АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 3

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА СЛАБООТРАЖАЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Н. Н. Белоозеров, И. И. Долгова

На основе разложения решения в ряд по собственным функциям получено интегральное представление поля дифракции цилиндрической волны на тонкой бесконечной цилиндрической оболочке. Введена «передаточная» функция, с помощью которой записывается решение задачи дифракции или излучения цилиндрической оболочки. Получено разложение решения в ряд по малому параметру, характеризующему слабое отражение волны от пластины.

В литературе неоднократно рассматривалась задача о дифракции плоской волны на круговом бесконечном цилиндре. Изучалась дифракция на мягком, жестком [1, 2], импеданцном цилиндрах [3, 4] и на упругой цилиндрической оболочке [5, 6]. Известно, что решение задачи для кругового цилиндра можно написать в виде разложения по тригонометрическим и цилиндрическим функциям. Для цилиндров, радиус которых мал по сравнению с длиной звуковой волны, ряды быстро сходятся и могут быть использованы непосредственно для расчетов [5, 6]. При увеличении радиуса цилиндра сходимость ухудшается и в этом случае применяют преобразование Ватсона — Зоммерфельда, позволяющее перейти к быстросходящимся рядам вычетов [1, 2]. Авторами работ [3, 4] был предложен приближенный способ решения задачи о дифракции плоской или цилиндрической волны на импеданцном цилиндре при помощи параболического уравнения.

В данной работе на основе классического разложения решения в ряд по собственным функциям получено интегральное представление поля дифракции цилиндрической волны на упругой цилиндрической оболочке, позволяющее, благодаря выделению функции зависящей только от механических свойств оболочки, получить разложение по малому параметру, а также высокочастотную асимптотику решения.

Пусть цилиндрическая волна (см. фиг. 1), расходящаяся из точки A, рассеивается тонкой упругой оболочкой радиуса a. Внутри и вне оболочки находится жидкость с плотностью ρ и скоростью распространения звука c. Уравнения колебаний цилиндрической оболочки при отсутствии аксиальных смещений имеют вид [7]

$$\begin{gathered}\rho_1\omega^2 v+\frac{E_1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right]+\frac{1}{8}\frac{h^2E_1\nu}{a^4(1-\nu)}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right]=\\ =-\frac{\nu}{a(1-\nu)}\frac{\partial p''}{\partial\varphi},\\ \rho_1\omega^2 v-\frac{E_1}{a^2}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}+w\right]-\frac{h^2E_1}{24a^4(1-\nu)}\left[2(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+\right.\\ \left.+(4-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+(2+\nu)w\right]=-\frac{1}{h}\left[p'+\frac{(1-2\nu)h}{(1-\nu)a}p''\right],\end{gathered}\tag{1}$$

где v, w — тангенциальная и радиальная составляющая смещений оболочки, h — толщина оболочки, ρ_1 — плотность материала оболочки, E, ν — коэффициенты Юнга и Пауссона материала оболочки, p_1, p_2 — давление внутри и вне оболочки соответственно, $p' = p_1 - p_2$; $p'' = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$; $E_1 = E / 1 - \nu^2$.

На границе оболочки с окружающей средой выполняется условие равенства нормальных смещений:

$$\frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial p_1}{\partial n}\Big|_{r=a} = \frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial p_2}{\partial n}\Big|_{r=a} = -w. \tag{2}$$

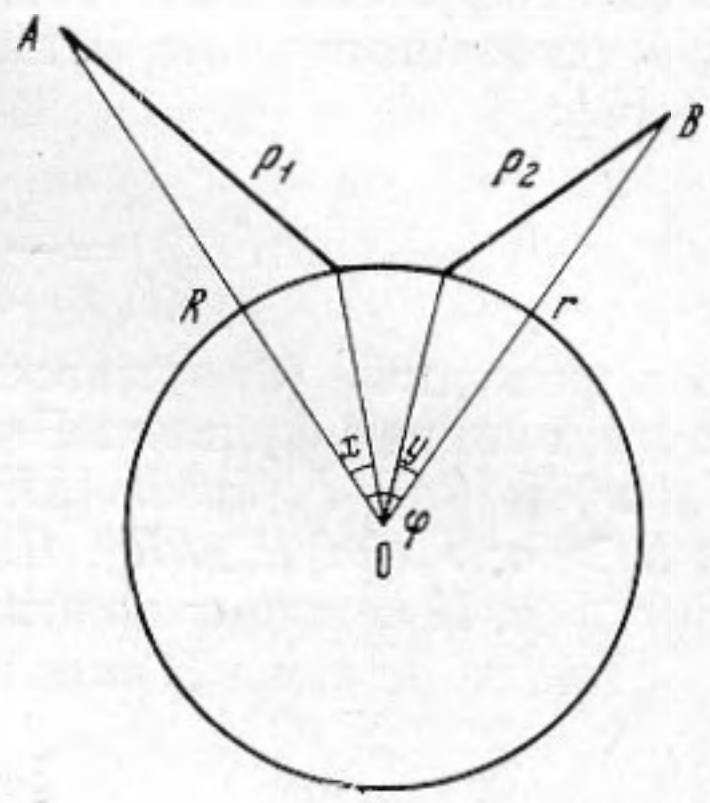
Решение уравнения Гельмгольца с граничными условиями (1) записывается в виде разложения по собственным колебаниям оболочки

$$p_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(kr)\, e^{in\varphi}, \qquad p_2 = H_0(kd) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr)\, e^{in\varphi},$$

где $\mathbf{d}$ — радиус-вектор из источника в точку наблюдения, r, φ — координаты точки наблюдения, R, ψ — координаты источника. В последнем выражении выделен член, определяющий поле линейного источника в свободном пространстве.

Первый член в выражении для давления в окружающей оболочку среде по теореме сложения для цилиндрических функций можно написать следующим образом [8]:

$$H_0(kd) = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\, H_n^{(1)}(kR)\, e^{in\varphi} & R > r \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kR)\, H_n^{(1)}(kr)\, e^{in\varphi} & R < r. \end{cases} \tag{4}$$



Фиг. 1

Подставляя разложения для p_1 и p_2 в граничные условия, найдем выражения для интересующих нас коэффициентов:

$$A_n = H_n^{(1)}(kR)\,[1 + H_n^{(1)\prime}(ka)\, J_n'(ka)\,\gamma_n], \quad B_n = H_n^{(1)}(kR)\, J_n'^2(ka)\,\gamma_n, \tag{5}$$

где

$$\gamma_n = \frac{z_{0n} + \xi_n^{(2)} z_{1n}}{[-z_{0n} + C_1 z_{1n} + C_2 z_{2n}]\; {}_n'(ka)\, H_n'(ka)},$$

$$z_{0n} = i\frac{E_1}{\omega a}\xi_n^{(1)}, \quad z_{1n} = -i\rho c\frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)}; \quad z_{2n} = i\rho c\frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)},$$

$$\xi_n^{(1)} = \alpha n - \gamma(n^2 - \mu_1^2); \quad \alpha = n - \frac{1}{8}\frac{h^2\nu}{a^2(1-\nu)}(n^3 - n); \quad \beta = -\frac{\nu n}{2(1-\nu)},$$

$$\gamma = 1 - \mu_1^2 + \frac{h^2}{24a^2(1-\nu)}[2n^4(1-\nu) - (4-\nu)n^2 + 2 + \nu]; \quad \mu_1 = ka,$$

$$C_1 = \delta(n^2 - \mu_1^2) - \beta n; \qquad C_2 = \delta_1(n^2 - \mu_1^2) + \beta n,$$

$$\delta = \frac{a}{h} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \quad \delta_1 = \frac{a}{h} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad \xi_n^{(2)} = (n^2 - \mu_1^2)\frac{1-2\nu}{1-\nu} - 2\beta n.$$

Штрих означает дифференцирование цилиндрических функций по аргументу. Везде, где речь идет о функции Ханкеля первого рода вместо $H_n^{(1)}(kr)$ мы будем писать $H_n'(kr)$, опуская индекс (1). Учитывая соотношение (5), выражения для давления внутри и вне оболочки можно переписать следующим образом:

$$p_1 = H_0(kd) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n H_n(kR) J_n(kr) H_n'(ka) J_n'(ka) e^{in\varphi},$$

$$p_2 = H_0(kd) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n H_n(kR) H_n(kr) J_n'^2(ka) e^{in\varphi}. \tag{6}$$

Полученное выражение для поля линейного источника представляет разложение по собственным колебаниям, которое удобно для вычислений при не очень больших ka. При $ka \to \infty$ ряды (6) медленно сходятся. Для того чтобы получить интегральное представление поля линейного источника, в котором зависимость от положения источника и точки наблюдения отделена от других параметров, сделаем следующие преобразования. Заметим, что для произведения функций Бесселя и Ханкеля справедлива формула [8]:

$$J_n(\alpha) H_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos x + \beta^2})\, e^{inx}\, dx. \tag{7}$$

В выражении (6) вынесем дифференцирование из-под знака суммы и сгруппируем функции Бесселя и Ханкеля в следующие произведения: $J_n(kr) H_n(ka)$, $J_n(ka) H_n(kR)$ для давления внутри оболочки, когда $r < a$ и $R > a$; $J_n(ka) H_n(kR)$, $H_n(kr) J_n(ka)$ для давления вне оболочки, когда $R, r > a$. К каждому из этих произведений применим формулу (7).

Для многочлена ξ_n справедливо следующее соотношение:

$$\xi_n e^{in\varphi} = \xi\left(-i\frac{d}{d\varphi}\right) e^{in\varphi}.$$

Используя это выражение при определении величин γ_n, входящих в формулу (6), меняя затем местами суммирование и интегрирование, получим для давления внутри и вне оболочки формулы:

$$p_{1,2} = H_0(kd) + \mu \frac{\partial^2}{\partial k\alpha_1\, \partial k\alpha_2} \xi^{(1)} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kd_1)\, dx \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kd_2)\, dy\, \Phi(\varphi - x - y)\,|_{\alpha_1=\alpha_2=a} + \frac{\partial}{\partial k\alpha_1} \xi^{(2)} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kd_2)\, dx \times \tag{8}$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kd_2)\, dy\, \Phi(\varphi - x - y)\,|_{\alpha_1=\alpha_2=a},$$

где

$$d_1 = \sqrt{R^2 - 2R\alpha_1\cos x + \alpha_1^2}, \qquad d_2 = \sqrt{r^2 - 2r\alpha_2\cos y + \alpha_2^2},$$

$$\mu = \frac{\rho_1 wh}{\rho c}.$$

В выражении (8) введена функция $\Phi(\psi)$ по следующей формуле:

$$\Phi(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\psi}. \tag{9}$$

где

$$f_n = -\mu\xi_n J_n'(ka) H_n'(ka) + \varkappa_n; \quad \varkappa_n = C_1 J_n(ka) H_n'(ka) - C_2 J_n'(ka) H_n(ka).$$

Остановимся на физическом смысле выражения (8) для поля дифракции цилиндрической волны на упругой цилиндрической оболочке. Первый член в выражении (8) представляет собой прямую волну, идущую из источника в точку наблюдения, подынтегральная функция — волну, вышедшую из источника под углом x, распространяющуюся по поверхности цилиндра и затем под углом y идущую в точку наблюдения. На фиг. 1 показан путь такой волны. Углы x и y отсчитываются от радиусов-векторов R или r соответственно. Рассеянное оболочкой поле в точке B определяется интегрированием по всем возможным углам x — выхода из источника и y — направлениям прихода луча в точку наблюдения. Знак дифференцирования, стоящий перед интегральным членом, можно объяснить тем, что каждый участок оболочки принимает или излучает волну как диполь. Амплитуда волны зависит от пути, пройденного ею по поверхности оболочки и определяется функцией $\Phi(\psi)$, которую назовем «передаточной» функцией. Эта функция зависит от свойств оболочки и угловой величины пути волны $\psi = \varphi - x - y$.

Физический смысл «передаточной» функции виден особенно наглядно из рассмотрения задачи об излучении оболочки под действием сосредоточенной силы при учете только изгибных колебаний оболочки. По теореме взаимности [9], поле излучения цилиндрической оболочки связано с полем дифракции цилиндрической волны следующим соотношением:

$$p^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial p^{(1)}}{\partial h} f\, ds, \tag{10}$$

где $p^{(1)}$ — решение дифракционной задачи, $p^{(2)}$ — поле излучения оболочки, колеблющейся под действием силы $f(\psi)$. Учитывая выражение (8) для $p^{(2)}$, получаем

$$p^{(2)} = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial ka} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\sqrt{R^2 - 2Ra\cos x + d^2})\, dx \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\vartheta - x - \psi) f(\psi)\, d\psi.$$

Пусть на оболочку действует сосредоточенная сила $f(\psi) = F(\psi_0)\delta(\psi - \psi_0)$; тогда для поля излучения оболочки получим выражение:

$$p = \frac{i}{2\pi^2} F(\psi_0) \frac{\partial}{\partial ka} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\rho)\, \Phi(\vartheta - x - \psi_0)\, dx. \tag{11}$$

Отсюда видно, что $\Phi(\vartheta - x - \psi_0)$ — амплитуда волны, излученной в направлении ϑ из точки с угловой координатой x, если сила действует на оболочку в точке с угловой координатой ψ_0. Поле излучения оболочки получается суммированием излучения источников, расположенных на поверхности оболочки.

В формуле (9) для передаточной функции выделим параметр $\mu = \rho_1 \omega h / \rho c$, характеризующий отношение нормального импеданца массовой пластины и волнового сопротивления жидкого полупространства. Параметр μ связан с коэффициентом отражения пластины (R) в жидкости следующим образом: $|R| = \mu / \sqrt{(\mu^2 + 4)}$. Умножим обе части равенства (9) $H_0(k\sqrt{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos\beta_1 + \alpha_2^2})$ и проинтегрируем по β_1 в пределах от $-\pi$ до π, положив при этом $\psi = \varphi - \beta_1$. Таким образом, получим следующее

выражение:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\psi+\beta_1) H_0(kl_1)\, d\beta_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{\mu\xi_n^{(1)} J_n' H_n' + \varkappa_n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\beta_1} H_0(kl_1)\, d\beta_1.$$

В правой части последнего выражения заменим интеграл на произведение $J_n(k\alpha_1) H_n(k\alpha_2)$ по формуле (7). Дифференцируя теперь обе части равенства по $k\alpha_1$ и $k\alpha_2$, получим интегральное уравнение для передаточной функции:

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{\varkappa}\delta(\psi) + \frac{1}{\varkappa}\mu\xi_1^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial k\alpha_1\, \partial k\alpha_2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\beta+\psi) H_0(kl_1)\, d\beta, \tag{12}$$

где

$$\varkappa = \frac{2i}{\pi k a}; \quad \xi_1 = \xi\left(-i\frac{d}{d\beta_1}\right); \quad l_1 = \sqrt{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\cos\beta_1 + \alpha_2^2}.$$

При $\mu \ll 1$, параметр μ имеет смысл коэффициента отражения плоской волны от пластины в жидкости. Итерируя интегральное уравнение (12), получим разложение в ряд передаточной функции $\Phi(\psi)$ по малому параметру μ, характеризующему слабое отражение от оболочки

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{\varkappa}\delta(\psi) + \frac{\mu}{\varkappa^2}\zeta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\beta_1 H_0(kl_1)\,\delta(\psi+\beta_1) + \ldots + \frac{\mu^{m-1}}{\varkappa^m}\zeta_1 \ldots$$

$$\ldots \zeta_{m-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} d\beta_1 \ldots d\beta_{m-1} H_0(kl_1) \ldots H_0(kl_{m-1})\,\delta\left(\psi + \sum_{k=1}^{m-1}\beta_k\right) + \ldots \tag{13}$$

где $\quad \zeta_m = \xi^{(1)}\left(-i\dfrac{d}{d\beta_m}\right)\dfrac{\partial^2}{\partial k\alpha_1\, \partial k\alpha_2}$

Подставляя полученное выражение (13) для передаточной функции в формулу (8), получим следующее разложение для поля дифракции цилиндрической волны на слабоотражающей оболочке:

$$p = H_0(k\rho) + \frac{1}{\varkappa} L \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\rho_1) H_0(k\rho_2)\big|_{y=\varphi-x}\, dx +$$

$$+ \frac{\mu}{\varkappa^2} L L_1 \zeta_1 \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\rho_1)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\rho_2)\, dy\, H_0(kl_1)\big|_{\rho_1=\varphi-x-y} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\mu^{m-1}}{\varkappa^m} L L_1 \ldots L_{m-1}\zeta_1 \ldots \zeta_{m-1} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\rho_1)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} H_0(k\rho_2) dy \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kl_1) \ldots H_0(kl_{m-2})\big|_{\sum_{k=1}^{m-2}\beta_k=\psi} d\beta_1 \ldots d\beta_{m-2}, \tag{14}$$

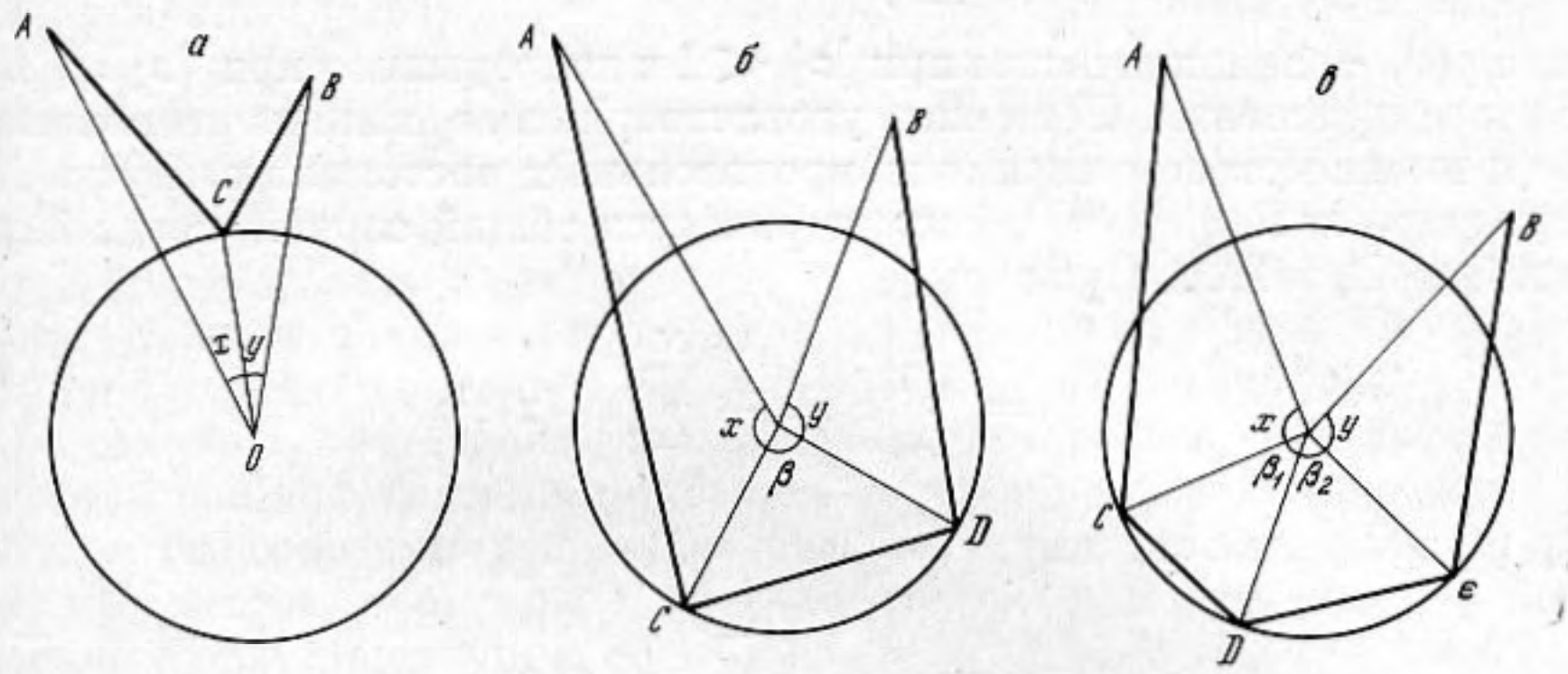
где

$$b_i = \sqrt{\alpha_{i+2}^2 - 2\alpha_{i+2}\alpha_{i+3}\cos\beta_i + \alpha_{i+3}^2}; \; L_i = \mu\xi_i^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial k\alpha_1 \partial k\alpha_2} + \xi^{(2)} \frac{\partial}{\partial k\alpha_1}.$$

Первый член в последнем выражении определяет прямую волну из точки A в точку B. На фиг. 2, *а* показан путь волны соответствующий второму

члену разложения (14). Волна из точки A в точку B приходит один раз, отразившись от оболочки в точке C. На фиг. 2, *б*, *в* показан путь волны, пришедшей в точку B после двух- и трехкратного отражения от оболочки в точках D и E. Таким образом, получено разложение поля в ряд по числу отражений от оболочки. Коэффициент μ^m перед m-м членом ряда показывает сколько раз волна отразилась от оболочки прежде, чем пришла в точку наблюдения.

Не трудно видеть, что «передаточная» функция не аналитична по μ при $\mu = 0$, поэтому ряды (13) и (14), полученные формально, не являются сходящимися. Ниже будет предложен способ получения сходящихся рядов,



Фиг. 2

которые имеют более громоздкий вид, сохраняя тот же физический смысл. Для этого в знаменателе выражения (9) для «передаточной» функции вычтем и прибавим часть асимптотического ряда, $J_n'(ka)H_n'(ka)$, которая имеет вид $J_n'(ka)H_n'(ka) \sim P(n)/Q(n)$, где $P(n)$ и $Q(n)$ — полиномы, выбранные таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$\left[J_n'(ka)H_n'(ka) - \frac{P(n)}{Q(n)}\right]\xi_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\to} \text{const}. \tag{15}$$

При этом можно получить уравнение, аналогичное (12), но с более сложным интегро-дифференциальным оператором. Выражение для «передаточной» функции будем раскладывать теперь по $\mu\xi_n^{(l)}\left[J_n'H_n' - \frac{P(n)}{Q(n)}\right]$ и полученное таким образом разложение будет сходящимся рядом в силу условия (15). Выражение для $\Phi(\psi)$ перепишем следующим образом:

$$\Phi(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{\varkappa_n + \xi_n\left[J_n'H_n' - \frac{P(n)}{Q(n)}\right] + \xi_n\frac{P(n)}{Q(n)}} =$$

$$= Q\left(-i\frac{d}{d\psi}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{R_w(n) + \xi_n[QJ_n'H_n' - P(n)]},$$

где $\quad R_N = \varkappa_n Q(n) + \xi_n P(n) = r_N n^N + r_{N-1}n^{N-1} + \ldots + r_0; \qquad \xi_n \equiv \xi_n^{(l)}$.

Обозначим

$$\tilde{\Phi}(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{R_N + \xi_n[Q(n)J_n'H_n' - P(n)]}.$$

Первый член разложения для $\widetilde{\Phi}(\psi)$ представим в виде

$$\widetilde{\Phi}_0(\psi)=f_0(e^{i\psi})+f_0(e^{-i\psi})+\frac{1}{\varkappa_0 Q(0)+\xi_0 P(0)},$$

где $f_0(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{R_N}$.

Отсюда видно, что функция $f_0(z)<1$ удовлетворяет уравнению

$$R_N\left(z\frac{d}{dz}\right)f(z)=\frac{z}{1-z}.$$

Функция $f(z)$ — аналитическое при $|z|<1$ и непрерывное при $|z|\leqslant 1$ решение этого уравнения. Решение, удовлетворяющее вышеперечисленным условиям ищем методом вариации произвольных постоянных. Пусть λ_i — корни уравнения $R_N(\lambda_i)=0$. Рассматривается общий случай, когда λ_i различны и $\lambda_i\neq 0, 1, 2, \ldots$ При этом

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{N}c_k z^{\lambda_k}+\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\,z^{\lambda_k}$$

и для $\varphi_k(z)$ получаем систему:

$$\sum_{k=1}^{N}\varphi_k'(z)\,z^{\lambda_k}=0,\qquad \sum_{k=1}^{N}\varphi_k'(z)\,z^{\lambda_k}\lambda_k=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{N}\varphi_k'(z)\,z^{\lambda_k}\lambda_k^{N-2}=0,\quad \sum_{k=1}^{N}\varphi_k'(z)\,z^{\lambda_k}\lambda_k^{N-1}=\frac{1}{(1-z)\,r_N}.$$

Так как все λ_i различны, по предположению, определитель этой системы не равен нулю и по правилу Крамера получаем

$$\varphi_k'(z)=\frac{z^{-\lambda_k}}{1-z}\left[r_N\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}(\lambda_k-\lambda_i)\right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{N}c_k z^{\lambda_k}+\sum_{k=1}^{N}z^{\lambda_k}\left[r_N\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}(\lambda_k-\lambda_i)\right]^{-1}\int_0^z\frac{x^{-\lambda_k}\,dx}{1-x}.$$

Интеграл в последнем выражении вычисляется по формуле 3.194.1 справочника [8]. При этом последнее выражение переходит в следующее:

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{N}c_k z^{\lambda_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}z\left[r_N(1-\lambda_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}(\lambda_k-\lambda_i)\right]_2^{-1}F_1(1,1-\lambda_k;r-\lambda_k;z).$$

Так как слагаемое, содержащее гипергеометрические функции, аналитично при $|z|<1$, $\lambda_i\neq 0, 1, 2, \ldots$, то $f(z)$ аналитична только при условии $c_k=0$ для всех k. Окончательно для первого члена разложения передаточ-

ной функции мы имеем выражение:

$$\Phi_0(\psi)=Q\left(-i\frac{d}{d\psi}\right)\left[f_0(e^{i\psi})+f_0(e^{-i\psi})+\frac{1}{R_N(0)}\right], \tag{16}$$

где

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{N} z\left[r_N(1-\lambda_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}(\lambda_k-\lambda_i)\right]_2^{-1} F_1(1,1-\lambda_k;2-\lambda_k;z).$$

Полученные выражения справедливы для цилиндров произвольного радиуса, однако, при $ka \leqslant 1$ нет необходимости получать разложение по числу отражений в связи с тем, что исходный ряд по собственным функциям (6) быстро сходится. При $ka \to \infty$ применение преобразования Ватсона — Зоммерфельда обычно приводит к быстро сходящимся рядам вычетов. Как можно показать в данном случае появляется $\sim ka$ членов (при $ka \to \infty$), дающих одинаковый вклад в дифракционное поле, в связи с чем применение преобразования Ватсона — Зоммерфельда не эффективно.

Выражение, аналогичное (8), можно получить для поля дифракции цилиндрической волны на цилиндре с сечением произвольной формы. Задача при этом сводится к нахождению передаточной функции.

В процессе выполнения данной работы авторы пользовались ценными советами Г. Д. Малюжинца. Авторы благодарны Л. М. Лямшеву за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Franz. Über die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel. Zs. Naturforsch., 1954, 9a, 705—716.
2. I. Imai. Die Beugung elektromagnetischer Wellen an einen Kreiszylinder. Zs. Phys., 1954, 137, 31—48.
3. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса, ч. I. Параболическое уравнение в лучевых координатах. Радиотехн. и электрон., 1961, 8, 1247—1258.
4. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса, ч. II. Асимптотические законы дифракции в полезных координатах. Радиотехн. и электрон., 1961, 9, 1489—1495.
5. Л. М. Лямшев. Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке. Акуст. ж., 1958, 4, 2, 161—167.
6. Е. Л. Шендеров. Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку. Акуст. ж., 1963, 9, 2, 222—230.
7. E. H. Kennard. The New approach to shell theory circular cylinders. J. Appl. Mech., 1953, 20, 1, 53.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГТТИ, 1962.
9. Л. М. Лямшев. К вопросу о принципе взаимности в акустике. Докл. АН СССР, 1959, 125, 6, 1231—1234.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
10 февраля 1969 г.