АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 3

УДК 534.26

# ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СФЕРЕ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

*П. И. Цой*

Исследуется в общем случае задача об отражении плоских волн от сферического препятствия в вязкой среде, с использованием метода Морза и Ватсона. Определены асимптотические формулы для случая среды с малой вязкостью.

В работе [1] была исследована задача об отражении плоских волн от сферического препятствия в вязкой среде, когда радиус сферы мал по сравнению с длиной волны, так что значение $ka$ будет малым, а в работе [2] Лэмб несколько изменил задачу [1], проведя исследования для случая малой вязкости. С помощью сферических функций были найдены асимптотические формулы для давления, скорости и полной рассеянной мощности в случае длинных волн. Ниже исследуется задача в общем случае и, с использованием метода Морза [3, 4] и Ватсона [5], определяются асимптотические формулы для давления, скорости и интенсивности в среде с малой вязкостью (например, в атмосфере или в жидкостях с малой вязкостью).

Предположим, что звуковые волны, распространяющиеся в вязкой среде, встречают твердую сферу радиуса $a$. Найдем то изменение, которое вносит присутствие этой сферы в акустическом поле плоских волн.

В случае установившегося режима (с временным множителем $e^{-\omega t i}$) данная задача приводится к решению системы уравнений

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \qquad \Delta\Phi + k_2^2\Phi = 0, \tag{1}$$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1 + \omega c^{-2}(\nu' + {}^4/_3\nu)i}{1 + \omega^2 c^{-4}(\nu' + {}^4/_3\nu)^2}, \qquad k_2^2 = \frac{\omega}{\nu}i, \tag{2}$$

удовлетворяющему, с учетом симметрии сферы, граничным условиям:

$$v_r = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot\Phi)\right]_{r=a} = 0, \quad v_\theta = \left[\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial r}\right]_{r=a} = 0, \tag{3}$$

где $\varphi$ и $\Phi$ — скалярный и векторный потенциалы скоростей, $\omega$ — частота, $c$ — скорость звука, $\nu'$ и $\nu$ — кинематические коэффициенты вязкости, а $r$, $\theta$, $\psi$ — сферические координаты.

Применяя метод разделения переменных и учитывая временной множитель $e^{-\omega t i}$, найдем решение системы (1), удовлетворяющее (3) в виде

$$\varphi = Ie^{i(k_1x-\omega t)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(2n+1)i^n h_n(k_1r)P_n(\cos\theta)e^{-\omega t i},$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(2n+1)i^n h_n(k_2r)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)e^{-\omega t i}, \tag{4}$$

где первый член для $\varphi$ представляет собой плоские волны, набегающие в направлении положительной оси $Ox$, второй член для $\varphi$ и сумма для $\Phi$ — рассеянные сферой волны, $I$ — постоянный множитель, характеризующий амплитуду плоских волн, $h_n(z)$ — сферическая функция Ханкеля первого

рода $n$-го порядка, $P_n(\cos\theta)$ — функция Лежандра 1-го рода $n$-го порядка, а $A_n$, $B_n$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (3).

Применяя теорию сферических цилиндрических функций [6], после несложного преобразования получим для $A_n$ и $B_n$ следующие выражения:

$$A_n = -I\frac{nj_{n-1}(k_1a)h_{n+1}(k_2a)+(n+1)j_{n+1}(k_1a)h_{n-1}(k_2a)}{nh_{n-1}(k_1a)h_{n+1}(k_2a)+(n+1)h_{n+1}(k_1a)h_{n-1}(k_2a)},$$
$$B_n = \frac{Ik_1}{k_2}\frac{j_{n-1}(k_1a)h_{n+1}(k_2a)-j_{n+1}(k_1a)h_{n-1}(k_2a)}{nh_{n-1}(k_1a)h_{n+1}(k_2a)+(n+1)h_{n+1}(k_1a)h_{n+1}(k_2a)} \tag{5}$$

Тем самым мы нашли выражения функций $\varphi$ и $\Phi$ (4) в виде сложного ряда. Зная $\varphi$ и $\Phi$, найдем для давления, скорости частицы в вязкой среде выражения:

$$p = p_0 + p_0\omega_i\left(1+\frac{\nu^*}{\omega}k_1^2 i\right)\varphi, \quad \nu^* = \nu' + {}^4/_3\nu,$$
$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\Phi), \quad v_\theta = \frac{\partial\theta}{r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial r}. \tag{6}$$

Ввиду сложности формул (4) — (6) в дальнейшем мы попытаемся получить асимптотические формулы в том случае, когда величины $\nu'$ и $\nu$ малы по сравнению с $\omega a^2$, а величины $\nu'\omega / c^2$ и $\nu\omega / c^2$ малы по сравнению с единицей; тогда величина $|k_2a|$ будет большая по сравнению с единицей (при конечном $a$). В этом случае

$$k_1' = \frac{\omega}{c}, \quad k_1'' = \frac{\omega^2}{2c^3}\nu^*, \quad k_1 = \frac{\omega}{c}e^{\varepsilon_1 i}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\omega\nu^*}{2c^2}, \quad e^{-k_1''a} \gg e^{-k_2''a}. \tag{7}$$

Используя свойство сферических цилиндрических функций

$$h_n(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}e^{-z''}\exp\left\{i\left(z'-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\};$$
$$j_n(z) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{2z}e^{z''}\exp\left\{-i\left(z'-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\}, \quad z = z'+iz'', \tag{8}$$
$$z = z'+iz''$$

можно написать формулы (4), в силу соотношений (7), в виде

$$\varphi = I\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n\left(j_n(k_1r)-\frac{j_n'(k_1a)}{h_n'(k_1a)}h_n(k_1r)\right)P_n(\cos\theta)\cdot e^{-\omega ti},$$
$$\Phi = \frac{Ik_1a}{k_2r}e^{-k_2''(r-a)}\exp\left\{i\left[k_2'(r-a)-\omega t-\frac{\pi}{2}\right]\right\}\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)\times \tag{9}$$
$$\times\frac{j_{n-1}(k_1a)h_{n+1}(k_1a)-j_{n+1}(k_1a)h_{n-1}(k_1a)}{h_n'(k_1a)}$$

На больших расстояниях от сферы $r$ (в дальней зоне) в силу формулы (8) мы получим для давления и скорости рассеянной волны в точке $(r, \theta, \psi)$ выражения:

$$p_s \approx \frac{I\rho_0c}{r}e^{-k_1''n}\exp\{i(k_1'r-\omega t+\pi+\varepsilon_1)\}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)j_n'(k_1a)}{h_n'(k_1a)}P_n(\cos\theta), \quad v_{sr}\approx\frac{p_s}{\rho_0c}e^{-\varepsilon_1 i}, \quad v_{s\theta}\approx 0. \tag{10}$$

Здесь члены, удержанные в правой части, имеют один и тот же порядок, между тем как отброшенные члены малы по сравнению с удержанными. Далее, следуя Морзу [3, 4], применим обозначения

$$h_n'(z) = i\bar{D}_n e^{i\bar{\delta}_n},\ j_n'(z) = i\bar{F}_n e^{i\bar{f}_n}. \tag{11}$$

Предельные значения амплитуд $\bar{D}_n$ и $\bar{F}_n$ и фазовых углов $\bar{\delta}_n$ и $\bar{f}_n$ в силу формулы (8) определяются следующими приближенными формулами:

$$\omega_0 = k_1'a = \frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \gg n + \frac{1}{2}$$

при

$$\bar{D}_n \approx \frac{1}{\omega_0} e^{-k_1''a} = D_n e^{-k_1''a}, \quad \bar{\delta}_n \approx \omega_0 - \frac{n+1}{2}\pi - \varepsilon_1 = \delta_n - \varepsilon_1,$$

$$\bar{F}_n \approx \frac{1}{2\omega_0} e^{k_1''a} = \frac{1}{2} D_n e^{k_1''a},\ \bar{f}_n \approx -\omega_0 + \frac{n+1}{2}\pi + \varepsilon_1 = -\delta_n + \varepsilon_1; \tag{12}$$

$$\omega_0 = k_1'a = \frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll n + \frac{1}{2}$$

при

$$\bar{D} \approx \frac{1}{\omega_0^2} = D_0,\ \bar{\delta}_0 \approx \frac{\omega_0}{3}\cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 = \delta_0 \cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1$$

$$\bar{D}_n \approx \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(n+1)}{\omega_0^{n+2}} = D_n;$$

$$\bar{\delta}_n \approx -\frac{n\omega_0^{2n+1}\cos[(2n+1)\varepsilon_1]}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2n-1)^2\cdot(2n+1)(n+1)} - (n+2)\varepsilon_1 =$$

$$= \delta_n \cos[(2n+1)\varepsilon_1] - (n+2)\varepsilon_1, \quad n > 0 \tag{13}$$

$$\bar{F}_0 \approx -\frac{\omega_0}{3}, \qquad \bar{F}_n \approx \frac{n\omega_0^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\cdot \ (n > 0);$$

$$\bar{f}_0 \approx \varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}; \quad \bar{f}_n \approx (n-1)\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}, \quad (n > 0),$$

где значения амплитуд $D_n$ и фазовых углов $\delta_n$, зависящие от $\omega_0$, определяются по таблицам [3, 4]. Поэтому предельные значения $\bar{D}_n$, $\bar{F}_n$, $\bar{\delta}_n$ и $\bar{f}_n$ легко определяются при помощи таблиц функций $D_n$ и $\delta_n$ в зависимости от $\omega_0$ и $\varepsilon_1$.

Тогда из формул (10) и (11) мы получим вдали от сферы следующие выражения для давления, нормальной скорости и интенсивности рассеянной волны в точке $(r, \theta, \psi)$, а также для полной рассеянной мощности:

$$p_s \approx I\frac{\rho_0\omega a}{r} e^{-k_1''r}\exp[(k_1'r - \omega t + \pi + \varepsilon_1)i]F_r(\theta),$$

$$F_r(\theta) = \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\bar{F}_n}{\bar{D}_n}P_n(\cos\theta)\exp\{i(\bar{f}_n - \bar{\delta}_n)\},$$

$$v_{sr} \approx I\frac{\omega a}{cr} e^{-k_1''r}\exp\{i(k_1'r - \omega t + \pi)\}F_r(\pi), \tag{14}$$

$$I_s \approx I_p^2\frac{a^2}{r^2} e^{-2k_1''r}\{F_r(\theta)\}^2,$$

$$\{F_r(\theta)\}^2 = \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}\frac{(2n+1)(2m+1)\bar{F}_n\bar{F}_m}{\bar{D}_n\bar{D}_m}\times$$

$$\times P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\cos(\bar{f}_n - \bar{f}_m + \bar{\delta}_n + \bar{\delta}_m + \varepsilon_1),$$

$$\Pi_s \approx I_p^2 \frac{4\pi a^2}{\omega_0^2} e^{-2k_1''r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\overline{F}_n^2}{\overline{D}_n^2} \cos \varepsilon_1,$$

где $I_p^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{c} I^2$ — интенсивность падающих плоских волн.

При очень низких частотах только волны, соответствующие $n=0$ и $n=1$, имеют существенные значения для расчета рассеянной волны. В этом случае интенсивность рассеянной волны и полная рассеянная мощность вдали от сферы будут

$$I_s = \frac{I_p \omega^4 a^6}{9c^4 r^2} e^{-2k_1''r} \left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2 \cos \varepsilon_1, \qquad (\omega_0 \ll 1),$$

$$\Pi_s \approx \frac{7}{9} I_p^2 \frac{\omega^4 a^6}{c^4} e^{-2k_1''r} \cos \varepsilon_1, \qquad (\omega_0 \ll 1). \tag{15}$$

Отсюда видно, что

$$\frac{I_s}{I_{s0}} = \frac{\Pi_s}{\Pi_{s0}} = e^{-2k_1''r} \cos \varepsilon_1, \tag{16}$$

где $I_{s0}$ и $\Pi_{s0}$ — значения $I_s$ и $\Pi_s$ при $\nu' = \nu = 0$.

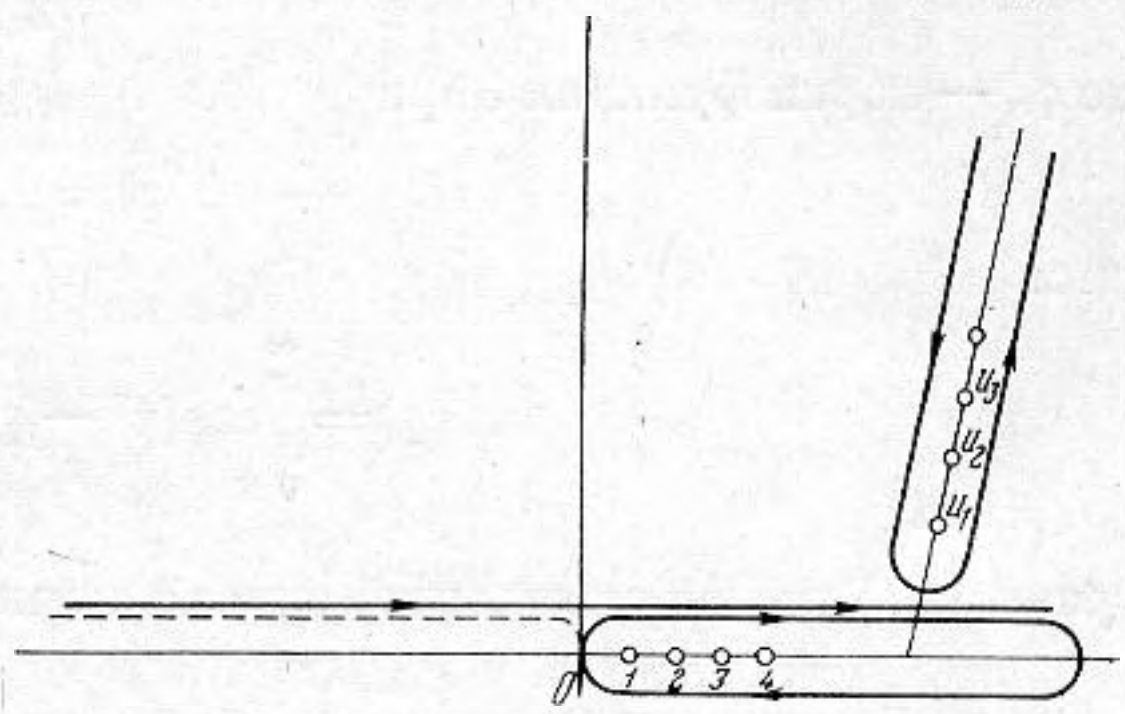
Если длина волны очень мала по сравнению с окружностью сферы в экваториальной плоскости, то при $\omega_0 \gg 1$ потребуется использовать большое число членов рядов в формуле (14), чтобы выяснить физическую картину рассеянной волны. Выйти из этого затруднения помогает преобразование ряда, предложенное впервые Ватсоном [5].

Преобразование Ватсона заключается в том, что бесконечный ряд

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \tag{17}$$

преобразуется в интеграл

$$V = \frac{i}{2} \oint \frac{P_u(-\cos\theta)}{\sin u\pi} C_u \, du, \tag{18}$$




причем контур интегрирования на комплексной плоскости $u$ охватывает положительную вещественную ось, как показано на фиг. 1. Действительно если величина $C_u$ не имеет полюсов на положительной вещественной оси, то интеграл (18) в силу теоремы о вычетах [7] равен сумме (17), так как множитель $C_u$ имеет в точках $u = n$ (где $n$ — целое) полюсы первого порядка с вычетами

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{P_u(-\cos\theta)}{\sin u\pi}\right\}_{u=n} = \frac{P_n(-\cos\theta)}{\pi\cos n\pi} = \frac{P_n(\cos\theta)}{\pi}.$$

Применяя к потенциалу скорости $\varphi$ (9) преобразование Ватсона при $|k_1 a| \gg 1$, получим

$$\varphi = \frac{1}{2} I e^{-i(\omega t + \pi/2)} \oint \frac{(2u+1) j_u'(k_1 a)}{h_u'(k_1 a) \sin u\pi} h_u(k_1 r) P_n(-\cos\theta) e^{\frac{u\pi}{2} i} du. \tag{19}$$

Так как подынтегральное выражение в формуле (19) является нечетной функцией от $n + \frac{1}{2}$ [8], то в качестве контура интегрирования можно взять прямую, параллельную вещественной оси и лежащую в верхней полуплоскости $u$ (фиг. 1). Это утверждение вытекает из свойства сферических цилиндрических функций [6] и функций Лежандра [9].

В работе [10] подробно исследуется аналогичный интеграл. Применяя методы, использованные в этой работе, получим

$$\varphi = \frac{I\pi}{2} e^{-\omega t i} \sum_n \frac{e^{\frac{u_m \pi}{2}} h_{u_m}^{(2)\prime}(k_1 a)\, h_{u_m}(k_1 r)}{\sin u_m \pi \left[\frac{d}{du} h_u'(k_1 a)\right]_{u=u_m}} P_{u_m}(-\cos\theta), \quad (20)$$

где $u_m$ есть корни уравнения

$$h_u'(k_1 a) = 0, \quad (21)$$

определяемые по Дебаю [11] формулами

$$\nu_m = u_m + \frac{1}{2} = \omega_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} (4m+1)^{2/3} \omega_1^{1/3} e^{\pi i/3}, \quad \omega_1 = k_1 a, \quad (22)$$

где $h_n^{(2)}(z)$ — сферическая функция Ханкеля 2-го рода $n$-го порядка, $h_n^{(2)\prime}(z) = \frac{d}{dz} h_n^{(2)}(z)$.

Более точные выражения с помощью интеграла Эйри или функции Эйри — Фока получаются в виде

$$\nu_m = u_m + \frac{1}{2} = \omega_1 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_1}{6}\right)^{1/3} q_m, \quad (23)$$

где $q_m$ — корни функции Эйри

$$\frac{d}{dq} A(q) = 0. \quad (24)$$

Здесь

$$A(q) = \int_0^\infty \cos(\tau^3 - q\tau)\, d\tau. \quad (25)$$

Франц [12] нашел следующий случай асимптотического разложения

$$\nu_m = u_m + \frac{1}{2} = \omega_1 + \left(\frac{\omega_1}{6}\right)^{1/3} q_m e^{\pi i/3} - \left(\frac{6}{\omega_1}\right)^{1/3} \left\{\frac{7}{20 q_m} + \frac{q_m^2}{180}\right\} e^{-\pi i/3}, \quad (26)$$

где $q_m$ определяется по таблицам работы [10].

В случае $k_1 r - \omega_1 \gg \omega_1^{1/3}$ мы получим, как и в работе [10], следующие асимптотической формулы.

Если точка наблюдения лежит в области геометрической тени

$$\varphi = I \frac{\omega^{5/6} e^{-k_1'' \sqrt{r^2 - a^2}} \exp\left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} = \omega t - \frac{7\pi}{6} - \frac{\varepsilon_1}{6}\right)\right\}}{k_1' \sqrt{2r \sin\theta}\, (r^2 - a^2)^{1/4}} \times$$

$$\times \sum_m \frac{C_m}{1 + \exp(2\pi\nu_m i)} \left[ \exp\left\{ i\nu_m \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \arccos\frac{a}{r}\right) + \frac{\pi}{4} i\right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{ i\nu_m \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \arccos\frac{a}{r}\right) - \frac{\pi}{4} i\right\}\right]. \quad (27)$$

Величины $C_m$ и $\nu_m$ следует определить из формулы (26) и таблиц работы [10]. Физически эту формулу можно интерпретировать совершенно так же, как соответствующую формулу для $\varphi$ в идеальной среде [10], т. е. говорить

о ползущей волне, огибающей сферу, причем дифрагированные лучи идут вдоль меридианов, по которым сферу пересекают плоскости, проходящие через точку наблюдения, центр сферы и направление распространения падающей плоской волны.

| $\frac{r}{a}$ | $\exp(-2k_1'' \sqrt{r^2-a^2})$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\omega_0 = 100$ | $\omega_0 = 200$ | $\omega_0 = 500$ | $\omega_0 = 1000$ |
| 10 | 0,9943<br>99,43% | 0,9709<br>97,09% | 0,8656<br>86,56% | 0,5622<br>56,22% |
| 20 | 0,9883<br>98,83% | 0,9553<br>95,53% | 0,747<br>74,7% | 0,3113<br>31,13% |
| 30 | 0,9883<br>98,83% | 0,933<br>93,3% | 0,6482<br>64,82% | 0,1774<br>17,74% |
| 50 | 0,9719<br>97,19% | 0,8921<br>89,21% | 0,4862<br>48,62% | 0,0559<br>5,59% |

Для коротких волн (для достаточно больших $\omega_0$, например 100 и более) величина $\omega_1$ приблизительно равна $\omega_0$. Следовательно, значения величин $\nu_m$ и суммы в правой части формулы (27) для вязкой среды мало отличаются от тех же значений для идеальной среды. Тогда для давления, скорости и интенсивности в вязкой среде в точке $(r, \theta, \psi)$ вдали от сферы мы получим

$$p - p_0 \approx (p - p_0)_{\text{ид}} e^{-k_1' \sqrt{r^2-a^2}},$$

$$v_r \approx (v_r)_{\text{ид}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2-a^2}}, \qquad I \approx (I)_{\text{ид}} e^{-2k_1'' \sqrt{r^2-a^2}}, \tag{28}$$

где $(p - p_0)_{\text{ид}}$, $(v_r)_{\text{ид}}$ и $(I)_{\text{ид}}$ — значения $p - p_0$, $v_2$ и $I$ при $\nu' = \nu = 0$, т. е. в идеальной среде. Эти формулы неприменимы при $\theta = 0$ [10]. В окрестности $\theta = 0$ (где не выполнено условие $\theta\omega_0 \gg 1$) имеем

$$\varphi = I\sqrt{\pi}\,\frac{\omega_0^{4/3} e^{-k_1'' \sqrt{r^2-a^2}} \exp\left\{i\left(k_1' \sqrt{r^2-a^2} - \omega t + \frac{5\pi}{6} + \frac{\varepsilon_1}{3}\right)\right\}}{2k_1' \sqrt{r}\,(r^2-a^2)^{1/4}} \times$$

$$\times \sum_m \frac{C_m}{1 + \exp(2\pi\nu_m i)} \exp\left\{i\nu_m\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{a}{r}\right)\right\} J_0(\nu_m\theta),$$

$$p - p_0 \approx (p - p_0)^0_{\text{ид}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2-a^2}}, \quad u_r \approx (u_r)^0_{\text{ид}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2-a^2}}, \quad I \approx (I)^0_{\text{ид}} e^{-2k_1'' \sqrt{r^2-a^2}}. \tag{29}$$

Здесь $(p - p_0)_{\text{ид}}{}^0$, $(v_r)_{\text{ид}}{}^0$ и $(I)_{\text{ид}}{}^0$ — значения $p - p_0$, $v_r$, $I$ в идеальной среде вблизи $\theta = 0$, а $J_0(\nu_m\theta)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Приведем таблицу значений $\exp(-2k_1''\sqrt{r^2 - a^2})$ в зависимости от отношения $r / a$ для воздуха при следующих данных:

$t = 15°$, $\nu' = 0$, $\nu = 0{,}148$ *см²/сек*, $c = 3 \cdot 42 \cdot 10^4$ *см/сек*, $a = 100$ *см*.

Из этой таблицы видно, что с уменьшением длины звуковых волн $\lambda = 2\pi a / \omega_0$ (или с увеличением $\omega_0$) влияние вязкости становится существенным. Например, для коротких волн с длиной $\lambda = 0{,}628$ *см* ($\omega_0 = 1000$) на расстоянии $r = 50\,a$ интенсивность в вязкой среде составляет 5,59% от той же величины в идеальной среде. Отсюда следует, что пренебрежение вязкостью воздуха является недопустимым для коротких звуковых волн.

Пусть теперь точка наблюдения лежит вне геометрической тени. Для поля рассеянной волны в дальней зоне $(r \to \infty)$, опять следуя Францу [12], можно написать следующие асимптотические формулы:

$$\varphi_s = \frac{Ia}{2r} e^{-k_1' r} \exp\left[i\left\{k_1'\left(r - 2a\sin\frac{\theta}{2} - \omega t\right)\right\}\right]\left(1 - i\,\frac{1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\omega_0 \sin^3\frac{\theta}{2}}\right) +$$

$$+ I\,\frac{\omega_0^{5/6} e^{-k_1'' \sqrt{r^2-a^2}}}{k_1' \sqrt{2r\sin\theta}\,(r^2-a^2)^{1/4}} \exp\left\{i\left(k_1' \sqrt{r^2-a^2} - \omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{\varepsilon_1}{6}\right)\right\} \times$$

$$\times \sum_m \frac{C_m}{1+\exp(2\pi\nu_m i)}\left[\exp\left\{i\nu_m\left(\frac{5\pi}{2}-\theta-\arccos\frac{a}{r}\right)-\frac{\pi}{4}i\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{i\nu_m\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\arccos\frac{a}{r}\right)+\frac{\pi}{4}i\right\}\right]; \qquad (30)$$

$$p_s \approx (p_s)_{\text{ид}}\cdot e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{I\rho_0\omega a}{2r}\exp\left[i\left\{k_1'\left(r-2a\sin\frac{\theta}{2}\right)-\omega t+\frac{\pi}{2}\right\}\right]\times$$

$$\times\left(1-i\frac{1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\omega_0\sin^3\frac{\theta}{2}}\right)(e^{-k_1''r}-e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}});$$

$$v_{sr}\approx(v_{sr})_{\text{ид}}\,e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{I\omega a}{2cr}\exp\left[i\left\{k_1'\left(r-2a\sin\frac{\theta}{2}\right)-\omega t+\frac{\pi}{2}\right\}\right]\times$$

$$\times\left(1-i\frac{1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\omega_0\sin^3\frac{\theta}{2}}\right)(e^{-k_1''r}-e^{-k_1'\sqrt{r^2-a^2}})$$

$$I_s\approx(I_s)_{\text{ид}}\cdot e^{-2k_1''\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{I\rho_0\omega^2a^2}{8cr^2}\{e^{-2k_1'r}-e^{-2k_1''\sqrt{r^2-a^2}}\}$$

В окрестности отраженного луча $\theta=\pi$ вместо формул (30) мы имеем другие асимптотические разложения:

$$\varphi_s\simeq\frac{Ia}{2r}e^{-k_1''r}\exp\left\{i\left(k_1'r-2k_1'a\sin\frac{\theta}{2}-\omega t\right)\right\}\left(1-i\frac{1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\omega_0\sin^3\frac{\theta}{2}}\right)+$$

$$+\frac{\omega_0^{5/6}\exp(-k_1''\sqrt{r^2-a^2})\exp\left\{i\left(k_1'\sqrt{r^2-a^2}-\omega t+\frac{\pi}{3}-\frac{\varepsilon_1}{6}\right)\right\}}{k_1'\sqrt{r\sin\theta}\,(r^2-a^2)^{1/4}}\times$$

$$\times\sum_m\frac{C_m}{1+\exp(2\pi\nu_m' i)}\exp\left\{i\nu_m'\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{a}{r}\right)\right\}J_0\{\nu_m(\pi-\theta)\};$$

$$p_s\approx(p_s)_{\text{ид}}\cdot e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{I\rho_0\omega a}{2r}\left(1-i\frac{1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\omega_0\sin^3\frac{\theta}{2}}\right)\exp\left[i\left\{k_1'\left(r-\right.\right.\right. \qquad (31)$$

$$\left.\left.\left.-2a\sin\frac{\theta}{2}\right)-\omega t+\frac{\pi}{2}\right\}\right](e^{-k_1r}-e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}});$$

$$v_{sr}\approx(v_{sr})_{\text{ид}}\cdot e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{I\omega a}{2cr}\left(1-i\frac{1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\omega_0\sin^3\frac{\theta}{2}}\right)\exp\left[i\left\{k_1'\left(r-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2a\sin\frac{\theta}{2}\right)-\omega t+\frac{\pi}{2}\right\}\right](e^{-k_1''r}-e^{-k_1''\sqrt{r^2-a^2}});$$

$$I_s\approx(I_s)_{\text{ид}}\cdot e^{-2k_1''\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{I^2\rho_0\omega^2a^2}{8cr^2}[e^{-2k_1''r}-e^{-2k_1''\sqrt{r^2-a^2}}]$$

В формулах (30) и (31) при достаточно большом $r/a$ (например, при $\frac{r}{a}>50$) можно пренебречь вторым членом, содержащим множитель

$\exp(-\varkappa k_1'' r) - \exp(-\varkappa k_1'' \sqrt{r^2 - a^2})$ (где $\varkappa = 1, 2$) по сравнению с первым. Тогда формулы (30) и (31) будут иметь тот же вид, что (28) и (29).

Таким образом, мы нашли асимптотические формулы для давления, скорости и интенсивности рассеянной волны в точке $(r, \theta, \psi)$ вдали от сферы. Если известны указанные величины в идеальной среде, то соответственные величины в вязкой среде определяются элементарными формулами (28)—(31). Если пренебречь вязкостью $(\nu' = \nu = 0)$, то из этих же формул получим выражения, совпадающие с результатами работ [3, 4].

Полная сила, действующая на сферу в направлении оси $Ox$, определяется в случае малой вязкости среды формулой

$$R_x = -a^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} p_{rr}|_{r=a} \cos\theta \sin\theta \, d\theta, \tag{32}$$

где

$$p_{rr} = -p + \rho_0 \left(\nu' - \frac{2}{3}\nu\right) \operatorname{div} \mathbf{V} + 2\rho_0 \nu \frac{\partial v_r}{\partial r}. \tag{33}$$

Подставляя (14), (16), (33) в (32) и учтя свойства сферических цилиндрических функций [6], мы получим после несложных преобразований для $R_x$:

$$R_x = -\frac{8\pi a \rho_0 \omega}{k_1 h_1'(k_1 a)} \left[1 + \frac{4\nu i}{\omega a^2}\right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi a^4 \omega^3 \rho_0}{c^2} I \cos(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \pi - \omega t), & \omega_0 \ll 1 \\ 8\pi a^2 \omega \rho_0 I e^{k_1'' a} \cos(k_1' a - \omega t), & \omega_0 \gg 1, \end{cases} \tag{34}$$

где $e^{\varepsilon_2 i} = 1 + 4\nu i / \omega a^2$.

При отсутствии вязкости $(\nu' = \nu = 0)$ мы получим

$$R_x \approx -\frac{8\pi a \rho_0 c I}{h_1'(ka)} = \begin{cases} \dfrac{4\pi a^4 \omega^3 \rho_0 I}{c^2} \cos(\pi - \omega t); & \omega_0 \ll 1 \\ 8\pi a^2 \omega \rho_0 I \cos(ka - \omega t); & \omega_0 \gg 1, \end{cases} \tag{35}$$

где $k_1' = k = \omega / c$.

Из этих формул видно, что величина $R_x$ изменяется по закону стоячих волн, причем амплитуда этих волн при $\omega_0 \ll 1$ прямо пропорциональна $\omega_0^2$ и $a^2$, а при $\omega_0 \gg 1$ прямо пропорциональна $\omega_0$ и $a$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Sewell. On the extinction of sound in a viscous atmosphere by small obstacles. Phil. Trans., 1910, ACCX, 239.
2. Г. Лэмб. Гидродинамика. М., ГТТИ, 1947, § 362.
3. Ф. Морз. Колебания и звук. М., ГТТИ, 1949, § 29.
4. Ф. Морз, И. Фешбах. Методы теоретической физики, т. II, М., ГТТИ, 1958.
3. G. N. Watson. The diffraction of electric waves by the earth. Proc. Roy. Soc., 1918, A 95, 83—99.
6. Г. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
7. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1967.
8. А. Зоммерфельд. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950.
9. Е. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.
10. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
11. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., ГТТИ, 1937.
12. W. Franz. Über die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel. Zs. Naturforschung, 1954, 9a, 705—713.



Тульский политехнический институт



Поступила в редакцию
8 марта 1969 г.