

ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА РЕШЕТОК СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

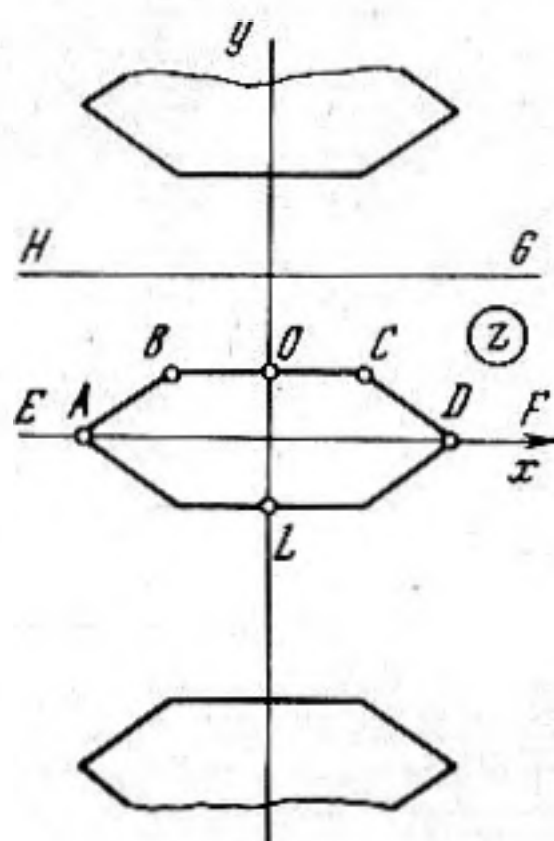
В. М. Астапенко

Решения многих задач акустики и гидродинамики приводят к вычислению т.н. коэффициентов присоединенных масс λ_x и λ_y . В частности, решение задачи дифракции плоской волны на частой периодической решетке сводится к отысканию этих коэффициентов.

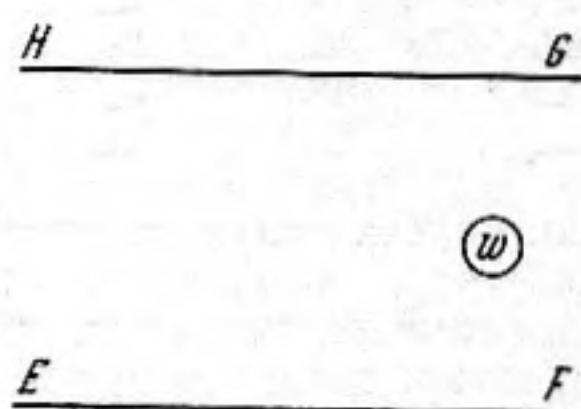
Цель данной работы — получить асимптотические формулы для λ_x и λ_y в явной и обозримой форме для решеток специального вида при некоторых условиях, налагаемых на их геометрические параметры. Согласно работе [1]

$$\frac{\lambda_x}{\rho} = -S + 2c \left[\lim_{z \rightarrow \infty} (w - z) - \lim_{z \rightarrow -\infty} (w - z) \right], \quad (1)$$

где $w(z)$ — конформное отображение области EABOCDGH в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ (фиг. 1) на полосу EFGH (фиг. 2), ρ — плотность среды, S — площадь элемента решетки.

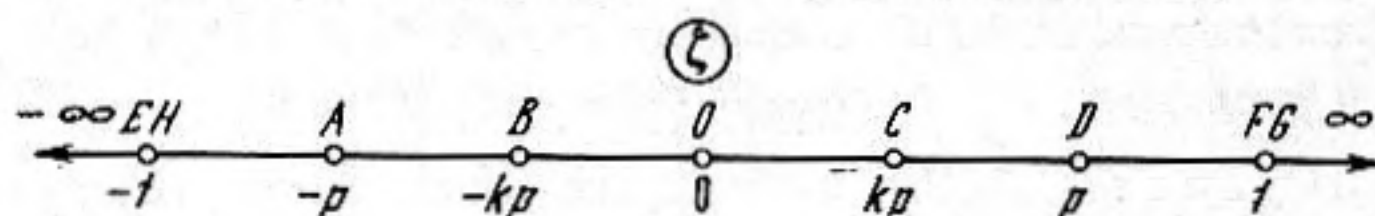


Фиг. 1



Фиг. 2

Для удобства вместо определения функции $w(z)$ строятся два отображения верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta \geq 0$ комплексного переменного ζ (фиг. 3) на вышеназванные области в плоскостях w и z ; при этом точки $-1, -p, -kp, 0, kp, p, 1$, лежащие на оси $\text{Im } \zeta = 0$, соответственно переходят в EH, A, B, O, C, D, FG.



Фиг. 3

В случае решетки, изображенной на фиг. 1, эти отображения находятся при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца в следующем виде:

$$z(\zeta) = \frac{2c}{\pi} \left(\frac{1-p^2}{1-k^2p^2} \right)^{1/n} \int_0^\zeta \left(\frac{\zeta^2 - k^2p^2}{\zeta^2 - p^2} \right)^{1/n} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2} + id, \quad w(\zeta) = \frac{2c}{\pi} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{1-\zeta^2}, \quad (2)$$

где n удовлетворяет соотношению

$$\text{tg } \frac{\pi}{n} = \frac{d}{a-d}, \quad (AD = 2a, BC = 2b, OL = 2d),$$

а неизвестные параметры k и p определяются из равенств

$$\frac{b}{c} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-p^2}{1-k^2p^2} \right)^{1/n} \int_0^{kp} \left(\frac{\zeta^2 - k^2p^2}{\zeta^2 - p^2} \right)^{1/n} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2}, \quad (3)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-p^2}{1-k^2p^2} \right)^{1/n} \int_{kp}^p \left(\frac{\zeta^2 - k^2p^2}{\zeta^2 - p^2} \right)^{1/n} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2} + b + id. \quad (4)$$

Если теперь использовать формулу (2) при рассмотрении выражения (1), то получим

$$\frac{\lambda_x}{\rho} = -S + \frac{8c^2}{\pi} \int_0^1 \left\{ 1 - \left[\frac{(1-p^2)(\zeta^2 - k^2 p^2)}{(1-k^2 p^2)(\zeta^2 - p^2)} \right]^{1/n} \right\} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2}. \quad (5)$$

Последние четыре равенства целиком и полностью определяют λ_x , но поскольку правые части выражения (3) — (5) суть интегралы, представляющие специальные функции, то λ_x не может быть выражен через элементарные функции от геометрических параметров решетки. Поэтому определяется асимптотическое выражение для λ_x при $\frac{d}{c} \rightarrow 0$. Для этого раскладываем правые части равенств (3) — (5) в ряд по степеням $\frac{d}{c}$ малости $1 - k^2$ (так как при $\frac{d}{c} \rightarrow 0$, $k \rightarrow 1$), и, ограничиваясь определенным числом членов в разложениях, исключаем из выражения для λ_x неизвестные параметры k и p , используя для этого выражения (3) и (4); в результате получаем

$$\frac{\lambda_x}{c^2 \rho} = -\frac{4}{\pi} \frac{d^2}{c^2} \left[\ln \frac{nd}{2c \sin \frac{\pi b}{c}} + \frac{n-3}{2} + \psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi(1) + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right] + o\left(\frac{d^2}{c^2}\right) \quad \text{при } \frac{d}{c} \rightarrow 0,$$

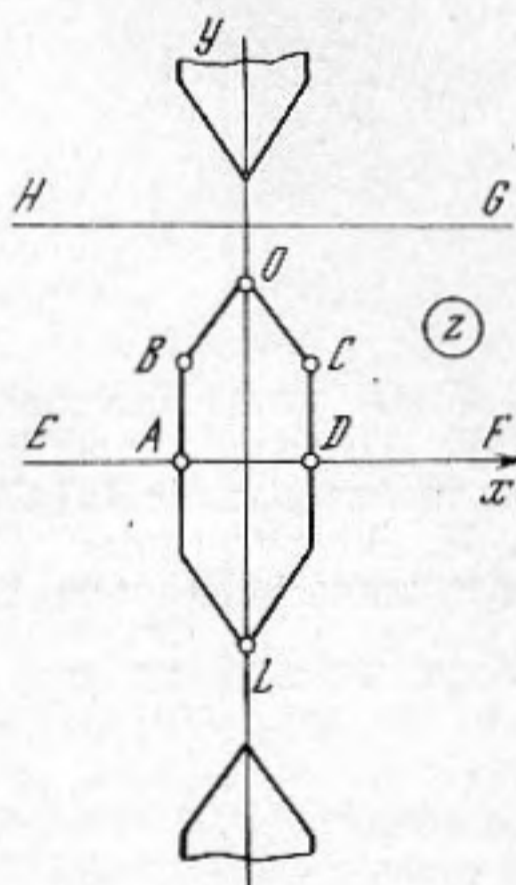
где ψ есть пси-функция.

Далее, согласно работе [2], λ_y определяется следующей формулой:

$$\frac{\lambda_y}{\rho} = -2S + \frac{4c^2}{\pi} \ln \frac{1}{1-p^2} - \frac{\lambda_x}{\rho}.$$

Учитывая это, найдем, что

$$\frac{\lambda_y}{c^2 \rho} = \frac{8}{\pi} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2c} - 8 \frac{b}{c} \frac{d}{c} - \frac{4}{\pi} \frac{d}{c} \left[\ln \frac{nd}{2c \operatorname{sh} \frac{\pi b}{c}} - 1 + \psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi(1) \right] \operatorname{th} \frac{\pi b}{2c} + o\left(\frac{d}{c}\right) \quad \text{при } \frac{d}{c} \rightarrow 0.$$



Фиг. 4

Из полученных результатов видно, что при сделанных предположениях относительно параметров решетки основным коэффициентом является λ_y , так как он содержит нулевую и первую степень $\frac{d}{c}$, в то время как выражение для λ_x начинается со второй степени $\frac{d}{c}$.

Совершенно аналогично предыдущему, находятся асимптотические формулы для λ_x , λ_y второй решетки (см. фиг. 4) при условии, что

$$\frac{\lambda_x}{c^2 \rho} = \frac{8}{\pi} \ln \frac{1}{\cos \frac{\pi d}{2c}} - \frac{4}{\pi} \left[\ln \frac{nb}{2c \sin \frac{\pi d}{c}} + 2\pi \frac{d}{c} \operatorname{ctg} \frac{\pi d}{2c} + \psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi(1) - 1 \right] \frac{b}{c} \operatorname{tg} \frac{\pi d}{2c} + o\left(\frac{b}{c}\right),$$

$$\frac{\lambda_y}{c^2 \rho} = -\frac{4}{\pi} \frac{b^2}{c^2} \left[\ln \frac{nb}{2c \sin \frac{\pi d}{c}} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \psi\left(\frac{1}{n}\right) - \psi(1) + \frac{n-3}{2} \right] + o\left(\frac{b^2}{c^2}\right),$$

где $OL = 2a$, $AD = 2b$, $AB = d$.

Два последних равенства показывают, что λ_x является основным коэффициентом присоединенной массы второй решетки.

Если $n = 2$, то первая решетка перейдет в решетку из прямоугольников, длина и высота которых есть, соответственно, b и d , поэтому

$$\frac{\lambda_x}{c^2 \rho} = \frac{4}{\pi} \frac{d^2}{c^2} \left[\frac{1}{2} - \ln \frac{d}{4c \operatorname{sh} \frac{\pi b}{c}} \right] + o\left(\frac{d^2}{c^2}\right) \quad \text{при } \frac{d}{c} \rightarrow 0,$$

$$\frac{\lambda_y}{c^2 \rho} = \frac{8}{\pi} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2c} - 8 \frac{b}{c} \frac{d}{c} + \frac{4}{\pi} \frac{d}{c} \left[1 - \ln \frac{d}{4c \operatorname{sh} \frac{\pi b}{c}} \right] \operatorname{th} \frac{\pi b}{2c} + o\left(\frac{d}{c}\right)$$

при $\frac{d}{c} \rightarrow 0$.

Аналогично этому получим, что в случае $n = 2$ вторая решетка также перейдет в решетку из прямоугольников, длина и высота которых есть, соответственно, b и d .

$$\frac{\lambda_x}{c^2 \rho} = \frac{8}{\pi} \ln \frac{1}{\cos \frac{\pi d}{2c}} - 8 \frac{b}{c} \frac{d}{c} - \frac{4}{\pi} \frac{b}{c} \left[\ln \frac{1}{4c \sin \frac{\pi d}{c}} - 1 \right] \operatorname{tg} \frac{\pi d}{2c} + o\left(\frac{b}{c}\right)$$

при $\frac{b}{c} \rightarrow 0$,

$$\frac{\lambda_y}{c^2 \rho} = -\frac{4}{\pi} \frac{b^2}{c^2} \left[\ln \frac{b}{4c \sin \frac{\pi d}{c}} - \frac{1}{2} \right] + o\left(\frac{b^2}{c^2}\right) \quad \text{при } \frac{b}{c} \rightarrow 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., ГТТИ, 1950.
2. В. М. Астапенко. Теория дифракции на жестких частых решетках. Отчет Акустического ин-та АН СССР, 1966.
3. В. М. Астапенко. Присоединенная масса решеток специального вида. Отчет Акустического ин-та АН СССР, 1969.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
30 октября 1969 г.

УДК 534.87+534.231.1

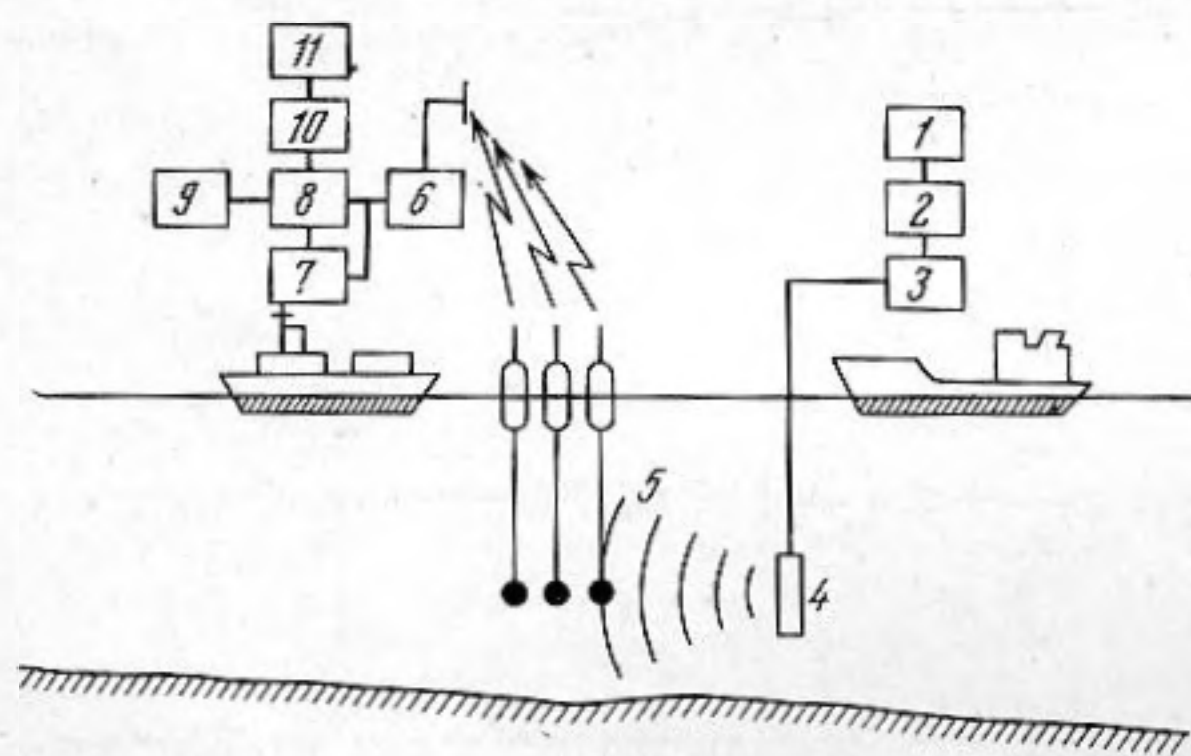
ИССЛЕДОВАНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО ЗВУКОВОГО СИГНАЛА В МОРЕ

В. И. Бардышев, Н. А. Васильев, С. Г. Гершман

Эффективным средством исследования когерентности сигналов в акустике является корреляционный метод. Ниже описаны исследования горизонтальной пространственной корреляции звукового поля в море, а также взаимной корреляции сигнала, распространяющегося

в море, с аналогичным опорным сигналом. Излучатель и приемники располагались приблизительно в одной плоскости на оси подводного звукового канала.

Схема проведения эксперимента была следующей (фиг. 1). Сигнал с задающего генератора псевдослучайных сигналов 1 подавался через фильтр 2 на усилитель 3 и далее на излучатель 4. Длительность каждой псевдошумовой посылки равнялась 16 сек и следовали они непрерывно одна за другой. Излучатель имел некоторую направленность в вертикальной плоско-



Фиг. 1