k^2\cos^2\theta\cdot v=0 \text{ в } D^+, \tag{25}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}+ik\sin\theta\frac{\partial y}{\partial n}v\Big|_{\Gamma^+}=ik\sin\theta\,[\sin(kx\cos\theta)+C\cos(kx\cos\theta)]\frac{\partial y}{\partial n}+$$

$$+k\cos\theta\,[\cos(kx\cos\theta)-C\sin(kx\cos\theta)]\frac{\partial x}{\partial n}\Big|_{\Gamma^+}, \tag{26}$$

$$v|_L=C, \tag{27}$$

$$v=O(e^{-\alpha\frac{\pi}{c}x})\quad\text{при}\quad x\to\infty,\ \operatorname{Im}k>|\operatorname{Re}k|, \tag{28}$$

$$C=i\frac{\operatorname{tg}\theta}{2l}\int_{\Gamma_0}v\sin(kx\cos\theta)\frac{\partial y}{\partial n}dl-\frac{1}{2l}\int_{\Gamma_0}v\cos(kx\cos\theta)\frac{\partial x}{\partial n}dl+$$

$$+\frac{1}{4l}\int_{\Gamma_0}\{\sin(2kx\cos\theta)+C[\cos(2kx\cos\theta)-1]\}\frac{\partial x}{\partial n}dl, \tag{29}$$

где $2l$ равна длине L_0 и $l>0$.

Равенства (25) — (28) получаются из формул (4), (5), (7) и (8) с учетом выражения (24), а интегральное тождество (29), связывающее v и C, находится из формулы Грина, примененной по области D_0 для функций p_2 и $\sin(kx\cos\theta)e^{-iky\sin\theta}$, подобно тому как это делалось при сведении A_1 к рекуррентной последовательности A_1^p.

Далее, предположим справедливость таких разложений:

$$v=\sum_{p=1}^{\infty} v_p k^p, \qquad C=\sum_{p=1}^{\infty} C_p k^p, \tag{30}$$

где v_p и C_p не зависят от k.

Если теперь представить степенными рядами по k в окрестности $k=0$ левые и правые части (25) — (29), то получим следующую рекуррентную последовательность задач $A_2{}^p$ для уравнения Пуассона:

$$\Delta v_p + 2i\sin\theta\frac{\partial v_{p-1}}{\partial y} + \cos^2\theta\, v_{p-2} = 0 \text{ в } D_0,$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial n} + i\sin\theta\frac{\partial y}{\partial n} v_{p-1}\Big|_{\Gamma_0} = \cos\theta\Big[\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(ix\cos\theta)^{p-1}}{(p-1)!} -$$

$$-\sum_{r=1}^{p-2}\frac{1-(-1)^r}{2i}\frac{(ix\cos\theta)^r}{r!}C_{p-r-1}\Big]\frac{\partial x}{\partial n} + i\sin\theta\Big[\frac{1+(-1)^p}{2i}\times$$

$$\times\frac{(ix\cos\theta)^{p-1}}{(p-1)!} + \sum_{r=0}^{p-2}\frac{1-(-1)^r}{2}\frac{(ix\cos\theta)^r}{r!}C_{p-r-1}\Big]\frac{\partial y}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0},$$

$$v_p|_{L_0} = C_p,\ v_p(x,c) = v_p(x,-c),\ v_p = O(e^{-\frac{\pi}{c}x}) \text{ при } x\to\infty,$$

$$C_p = \frac{1-(-1)^p}{8il}\frac{(2i\cos\theta)^p}{p!}M_p + \sum_{r=1}^{p-1}\frac{1+(-1)^r}{8l}\frac{(2i\cos\theta)^r}{r!}C_{p-r}M_r +$$

$$+\frac{\operatorname{tg}\theta}{2l}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{1-(-1)^r}{2}\frac{(i\cos\theta)^r}{r!}\sigma_{p-r}^r - \sum_{r=0}^{p-1}\frac{1+(-1)^r}{4l}\frac{(i\cos\theta)^r}{r!}\nu_{p-r}^r, \tag{31}$$

где $l>0$ и

$$\sigma_p{}^r = \int_{\Gamma_0} x^r v_p\frac{\partial y}{\partial n}dl, \qquad \nu_p{}^r = \int_{\Gamma_0} x^r v_p\frac{\partial x}{\partial n}dl. \tag{32}$$

Далее, для того чтобы получить свойства рекуррентной последовательности $A_2{}^p$, аналогичные (22), (23), построим функцию Грина $G_2(W, W_0)$ для полуполосы (фиг. 3), обладающую свойствами:

$$\Delta G_2 = 2\pi\delta(W-W_0) \text{ в } D_W, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial\varphi}\Big|_{\Gamma_W} = 0, \qquad G_2|_{L_W} = 0,$$

$$G_2(W+ic, W_0) = G_2(W-ic, W_0), \quad G_2 = O(\varphi) \text{ при } \varphi\to\infty,$$

где $\Gamma_W = W(\Gamma_0)$, $L_W = W(L_0)$.

Если G_2 записать следующим образом:

$$G_2(W, W_0) = G_1(W, W_0) + g(W, W_0), \tag{33}$$

то g будет периодической функцией, при этом

$$\Delta g = 0 \text{ в } D_W, \quad \frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big|_{\Gamma_W} = 0, \quad g|_{L_W} = -G_1|_{L_W}, \quad g = O(1) \text{ при } \varphi\to\infty.$$

Учитывая периодичность гармонической функции g, мы можем по теореме Келдыша — Седова [1] представить ее следующим образом:

$$g(W, W_0) = -\operatorname{Re}\frac{1}{2icf(W)}\int_{L_W} G_1(t, W_0)f(t)\operatorname{cth}\frac{\pi}{2c}(t-W)\,dt,$$

где $f(W)=\sqrt{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2c}(W+id)\Big/\operatorname{sh}\frac{\pi}{2c}(W-id)}$ и рассматривается та ветвь корня, которая положительна на L_W.

Осуществляя конформное отображение D_0 на D_W, получим функцию Грина Γ_2 для D_0:

$$\Gamma_2(x, y;\ x_0, y_0)=\Gamma_1(x, y;\ x_0,\ y_0)+g[\varphi(x, y),\ \psi(x, y);\ \varphi_0(x_0, y_0),\ \psi_0(x_0, y_0)],$$

с помощью которой, аналогично тому как это делалось с решениями задач A_1^p, можно доказать существование единственного решения каждой задачи A_2^p, а значит и такие равенства:

$$v_{2p-1}(x, y)=v_{2p-1}(x, -y),\ v_{2p}(x, y)=-v_{2p}(x, -y),\ C_{2p}\equiv 0. \quad (34)$$

Итак, найдены коэффициенты рассеяния плоской волны $^1/_2 p_0$ на гофрированных поверхностях, рассмотренных в задачах A_1 и A_2. ↔ Ограничиваясь второй степенью k в разложениях для V_1 и V_2, можно их написать в следующих видах:

$$V_1=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta+iB}{\cos\theta-iB}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}+i\frac{B_1}{\cos\theta}k-\frac{1}{2}\left(\frac{B_1}{\cos\theta}\right)^2k^2+O(k^3) \text{ при } k\to 0,\ |\theta|\neq\frac{\pi}{2}\\ -\frac{1}{2} \text{ при } |\theta|=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad (35)$$

$$V_2=-\frac{1}{2}\frac{1+iC}{1-iC}=-\frac{1}{2}-iC_1k+\frac{1}{2}C_1^2k^2-O(k^3) \text{ при } k\to 0, l>0, \quad (36)$$

Если принять во внимание формулы (1) и (9), то из двух последних соотношений можно получить коэффициенты отражения k и пропускания Q исходной решетки соответственно в видах:

$$R=V_1+V_2=\begin{cases}i\left(\frac{B_1}{\cos\theta}-C_1\right)k-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{B_1}{\cos\theta}\right)^2-C_1^2\right]k^2+O(k^3)\\ \text{при } k\to 0,\ |\theta|\neq\frac{\pi}{2},\ l>0\\ -1 \text{ при } |\theta|=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad (37)$$

$$Q=V_1-V_2=\begin{cases}1+i\left(\frac{B_1}{\cos\theta}+C_1\right)k-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{B_1}{\cos\theta}\right)^2+C_1^2\right]k^2+O(k^3)\\ \text{при } k\to 0,\ |\theta|\neq\frac{\pi}{2},\ l>0\\ 0, \text{ при } |\theta|=\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad (38)$$

Наконец, покажем, что B_1 и C_1 целиком и полностью выражаются через так называемые коэффициенты присоединенных масс решетки λ_x и λ_y. Из

выражения (19) при $p = 1$ находим равенство, определяющее B_1:

$$B_1 = -\frac{M_1}{2c}\cos^2\theta - i\frac{\lambda_1{}^0}{2c}\sin\theta,$$

где $M_1 = \int\limits_{T_0} x\frac{\partial x}{\partial n}dl, \quad \lambda_1{}^0 = \int\limits_{T_0} u_1\frac{\partial y}{\partial n}dl$

Так как u_1 является четной по x, то $\lambda_1{}^0 = \frac{i}{2}\sin\theta\lambda_y$, где λ_y — коэффициент присоединенной массы [1], который определяется следующими равенствами:

$$\lambda_y = -\int\limits_{\gamma}\varphi_2\frac{\partial y}{\partial n}dl, \qquad u_1 = -i\sin\theta\varphi_2,$$

где γ является границей одного из элементов решетки. Отсюда, учтя, что $2M_1 = S$ — площадь одного элемента решетки, найдем:

$$B_1 = \frac{\lambda_y\sin^2\theta - S\cos^2\theta}{4c}. \tag{39}$$

Подобно предыдущему, получаем из формулы (31) при $p = 1$

$$C_1 = \frac{\lambda_x + S}{4c}\cos\theta, \qquad l \neq 0, \tag{40}$$

где $\lambda_x = -\int\limits_{\nu}\varphi_1\frac{\partial x}{\partial n}dl, \qquad v_1 = \cos\theta\varphi_1.$

Таким образом, коэффициенты рассеяния V_1 и V_2 в задачах A_1 и A_2, а также коэффициенты отражения R и пропускания Q в задаче A полностью определяются присоединенной массой решетки λ_x, λ_y соответственно по формулам (35) — (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.— Л., ГТТИ, 1950.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
20 ноября 1969 г.